



# TEORÍA DE BOGOLIUBOV PARA LA CONDENSACIÓN DE EXCITONES-POLARITONES

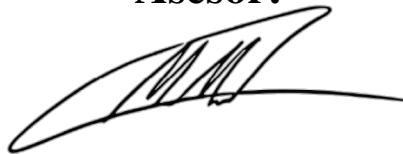
**Autor:**



---

Areli Jael Vega Carmona

**Asesor:**



---

Dr. Miguel Angel Bastarrachea Magnani

PROYECTO TERMINAL I: INVESTIGACIÓN TEÓRICA  
CLAVE 2111107. TRIMESTRE 21-O.

**Licenciatura en Física**  
**Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa**  
4 de Febrero 2022

**Índice**

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Excitones-polaritones . . . . .	2
1.2. Condensado de Bose-Einstein . . . . .	3
1.3. Condensados de excitones-polaritones . . . . .	4
<b>2. BEC de excitones-polaritones</b>	<b>5</b>
2.1. Sistema luz-materia . . . . .	6
2.2. Interacciones polaritónicas . . . . .	9
2.3. Bombeo . . . . .	10
2.4. Aproximación de Bogoliubov . . . . .	14
2.5. Transformación de Bogoliubov . . . . .	16
<b>3. Espectro de Bogoliubov</b>	<b>20</b>
<b>4. Conclusiones</b>	<b>26</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>27</b>

## 1. Introducción

### 1.1. Excitones-polaritones

Los semiconductores son materiales en los que, en general, todos los estados de la capa de valencia están ocupados, mientras que los estados de la capa de conducción están vacíos y esto se debe a que los electrones ocupan primero los niveles de energía más bajos. La diferencia entre la banda de conducción con menor energía y la banda de valencia con mayor energía es conocida como brecha de energía (*gap* en inglés).

Para que un electrón pueda pasar de la capa de valencia a la capa de conducción es necesario aportarle la misma o mayor energía que la del *gap*. Una forma de excitar a los electrones en la capa de valencia es por medios ópticos y al interactuar los semiconductores con la luz se forma un excitón, el cual es una cuasipartícula que consiste en un par ligado de un electrón en la banda de conducción y un agujero en la banda de valencia [1].

En el diagrama de la relación de dispersión, como la mostrada en la Fig. 1 [2], la cual nos da información sobre la relación del momento,  $\vec{k}$ , con la energía,  $E$ , observamos que en la aproximación  $|\vec{k}| \approx 0$ , la forma de la banda de valencia y de la banda de conducción es parabólica, por lo que su relación de dispersión será cuadrática [2]. En la banda de valencia un electrón tendrá una energía  $E_v = -\frac{\vec{k}^2}{2m_v}$ , mientras que en la banda de conducción tendrá una energía  $E_c = \frac{\vec{k}^2}{2m_c} + E_g$ , donde  $E_g$  es la energía de la brecha. Si un fotón con energía  $E_f$  y momento  $\vec{k}_f$  colisiona con un electrón podrá lograr que éste se mueva a la capa de conducción con un cambio de energía  $\Delta E = E_f$  y un cambio en su momento dado por  $\Delta \vec{k} = \vec{k}_f$ , por lo que el cambio de energía de un electrón con momento inicial  $\vec{k}$  será

$$\Delta E = E_c(\vec{k} + \Delta \vec{k}) - E_v(\vec{k}) = E_g + \frac{(\vec{k} + \Delta \vec{k})^2}{2m_c} + \frac{\vec{k}^2}{2m_v}. \quad (1.1)$$

Mientras tanto, en la capa de conducción queda un agujero el cual actúa como una partícula con carga positiva, así que interacción entre el electrón y el agujero es coulombiana, por lo que podríamos hacer una analogía con lo que sucede con un electrón y un protón en el átomo de hidrógeno [1]. La masa efectiva del excitón será entonces  $m_x = m_c + m_v$ , donde  $m_c$  y  $m_v$  corresponden a las masas efectivas de la banda de conducción y de valencia, respectivamente, en  $|\vec{k}| = 0$ ; experimentalmente  $m_x$  se ha determinado en  $m_x = 1.7 \pm 0.1 m_e$ , donde  $m_e$  es la masa efectiva del electrón [3]. De forma general en los semiconductores, el electrón en la banda de conducción podría caer a la banda de valencia nuevamente emitiendo un fotón, el cual podría excitar a otro electrón dentro del semiconductor, pero cuando hay un acoplamiento fuerte entre los fotones de la microcavidad con los excitones en el semiconductor se da origen a una nueva cuasipartícula [4, 5, 6, 7], sus funciones de onda se combinan formando un excitón-polaritón, o sólo polaritón [7], el cual es una mezcla de luz y materia [4]. Entonces tenemos dos cuasipartículas, los excitones, que corresponden a un estado ligado de un electrón en la

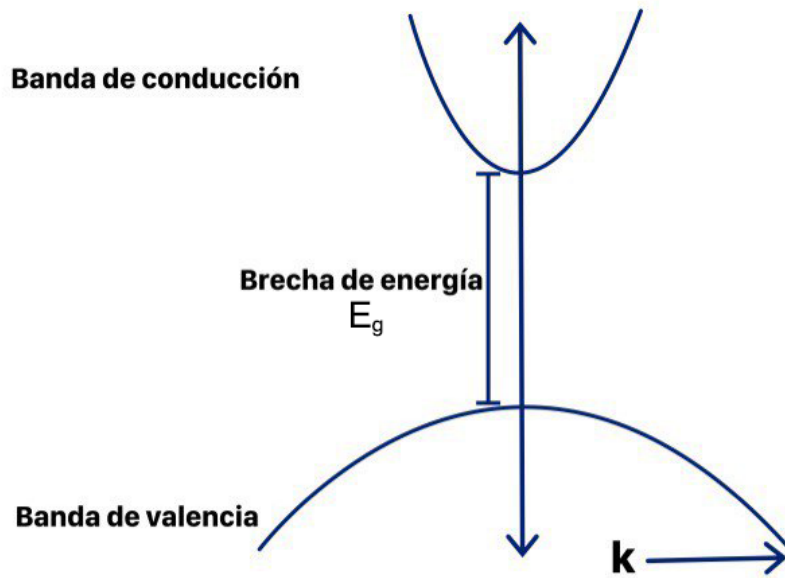


Figura 1: Diagrama de las energías de las capas de valencia y conducción contra el momento  $k = |\vec{k}|$ .

banda de conducción con un agujero en la banda de valencia de un semiconductor, y los polaritones, que son la mezcla de los excitones del semiconductor con los fotones de la microcavidad mediante un acoplamiento fuerte.

## 1.2. Condensado de Bose-Einstein

Por otra parte, en 1920 se predijo teóricamente la condensación de Bose-Einstein [8]. Primero, Bose estudió la estadística de los fotones y posteriormente Einstein consideró un gas diluido de bosones, y obtuvo como resultado que existe cierta temperatura en la cual una fracción de las partículas ocupan el mismo estado de mínima energía [8]. Un ejemplo de un condensado de Bose-Einstein es el líquido superfluido  $^4\text{He}$ . Para observar dicho fenómeno cuántico es necesaria una temperatura de 1 K [8]. En 1998 se observó de forma experimental un condensado de Bose-Einstein de hidrógeno. El cual a bajas temperaturas no forma un líquido sino que se mantiene como un gas logrando que las interacciones sean débiles por lo que hay un mayor número de átomos en el estado de momento cero [8]. Sin embargo, no se puede conseguir un condensado de Bose-Einstein con cualquier sustancia, debido que a bajas temperaturas la mayoría de las sustancias no están en su forma gaseosa, sino que se vuelven sólidos y las fuerzas de interacción entre sus componentes es más fuerte [8]. El caso del helio líquido es una excepción de que a bajas temperaturas se solidifique [8]. Y esto es porque, debido a su pequeña masa, la energía de punto cero, es decir, la energía del estado base, es lo suficientemente grande, para superar la tendencia a la cristalización [9]. Sin embargo, hay propiedades de ciertos materiales que se pueden estudiar y entender mediante la condensación de Bose-Einstein [8].

Por otra parte, se han realizado muchos esfuerzos por encontrar sistemas de estado sólido en donde exista la condensación de Bose-Einstein, y los excitones-polaritones son un

sistema atractivo para estudiar este fenómeno, debido a que su masa efectiva es  $10^{-4}$  veces la masa libre del electrón, por lo que sus longitudes de onda de de Broglie es comparable con su promedio de separación, lo cual permite que haya una condensación de Bose-Einstein [10].

### 1.3. Condensados de excitones-polaritones

Los polaritones pueden condensarse a temperaturas de siete órdenes de magnitud, en K, superior a las requeridas para la condensación de Bose-Einstein, debido a su masa efectiva, la cual es siete órdenes de magnitud menor que la masa del átomo de hidrógeno [1]. Es decir, la condensación ocurre en parámetros atractivos del sistema. Hay dos propiedades destacables de los excitones-polaritones: su ligera masa efectiva de su parte fotónica y las interacciones coulombianas repulsivas de su parte excitónica [11].

Podemos pensar en los excitones-polaritones en una sucesión de eventos: se absorbe un fotón creando un excitón y el excitón se recombina emitiendo un fotón, etc [7], lo que brinda una correspondencia entre los polaritones y los fotones emitidos de la cavidad [1]. Al detectar los excitones-polaritones se puede saber con cierta probabilidad cuánto es luz y cuánto es materia mediante los coeficientes de Hopfield [7], debido a que determinan la fracción de luz o materia de éstos [12]. Los coeficientes de Hopfield son los coeficientes de la matriz que diagonaliza el Hamiltoniano de la interacción luz-materia. Sin embargo, es imposible saber a priori si el polaritón va a colapsar a un fotón o a un excitón [7].

Si bien se trata de un sistema fuera de equilibrio, dado que los polaritones tienen un tiempo de vida corto (en el rango de 10-ps [11]) debido a la fuga de fotones de la cavidad [1], pueden mostrar algunos de los fenómenos más interesantes del condensado de Bose-Einstein de los polaritones [11], tales como vórtices cuánticos, excitaciones de Bogoliubov y superfluidez que ocurren en equilibrio [4, 11, 10, 12, 13]. Cuando se tiene un condensado de Bose-Einstein de excitones-polaritones y se somete a una perturbación, se generan excitaciones de Bogoliubov que resultan en la emisión de luz [11] y detrás del fenómeno de superfluidez encontramos como base la transformación de Bogoliubov [11] del cual se puede obtener el espectro de la distribución energética. El resultado de este espectro nos muestra la dispersión de energía negativa, la cual es resultado de procesos paramétricos en la excitación del fluido cuántico [14, 11].

Por otro lado, como se trata de un sistema fuera de equilibrio no se puede asociar el potencial químico con la densidad de polaritones [6]. En un condensado de un gas aislado, la frecuencia de oscilación de su función de onda es igual a su potencial químico, por lo que se puede fijar mediante la ecuación de estado. En nuestro caso la frecuencia de oscilación es igual a la frecuencia del laser que bombea los fotones en la microcavidad, por lo que es un parámetro experimental [6]. Y es por esto que el sistema de polaritones en microcavidades nos permite explorar regímenes que no son accesibles en condensados de sistemas atómicos.

Ahora bien, el fuerte acoplamiento entre los excitones y los fotones de la cavidad dan lugar a nuevas cuasipartículas llamadas polaritón superior e inferior [4], las mezclas de luz y materia, como veremos más adelante.

## 2. BEC de excitones-polaritones

La descripción de la condensación de Bose-Einstein de excitones-polaritones se hace tradicionalmente mediante teorías de campo medio en las que no se captura su naturaleza fuera de equilibrio, sólo de manera estacionaria. Como se mencionó anteriormente, sin embargo, es esta propiedad la que permite mostrar fenómenos interesantes del condensado de Bose-Einstein. En este proyecto se describe una forma detallada el cálculo para obtener el espectro de Bogoliubov para la condensación de polaritones inferiores usando una aproximación Hamiltoniana no hermitiana para incluir los efectos fuera de equilibrio en una primera aproximación.

Nos interesa obtener la dispersión de los polaritones, por lo que vamos a partir del Hamiltoniano que representa la interacción luz-materia en segunda cuantización y lo vamos a diagonalizar,

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \left[ \epsilon_{c,\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \epsilon_{x,\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}} + \Omega (\hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}}) + \Omega_f (\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} F + \hat{a}_{\mathbf{k}} F^*) \right] + \frac{g_{xx}}{2} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{k}'} (\hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}}) \quad (2.1)$$

donde  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  es el operador de creación de un fotón y  $\hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  es el operador de creación de un excitón, ambos con momento  $\mathbf{k}$ .  $\Omega$  da la fuerza de acoplamiento del fotón y el excitón, y  $g_{xx}$  es la fuerza de interacción de excitones con espín opuesto. Por otra parte,  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} = \hat{n}_{\mathbf{k}}$  (operador de número) es el número de fotones en el estado  $\nu_{\mathbf{k}}$  con momento  $\mathbf{k}$ , por lo que  $\sum_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}$  es el número total de fotones en el sistema y  $\sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{c,\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}$  es la energía del campo de fotones en ausencia de interacción luz-materia. De forma similar, para el caso de los excitones tenemos que  $\hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}}$  es el número de excitones en el estado  $\nu_{\mathbf{k}}$  con momento  $\mathbf{k}$ . Mientras que  $\sum_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}}$  es el número total de excitones en el sistema y  $\sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{x,\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}}$  es la energía de los excitones. Notemos que el término  $\hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}}$  nos dice que  $\hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}$  remueve un fotón y añade un excitón, mientras que  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}}$  remueve un excitón y añade un fotón. El término  $\Omega_f (\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} F + \hat{a}_{\mathbf{k}} F^*)$  nos indica que hay un bombeo de fotones al sistema, esta vez con una frecuencia  $\Omega_f$ . Este bombeo describe una onda periódica como la de un láser y es necesario porque, como se ha mencionado anteriormente, se trata de un sistema fuera de equilibrio, pues los polaritones en algún momento decaen y los fotones escapan [12, 16]. Finalmente, el último término del Hamiltoniano  $\frac{g_{xx}}{2} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}}$ , es el que brinda la interacción entre los excitones, la cual es una interacción de contacto.

Al diagonalizar el Hamiltoniano se obtienen los polaritones superiores e inferiores creados por los nuevos operadores  $\hat{L}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  y  $\hat{U}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ . Primero se realiza la diagonalización sin las interacciones materiales, y se incluirán posteriormente. Podemos hacer una transformación

unitaria entre las dos bases, mediante

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_{\mathbf{k}} \\ \hat{a}_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_k & S_k \\ -S_k & C_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{L}_{\mathbf{k}} \\ \hat{U}_{\mathbf{k}} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

donde  $C_k^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\delta_k}{\sqrt{\delta_k^2 + 4\Omega^2}} \right)$  y  $S_k^2 = 1 - C_k^2$ , son los coeficientes de Hopfield [4] y nos dan la fracción de contenido fotónico y excitónico [14]. Estos coeficientes dependen de  $\delta_k = \epsilon_{\mathbf{k}}^c - \epsilon_{\mathbf{k}}^x$ , que se denomina desintonización [4] donde  $\epsilon_{\mathbf{k}}^x = \mathbf{k}^2/2m_x$  y  $\epsilon_{\mathbf{k}}^c = \mathbf{k}^2/2m_c + \delta$ , con  $m_x$  la masa del excitón y  $m_c$  la masa del fotón en la cavidad [4] y  $m_c = 10^{-4}m_x$ .

## 2.1. Sistema luz-materia

Obtenemos la forma de los antiguos operadores de creación y aniquilación en términos de los nuevos operadores de creación y aniquilación de polaritón inferior y superior,

$$\hat{a}_k = -S_k \hat{L}_k + C_k \hat{U}_k, \quad (2.3a)$$

$$\hat{a}_k^\dagger = -S_k \hat{L}_k^\dagger + C_k \hat{U}_k^\dagger, \quad (2.3b)$$

$$\hat{b}_k = C_k \hat{L}_k + S_k \hat{U}_k, \quad (2.3c)$$

$$\hat{b}_k^\dagger = C_k \hat{L}_k^\dagger + S_k \hat{U}_k^\dagger. \quad (2.3d)$$

De acuerdo a estas ecuaciones podemos reescribir el Hamiltoniano de la Ec. 2.1. Esto nos dará las interacciones entre polaritones que llevarán a la formación del condensado. Para el primer término del Hamiltoniano se tiene que

$$\begin{aligned} \epsilon_{c,k} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} &= \epsilon_{c,k} (-S_k \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger + C_k \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger) (-S_k \hat{L}_{\mathbf{k}} + C_k \hat{U}_{\mathbf{k}}) \\ &= \epsilon_{c,k} S_k^2 \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} - \epsilon_{c,k} S_k C_k \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} - \epsilon_{c,k} S_k C_k \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} + \epsilon_{c,k} C_k^2 \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} \\ &= \epsilon_{c,k} S_k^2 \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} + \epsilon_{c,k} C_k^2 \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} - \epsilon_{c,k} S_k C_k (\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} + \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para el segundo término del Hamiltoniano,

$$\begin{aligned} \epsilon_{x,k} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} &= \epsilon_{x,k} (C_k \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger + S_k \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger) (C_k \hat{L}_{\mathbf{k}} + S_k \hat{U}_{\mathbf{k}}) \\ &= \epsilon_{x,k} C_k^2 \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} + \epsilon_{x,k} C_k S_k \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} + \epsilon_{x,k} S_k C_k \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} + \epsilon_{x,k} S_k^2 \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} \\ &= \epsilon_{x,k} C_k^2 \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} + \epsilon_{x,k} S_k C_k (\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} + \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}}) + \epsilon_{x,k} S_k^2 \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Para los términos cruzados, respectivamente,

$$\begin{aligned} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} &= (C_k \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger + S_k \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger) (-S_k \hat{L}_{\mathbf{k}} + C_k \hat{U}_{\mathbf{k}}) \\ &= -C_k S_k \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} + C_k^2 \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} - S_k^2 \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} + S_k C_k \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

y

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} &= (-S_k \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger + C_k \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger) (C_k \hat{L}_{\mathbf{k}} + S_k \hat{U}_{\mathbf{k}}) \\ &= -S_k C_k \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} - S_k^2 \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} + C_k^2 \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} + S_k C_k \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Sumando  $\hat{b}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \hat{b}_k$ , obtenemos,

$$\hat{b}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \hat{b}_k = -2S_k C_k \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k + 2S_k C_k \hat{U}_k^\dagger \hat{U}_k + (k - S_k^2) (\hat{L}_k^\dagger \hat{U}_k + \hat{U}_k^\dagger \hat{L}_k).$$

La suma de los primeros tres términos del Hamiltoniano resulta ser,

$$\begin{aligned} \epsilon_{c,k} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \epsilon_{x,k} \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \Omega (\hat{b}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \hat{b}_k) &= \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k (\epsilon_{x,k} C_k^2 + \epsilon_{c,k} S_k^2 - 2S_k C_k \Omega) + \\ &+ \hat{U}_k^\dagger \hat{U}_k (\epsilon_{x,k} S_k^2 + \epsilon_{c,k} C_k^2 + 2S_k C_k \Omega) + \\ &+ (\hat{L}_k^\dagger \hat{U}_k + \hat{U}_k^\dagger \hat{L}_k) (S_k C_k (\epsilon_{x,k} - \epsilon_{c,k}) + \Omega (C_k^2 - S_k^2)). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ahora queremos reescribir la expresión anterior en términos de los coeficientes de Hopfield,  $C_k$  y  $C_k^2$  porque así podremos analizar el comportamiento fotónico y excitónico de los polaritones. Recordemos que estos coeficientes nos dan información sobre el contenido fotónico y excitónico [12],

$$\begin{aligned} \epsilon_{c,k} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \epsilon_{x,k} \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \Omega (\hat{b}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \hat{b}_k) &= \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k (\epsilon_{x,k} C_k^2 + \epsilon_{c,k} (1 - C_k^2) - 2\sqrt{1 - C_k^2} C_k \Omega) + \\ &+ \hat{U}_k^\dagger \hat{U}_k (\epsilon_{x,k} (1 - C_k^2) + \epsilon_{c,k} C_k^2 + 2\sqrt{1 - C_k^2} C_k \Omega) + \\ &+ (\hat{L}_k^\dagger \hat{U}_k + \hat{U}_k^\dagger \hat{L}_k) (\sqrt{1 - C_k^2} C_k (\epsilon_{x,k} - \epsilon_{c,k}) + \Omega (C_k^2 - (1 - C_k^2))). \\ &= \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k (\epsilon_{x,k} C_k^2 + \epsilon_{x,k} - \epsilon_{c,k} C_k^2 - 2\sqrt{1 - C_k^2} C_k \Omega) + \\ &+ \hat{U}_k^\dagger \hat{U}_k (\epsilon_{x,k} - \epsilon_{x,k} C_k^2 + \epsilon_{c,k} C_k^2 + 2\sqrt{1 - C_k^2} C_k \Omega) \\ &+ (\hat{L}_k^\dagger \hat{U}_k + \hat{U}_k^\dagger \hat{L}_k) (\sqrt{1 - C_k^2} C_k (\epsilon_{x,k} - \epsilon_{c,k}) + \Omega (2C_k^2 - 1)). \\ &= \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k (-\delta_k C_k^2 + \epsilon_{c,k} - 2\sqrt{1 - C_k^2} C_k \Omega) + \hat{U}_k^\dagger \hat{U}_k (\epsilon_{x,k} + C_k^2 \delta_k + 2\sqrt{1 - C_k^2} C_k \Omega) + \\ &+ (\hat{L}_k^\dagger \hat{U}_k + \hat{U}_k^\dagger \hat{L}_k) (\Omega (2C_k^2 - 1) - \delta_k \sqrt{1 - C_k^2} C_k). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ahora usaremos la forma explícita de los coeficientes de Hopfield,  $C_k^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\delta_k}{\sqrt{\delta_k^2 + 4\Omega^2}} \right)$ ,

pues los encontramos en términos de la desintonización, la cual es un parámetro libre del sistema [6], es decir, los podemos variar y observar el comportamiento de los polaritones. Después de algo de trabajo y simplificar las expresiones, usando propiedades algebraicas, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \epsilon_{c,k} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \epsilon_{x,k} \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \Omega (\hat{b}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \hat{b}_k) &= \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k \left( \frac{\epsilon_{c,k} + \epsilon_{x,k}}{2} - \frac{\delta_k^2 + 4\Omega^2}{2\sqrt{\delta_k^2 + 4\Omega^2}} \right) \\ &+ \hat{U}_k^\dagger \hat{U}_k \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_{c,k} + \epsilon_{x,k}}{2} + \frac{\delta_k^2 + 4\Omega^2}{2\sqrt{\delta_k^2 + 4\Omega^2}} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$



Finalmente obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} \epsilon_{c,k} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \epsilon_{x,k} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \Omega (\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}}) &= \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \left( 2\epsilon_{x,k} + \delta_k - \sqrt{\delta_k^2 + 4\Omega^2} \right) + \\ &+ \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \left( 2\epsilon_{x,k} + \delta_k + \sqrt{\delta_k^2 + 4\Omega^2} \right). \end{aligned}$$

Podemos tomar  $\epsilon_{\mathbf{k}}^{UP,LP} = \frac{1}{2} \left( 2\epsilon_{\mathbf{k}}^{x,c} + \delta_k \pm \sqrt{\delta_k^2 + 4\Omega^2} \right)$ , donde  $\epsilon_{\mathbf{k}}^{UP}$  corresponde a la energía del polaritón superior, y  $\epsilon_{\mathbf{k}}^{LP}$  corresponde a la energía del polaritón inferior. De tal forma que los primeros tres términos del Hamiltoniano los podemos escribir como,

$$\epsilon_{c,k} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \epsilon_{x,k} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \Omega (\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}}) = \epsilon_{\mathbf{k}}^{LP} \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}}^{UP} \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}}. \quad (2.11)$$

Como se mencionó se ha hecho una diagonalización del Hamiltoniano. Si llamamos  $M =$

$$\begin{bmatrix} C_k & S_k \\ -S_k & C_k \end{bmatrix}, \text{ entonces su transpuesta es } M^\dagger = \begin{bmatrix} C_k & -S_k \\ S_k & C_k \end{bmatrix}, \text{ así que}$$

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\mathbf{k}} (\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger) \begin{bmatrix} C_k & -S_k \\ S_k & C_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{x,k} & \Omega \\ \Omega & \epsilon_{c,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_k & S_k \\ -S_k & C_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{L}_{\mathbf{k}} \\ \hat{U}_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} (\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger) \begin{bmatrix} C_k & -S_k \\ S_k & C_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_k \epsilon_{x,k} - S_k \Omega & S_k \epsilon_{x,k} + C_k \Omega \\ C_k \Omega - S_k \epsilon_{c,k} & S_k \Omega + C_k \epsilon_{c,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{L}_{\mathbf{k}} \\ \hat{U}_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} (\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger) \begin{bmatrix} C_k^2 \epsilon_{x,k} - 2S_k C_k \Omega + S_k^2 \epsilon_{c,k} & S_k C_k \epsilon_{x,k} + C_k^2 \Omega - S_k^2 \Omega - S_k C_k \epsilon_{c,k} \\ S_k C_k \epsilon_{x,k} - S_k^2 \Omega + C_k^2 - S_k C_k \epsilon_{c,k} & S_k^2 \epsilon_{x,k} + 2S_k C_k \Omega + C_k^2 \epsilon_{c,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{L}_{\mathbf{k}} \\ \hat{U}_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tomando  $S_k^2 = 1 - C_k^2$ ,

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} (\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

donde los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned} a &= C_k^2 \epsilon_{x,k} - 2\sqrt{1 - C_k^2} C_k \Omega + (1 - C_k^2) \epsilon_{c,k} \\ b &= \sqrt{1 - C_k^2} C_k \epsilon_{x,k} + C_k^2 \Omega - (1 - C_k^2) \Omega - \sqrt{1 - C_k^2} C_k \epsilon_{c,k} \\ c &= \sqrt{1 - C_k^2} C_k \epsilon_{x,k} - (1 - C_k^2) \Omega + C_k^2 - \sqrt{1 - C_k^2} C_k \epsilon_{c,k} \\ d &= (1 - C_k^2) \epsilon_{x,k} + 2\sqrt{1 - C_k^2} C_k \Omega + C_k^2 \epsilon_{c,k}. \end{aligned}$$

Reconocemos las entradas de la matriz como las expresiones que obtuvimos en la Ec. [2.9](#) así que

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} (\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger) \begin{bmatrix} \epsilon_{\mathbf{k}}^{LP} & 0 \\ 0 & \epsilon_{\mathbf{k}}^{UP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{L}_{\mathbf{k}} \\ \hat{U}_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}^{LP} + \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}^{UP}.$$

## 2.2. Interacciones polaritónicas

Ahora bien, ya que se ha diagonalizado el Hamiltoniano sin interacciones, se deben de tomar en cuenta el bombeo fotónico así como las interacciones. Es decir, se deben escribir en términos de los nuevos operadores  $\hat{L}_k^\dagger$  y  $\hat{U}_k^\dagger$ . Para el caso del término que contiene la información sobre el bombeo fotónico,

$$\begin{aligned}\Omega_f (\hat{a}_k^\dagger F + \hat{a}_k F^*) &= \Omega_f \left( (-S_k \hat{L}_k^\dagger + C_k \hat{U}_k^\dagger) F + (-S_k \hat{L}_k + C_k \hat{U}_k) F^* \right) \\ &= \Omega_f \left( -S_k \hat{L}_k^\dagger F + C_k \hat{U}_k^\dagger F - S_k \hat{L}_k F^* + C_k \hat{U}_k F^* \right) \\ &= \Omega_f \left( -S_k (\hat{L}_k^\dagger F + \hat{L}_k F^*) + C_k (\hat{U}_k^\dagger F + \hat{U}_k F^*) \right).\end{aligned}\quad (2.12)$$

Para el quinto término, referente a la interacción entre los polaritones,

$$\begin{aligned}\hat{b}_{k+q}^\dagger \hat{b}_{k'-q}^\dagger \hat{b}_{k'} \hat{b}_k &= \\ & \left( C_{k+q} \hat{L}_{k+q}^\dagger + S_{k+q} \hat{U}_{k+q}^\dagger \right) \left( C_{k'-q} \hat{L}_{k'-q}^\dagger + S_{k'-q} \hat{U}_{k'-q}^\dagger \right) \times \\ & \left( C_{k'} \hat{L}_{k'} + S_{k'} \hat{U}_{k'} \right) \left( C_k \hat{L}_k + S_k \hat{U}_k \right) = \\ & C_{k+q} C_{k'-q} C_{k'} C_k \hat{L}_{k+q}^\dagger \hat{L}_{k'-q}^\dagger \hat{L}_{k'} \hat{L}_k + C_{k+q} C_{k'-q} C_{k'} S_k \hat{L}_{k+q}^\dagger \hat{L}_{k'-q}^\dagger \hat{L}_{k'} \hat{U}_k + \\ & + C_{k+q} C_{k'-q} S_{k'} C_k \hat{L}_{k+q}^\dagger \hat{L}_{k'-q}^\dagger \hat{U}_{k'} \hat{L}_k + C_{k+q} C_{k'-q} S_{k'} S_k \hat{L}_{k+q}^\dagger \hat{L}_{k'-q}^\dagger \hat{U}_{k'} \hat{U}_k + \\ & + C_{k+q} S_{k'-q} C_{k'} C_k \hat{L}_{k+q}^\dagger \hat{U}_{k'-q}^\dagger \hat{L}_{k'} \hat{L}_k + C_{k+q} S_{k'-q} C_{k'} S_k \hat{L}_{k+q}^\dagger \hat{U}_{k'-q}^\dagger \hat{L}_{k'} \hat{U}_k + \\ & + C_{k+q} S_{k'-q} S_{k'} C_k \hat{L}_{k+q}^\dagger \hat{U}_{k'-q}^\dagger \hat{U}_{k'} \hat{L}_k + C_{k+q} S_{k'-q} S_{k'} S_k \hat{L}_{k+q}^\dagger \hat{U}_{k'-q}^\dagger \hat{U}_{k'} \hat{U}_k + \\ & + S_{k+q} C_{k'-q} C_{k'} C_k \hat{U}_{k+q}^\dagger \hat{L}_{k'-q}^\dagger \hat{L}_{k'} \hat{L}_k + S_{k+q} C_{k'-q} C_{k'} S_k \hat{U}_{k+q}^\dagger \hat{L}_{k'-q}^\dagger \hat{L}_{k'} \hat{U}_k + \\ & + S_{k+q} C_{k'-q} S_{k'} C_k \hat{U}_{k+q}^\dagger \hat{L}_{k'-q}^\dagger \hat{U}_{k'} \hat{L}_k + S_{k+q} C_{k'-q} S_{k'} S_k \hat{U}_{k+q}^\dagger \hat{L}_{k'-q}^\dagger \hat{U}_{k'} \hat{U}_k + \\ & + S_{k+q} S_{k'-q} C_{k'} C_k \hat{U}_{k+q}^\dagger \hat{U}_{k'-q}^\dagger \hat{L}_{k'} \hat{L}_k + S_{k+q} S_{k'-q} C_{k'} S_k \hat{U}_{k+q}^\dagger \hat{U}_{k'-q}^\dagger \hat{L}_{k'} \hat{U}_k + \\ & + S_{k+q} S_{k'-q} S_{k'} C_k \hat{U}_{k+q}^\dagger \hat{U}_{k'-q}^\dagger \hat{U}_{k'} \hat{L}_k + S_{k+q} S_{k'-q} S_{k'} S_k \hat{U}_{k+q}^\dagger \hat{U}_{k'-q}^\dagger \hat{U}_{k'} \hat{U}_k.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Podemos hacer la suma de todos los términos despreciando los correspondientes al polaritón superior, pues experimentalmente se miden en mayor cantidad los polaritones inferiores una vez que se ha formado el condensado de polaritones inferiores [4], aunque en un trabajo posterior se puede estudiar el problema completo, es decir, incluir los polaritones superiores. Obtenemos entonces,

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_k \left[ \epsilon_{c,k} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \epsilon_{x,k} \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \Omega (\hat{b}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \hat{b}_k) + \Omega_f (\hat{a}_k^\dagger F + \hat{a}_k F^*) \right] + \\ & + \frac{g_{xx}}{2} \sum_{q,k,k'} (\hat{b}_{k+q}^\dagger \hat{b}_{k'-q}^\dagger \hat{b}_{k'} \hat{b}_k) \\ & = \epsilon_k^{LP} \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k + \Omega_f \sin \theta_k (\hat{L}_k^\dagger F + \hat{L}_k F^*) + \\ & + \frac{g_{xx}}{2} \sum_{q,k,k'} \cos \theta_{k+q} \cos \theta_{k'-q} \cos \theta_{k'} \cos \theta_k \hat{L}_{k+q}^\dagger \hat{L}_{k'-q}^\dagger \hat{L}_{k'} \hat{L}_k.\end{aligned}\quad (2.14)$$

### 2.3. Bombeo

El bombeo es un campo eléctrico debido a que la aplicación de un campo eléctrico sobre los excitones puede extender su tiempo de vida [15]. Entonces, un bombeo continuo es necesario para mantener un estado estable [10]. Podemos escribir el campo eléctrico externo como

$$F(\mathbf{x}, t) = |F_{pu}| \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \epsilon_{pu}t/\hbar)]. \quad (2.15)$$

Pero es más conveniente trabajar en el espacio de momentos. Por lo tanto, tenemos que hacer el cambio de representación del campo eléctrico. Para hacer esto usamos la transformada de Fourier

$$\begin{aligned} F &= \int d\mathbf{x} F(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \int d\mathbf{x} |F_{pu}| e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \epsilon_{pu}t/\hbar)} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= |F_{pu}| e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar} \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= |F_{pu}| e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar} \int d\mathbf{x} e^{\mathbf{x} \cdot (i\mathbf{k} - i\mathbf{k})} \\ &= |F_{pu}| e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar} e^{\mathbf{x} \cdot (i\mathbf{k} - i\mathbf{k})} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= |F_{pu}| e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

Entonces, ahora debemos escribir los operadores de creación y aniquilación tomando en cuenta éste último resultado. Por lo tanto, los nuevos operadores de creación y aniquilación son,

$$\hat{l}_{\mathbf{k}} = \hat{L}_{\mathbf{k}} e^{i\epsilon_{pu}t/\hbar}, \quad (2.17)$$

$$\hat{l}_{\mathbf{k}}^\dagger = \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar}, \quad (2.18)$$

de tal forma que,

$$\hat{L}_{\mathbf{k}} = \hat{l}_{\mathbf{k}} e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar}, \quad (2.19)$$

$$\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger = \hat{l}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\epsilon_{pu}t/\hbar}. \quad (2.20)$$

Entonces vemos que los operadores de creación y aniquilación de los polaritones inferiores han cambiado por una fase. Sin embargo el número de polaritones y su energía no ha cambiado, pues  $\sum_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{l}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\epsilon_{pu}t/\hbar} \hat{l}_{\mathbf{k}} e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{l}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{l}_{\mathbf{k}} = N$  con  $N$  siendo el número de polaritones en el sistema y  $\sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}^{LP} \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}^{LP} \hat{l}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\epsilon_{pu}t/\hbar} \hat{l}_{\mathbf{k}} e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar} = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}^{LP} \hat{l}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{l}_{\mathbf{k}} = \epsilon^{LP}$ , con  $\epsilon^{LP}$  siendo la energía de los polaritones inferiores.

Podemos obtener la evolución temporal de estos nuevos operadores en el esquema de Heisenberg mediante su primera derivada temporal.

1. Para el operador de aniquilación de la Ec. [2.17](#)

$$\frac{d\hat{l}_{\mathbf{k}}}{dt} = \frac{d\hat{L}_{\mathbf{k}}}{dt} e^{i\epsilon_{pu}t/\hbar} + \frac{i\epsilon_{pu}}{\hbar} \hat{L}_{\mathbf{k}} e^{i\epsilon_{pu}t/\hbar}. \quad (2.21)$$

Pero sabemos que la evolución temporal de un operador lo podemos escribir en términos del operador Hamiltoniano de acuerdo a  $\dot{\hat{\alpha}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\alpha}]$ , por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{l}_{\mathbf{k}}}{dt} &= e^{i\epsilon_{pu}t/\hbar} \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{L}_{\mathbf{k}}] + \frac{i\epsilon_{pu}}{\hbar} e^{i\epsilon_{pu}t/\hbar} \hat{L}_{\mathbf{k}} \\ &= \frac{i}{\hbar} e^{i\epsilon_{pu}t/\hbar} \left( [\hat{H}, \hat{L}_{\mathbf{k}}] + \epsilon_{pu} \hat{L}_{\mathbf{k}} \right) \\ &= \frac{i}{\hbar} e^{i\epsilon_{pu}t/\hbar} \left( [\hat{H}, \hat{L}_{\mathbf{k}}] - \epsilon_{pu} (-\hat{L}_{\mathbf{k}}) \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Las reglas de conmutación son,

$$[\hat{b}_{\nu_j}^\dagger, \hat{b}_{\nu_k}^\dagger] = 0, \quad [\hat{b}_{\nu_j}, \hat{b}_{\nu_k}] = 0, \quad [\hat{b}_{\nu_j}, \hat{b}_{\nu_k}^\dagger] = \delta_{\nu_j, \nu_k}. \quad (2.23)$$

tal que,

$$\begin{aligned} [\hat{L}_{\mathbf{k}}, \hat{L}_{\mathbf{k}'}^\dagger] &= \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \\ [\hat{L}_{\mathbf{k}}, \hat{L}_{\mathbf{k}'}^\dagger] \hat{L}_{\mathbf{k}'} &= \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \hat{L}_{\mathbf{k}'} \\ (\hat{L}_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}'}^\dagger - \hat{L}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}}) \hat{L}_{\mathbf{k}'} &= \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \hat{L}_{\mathbf{k}'} \\ \hat{L}_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}'} - \hat{L}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}'} &= \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \hat{L}_{\mathbf{k}'} \end{aligned}$$

pero  $[\hat{L}_{\mathbf{k}}, \hat{L}_{\mathbf{k}'}] = 0 \Rightarrow \hat{L}_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}'} = \hat{L}_{\mathbf{k}'} \hat{L}_{\mathbf{k}}$ , entonces,

$$\hat{L}_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}'} - \hat{L}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}'} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \hat{L}_{\mathbf{k}'} \quad (2.25)$$

De ésta expresion identificamos que  $\hat{L}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}'}$  es el operador del número de ocupación del estado  $\nu_{\mathbf{k}'}$ . Haciendo la suma y reagrupando:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}'} (\hat{L}_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}'} - \hat{L}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}'}) &= \sum_{\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \hat{L}_{\mathbf{k}'}, \\ \left[ \hat{L}_{\mathbf{k}}, \sum_{\mathbf{k}'} \hat{L}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}'} \right] &= \hat{L}_{\mathbf{k}}, \\ \left[ \sum_{\mathbf{k}'} \hat{L}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}'}, \hat{L}_{\mathbf{k}} \right] &= -\hat{L}_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (2.26a)$$

así que la Ec. [2.22](#) la podemos reescribir como,

$$\dot{\hat{l}}_{\mathbf{k}} = \frac{i}{\hbar} e^{i\epsilon_{pu}t/\hbar} \left( [\hat{H}, \hat{L}_{\mathbf{k}}] - \epsilon_{pu} \left[ \sum_{\mathbf{k}'} \hat{L}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}'}, \hat{L}_{\mathbf{k}} \right] \right) \quad (2.27)$$

pero recordemos que  $\sum_{k'} \hat{L}_{k'}^\dagger \hat{L}_{k'} = \hat{N}$ , es el número total de polaritones inferiores en el sistema, entonces

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{l}}_k &= \frac{i}{\hbar} \left( [\hat{H}, \hat{l}_k] - \epsilon_{pu} [\hat{N}, \hat{l}_k] \right) \\
&= \frac{i}{\hbar} \left( \hat{H} \hat{l}_k - \hat{l}_k \hat{H} - \epsilon_{pu} \hat{N} \hat{l}_k + \epsilon_{pu} \hat{l}_k \hat{N} \right) \\
&= \frac{i}{\hbar} \left( (\hat{H} - \epsilon_{pu} \hat{N}) \hat{l}_k - \hat{l}_k (\hat{H} - \epsilon_{pu} \hat{N}) \right) \\
&= \frac{i}{\hbar} [\hat{H} - \epsilon_{pu} \hat{N}, \hat{l}_k] = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{l}_k].
\end{aligned} \tag{2.28}$$

2. Para el operador de aniquilación de la Ec. [2.17](#)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{l}_k^\dagger &= -\frac{i\epsilon_{pu}}{\hbar} e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar} \hat{L}_k^\dagger + e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar} \frac{d\hat{L}_k^\dagger}{dt} \\
&= \frac{i}{\hbar} e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar} [\hat{H}, \hat{L}_k^\dagger] - \frac{i}{\hbar} \epsilon_{pu} e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar} \hat{L}_k \\
&= \frac{i}{\hbar} e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar} \left( [\hat{H}, \hat{L}_k^\dagger] - \epsilon_{pu} \hat{L}_k^\dagger \right).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Y de acuerdo a las reglas de conmutación,

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{l}}_k^\dagger &= \frac{i}{\hbar} e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar} \left( [\hat{H}, \hat{L}_k^\dagger] - \epsilon_{pu} \left[ \sum_{k'} \hat{L}_{k'} \hat{L}_{k'}^\dagger, \hat{L}_k^\dagger \right] \right) \\
&= \frac{i}{\hbar} e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar} \left( [\hat{H}, \hat{L}_k^\dagger] - \epsilon_{pu} [\hat{N}, \hat{L}_k^\dagger] \right) \\
&= \frac{i}{\hbar} \left( [\hat{H}, \hat{l}_k^\dagger] - \epsilon_{pu} [\hat{N}, \hat{l}_k^\dagger] \right) \\
&= \frac{i}{\hbar} \left( \hat{H} \hat{l}_k^\dagger - \hat{l}_k^\dagger \hat{H} - \epsilon_{pu} \hat{N} \hat{l}_k^\dagger + \epsilon_{pu} \hat{l}_k^\dagger \hat{N} \right) \\
&= \frac{i}{\hbar} \left( (\hat{H} - \epsilon_{pu} \hat{N}) \hat{l}_k^\dagger - \hat{l}_k^\dagger (\hat{H} - \epsilon_{pu} \hat{N}) \right) \\
&= \frac{i}{\hbar} [\hat{H} - \epsilon_{pu} \hat{N}, \hat{l}_k^\dagger] = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{l}_k^\dagger].
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Podemos escribir un nuevo Hamiltoniano en términos de estos operadores al sustituir  $\hat{L}_k$  y  $\hat{L}_k^\dagger$ , tomando en cuenta el desplazamiento  $\hat{H} - \epsilon_{pu} \hat{N}$  que se obtuvo al hacer la evaluación temporal de los nuevos operadores de creación y aniquilación. Esta nueva representación del Hamiltoniano nos permite pasar al sistema de referencia del bombeo para que la referencia de energía esté dado por la frecuencia del bombeo, el cual será un parámetro libre [\[6\]](#). Para el primer término del Hamiltoniano,

$$\hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k = \hat{l}_k^\dagger e^{i\epsilon_{pu}t/\hbar} \hat{l}_k e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar} = \hat{l}_k^\dagger \hat{l}_k.$$

Para el segundo término del Hamiltoniano,

$$\begin{aligned}
\Omega_f \sin \theta_k \left( \hat{L}_k^\dagger F + \hat{L}_k F^* \right) &= \Omega_f \sin \theta_k \left( \hat{l}_k^\dagger e^{i\epsilon_{pu}t/\hbar} | F_{pu} \rangle e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar} + \hat{l}_k e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar} | F_{pu} \rangle e^{i\epsilon_{pu}t/\hbar} \right) \\
&= \Omega_f \sin \theta_k | F_{pu} \rangle \left( \hat{l}_k^\dagger + \hat{l}_k \right).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Para el último término,

$$\begin{aligned}\hat{L}_{k+q}^\dagger \hat{L}_{k'-q}^\dagger \hat{L}_{k'} \hat{L}_k &= \hat{l}_{k+q}^\dagger e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar} \hat{l}_{k'-q}^\dagger e^{-i\epsilon_{pu}t/\hbar} \hat{l}_{k'} e^{i\epsilon_{pu}t/\hbar} \hat{l}_k e^{i\epsilon_{pu}t/\hbar} \\ &= \hat{l}_{k+q}^\dagger \hat{l}_{k'-q}^\dagger \hat{l}_{k'} \hat{l}_k.\end{aligned}\quad (2.32)$$

Entonces, el nuevo Hamiltoniano es

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_k \left( \epsilon_k^{LP} - \epsilon_{pu} \right) \hat{l}_k^\dagger \hat{l}_k + \Omega_f \sin \theta_k | F_{pu} | \left( \hat{l}_k^\dagger + \hat{l}_k \right) \\ &\quad + \frac{g_{xx}}{2} \sum_{q,k,k'} \cos \theta_{k+q} \cos \theta_{k'-q} \cos \theta_{k'} \cos \theta_k \hat{l}_{k+q}^\dagger \hat{l}_{k'-q}^\dagger \hat{l}_{k'} \hat{l}_k.\end{aligned}\quad (2.33)$$

Ahora podemos descomponer el Hamiltoniano en el estado base,  $l_0^\dagger$ , y estados excitados  $l_q^\dagger$ , tomando en cuenta los siguientes casos para el intercambio de momento entre los excitones,

1.  $q = k = k' = 0$ ,
2.  $q \neq 0$ ,  $k = 0$ ,  $k' = q$ ,
3.  $q \neq 0$ ,  $k = -q$ ,  $k' = 0$ ,
4.  $q \neq 0$ ,  $k = q$ ,  $k' = q$ .

La razón por la cual queremos hacer una separación de los polaritones con momento cero es porque se quiere describir a los polaritones que forman parte del condensado de Bose-Einstein y pequeñas excitaciones sobre el condensado.

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_k \left[ \left( \epsilon_k^{LP} - \epsilon_{pu} \right) \hat{l}_k^\dagger \hat{l}_k + \Omega_f | F_{pu} | \sin \theta_k \left( \hat{l}_k^\dagger + \hat{l}_k \right) \right] + \frac{g_{xx}}{2} \cos^4 \theta_0 \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_0 + \\ &\quad + \frac{g_{xx}}{2} \cos^2 \theta_0 \sum_{q \neq 0} \left[ \cos^2 \theta_q \left( \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_q \hat{l}_0 + \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_q \right) + \cos^2 \theta_{-q} \left( \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_{-q} + \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_{-q} \hat{l}_0 \right) \right] + \\ &\quad + \cos \theta_q \cos \theta_{-q} \left( \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_0 \right).\end{aligned}\quad (2.34)$$

A continuación se usará el álgebra de conmutadores para bosones con el objetivo de poder obtener expresiones en las que los operadores correspondientes al momento cero sean fácilmente separables de los operadores para el momento  $q \neq 0$ .

$$\left[ \hat{l}_0, \hat{l}_0^\dagger \right] = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 = \hat{l}_0 \hat{l}_0^\dagger - 1, \text{ por lo tanto,}$$

$$\begin{aligned}\hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_0 &= \hat{l}_0^\dagger \left( \hat{l}_0 \hat{l}_0^\dagger - 1 \right) \hat{l}_0 \\ &= \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 - \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 \\ &= \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 \left( \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 - 1 \right).\end{aligned}\quad (2.35)$$

Por otra parte, para  $\hat{l}_q^\dagger \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_q \hat{l}_0 + \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_q$ , tenemos que,

$$\begin{aligned}\hat{l}_q^\dagger \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_q \hat{l}_0 + \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_q &= \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_q + \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q \hat{l}_0 \\ &= \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_q \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_0 + \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_q \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_0 \\ &= 2 \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q.\end{aligned}\quad (2.36)$$

De forma similar, para  $\hat{l}_0^\dagger \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_{-q} + \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_{-q} \hat{l}_0$ , obtenemos

$$\hat{l}_0^\dagger \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_{-q} + \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_{-q} \hat{l}_0 = 2 \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q}. \quad (2.37)$$

Si además consideramos que  $\cos \theta_q = \cos \theta_{-q}$ , entonces el Hamiltoniano se vuelve:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_k \left[ (\epsilon_k^{LP} - \epsilon_{pu}) \hat{l}_k^\dagger \hat{l}_k + \Omega_f |F_{pu}| \sin \theta_k (\hat{l}_k^\dagger + \hat{l}_k) \right] + \frac{g_{xx}}{2} \cos^4 \theta_0 \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_0 \hat{l}_0 + \\ &+ \frac{g_{xx}}{2} \cos^2 \theta_0 \sum_{q \neq 0} \left[ \cos^2 \theta_q (\hat{l}_q^\dagger \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_q \hat{l}_0 + \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_q) + \cos^2 \theta_{-q} (\hat{l}_0^\dagger \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_{-q} + \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_{-q} \hat{l}_0) \right] + \\ &+ \cos \theta_q \cos \theta_{-q} (\hat{l}_0^\dagger \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_0) \Big] \\ &= \sum_k \left[ (\epsilon_k^{LP} - \epsilon_{pu}) \hat{l}_k^\dagger \hat{l}_k + \Omega_f |F_{pu}| \sin \theta_k (\hat{l}_k^\dagger + \hat{l}_k) \right] + \frac{g_{xx}}{2} \cos^4 \theta_0 \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 (\hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 + 1) + \\ &+ \frac{g_{xx}}{2} \cos^2 \theta_0 \sum_{q \neq 0} \left[ 2 \cos^2 \theta_q \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q + 2 \cos^2 \theta_q \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q} + \cos^2 \theta_q (\hat{l}_0^\dagger \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_0) \right] \\ &= \sum_k \left[ (\epsilon_k^{LP} - \epsilon_{pu}) \hat{l}_k^\dagger \hat{l}_k + \Omega_f |F_{pu}| \sin \theta_k (\hat{l}_k^\dagger + \hat{l}_k) \right] + \frac{g_{xx}}{2} \cos^4 \theta_0 \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 (\hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 + 1) + \\ &+ \frac{g_{xx}}{2} \cos^2 \theta_0 \sum_{q \neq 0} \left[ 2 \cos^2 \theta_q \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 (\hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q + \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q}) + \cos^2 \theta_q (\hat{l}_0^\dagger \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_0) \right]. \quad (2.38) \end{aligned}$$

## 2.4. Aproximación de Bogoliubov

Ahora emplearemos la aproximación de Bogoliubov [16], la cual consiste en reemplazar los operadores de creación y aniquilación de momento cero por un campo medio dado por la densidad del condensado, en este caso, el condensado de polaritones,

$$\hat{l}_0 = \sqrt{n_{LP}}, \quad (2.39)$$

$$\hat{l}_0^\dagger = \sqrt{n_{LP}}, \quad (2.40)$$

que como podemos observar, hacemos el cambio de operadores a números reales. Y dado que

$$\hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 + \sum_{q \neq 0} \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q = n_{LP} \quad (2.41)$$

podemos hacer la siguiente aproximación,

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta_0 \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_0 \hat{l}_0 &\approx \cos^4 \theta_0 (n_{LP} - \sum_{q \neq 0} \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q) (n_{LP} - \sum_{q \neq 0} \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q}) \\ &= \cos^4 \theta_0 \left( n_{LP}^2 - n_{LP} \sum_{q \neq 0} (\hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q) \right) \quad (2.42) \end{aligned}$$

Sustituyendo en el Hamiltoniano de la Ec [2.38](#), obtenemos

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \sum_k \left[ (\epsilon_k^{LP} - \epsilon_{pu}) \hat{l}_k^\dagger \hat{l}_k + \Omega_f |F_{pu}| \sin \theta_k (\hat{l}_k^\dagger + \hat{l}_k) \right] + \\
&\quad \frac{g_{xx}}{2} \cos^4 \theta_0 \left( n_{LP}^2 - n_{LP} \sum_{q \neq 0} (\hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q) \right) + \\
&\quad + \frac{g_{xx}}{2} \cos^2 \theta_0 \sum_{q \neq 0} \left[ 2 \cos^2 \theta_q \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 (\hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q + \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q}) + \cos^2 \theta_q (\hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_q \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_0) \right] \\
&= \sum_k \left[ (\epsilon_k^{LP} - \epsilon_{pu}) \hat{l}_k^\dagger \hat{l}_k + \Omega_f |F_{pu}| \sin \theta_k (\hat{l}_k^\dagger + \hat{l}_k) \right] + \\
&\quad \frac{g_{xx}}{2} \cos^4 \theta_0 n_{LP}^2 - \frac{g_{xx}}{2} \cos^4 \theta_0 n_{LP} \sum_{q \neq 0} (\hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q) + \\
&\quad + \frac{g_{xx}}{2} \cos^2 \theta_0 \sum_{q \neq 0} \left[ 2 \cos^2 \theta_q \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 (\hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q + \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q}) + \cos^2 \theta_q (\hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_q \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_0) \right] \\
&= \sum_k \left[ (\epsilon_k^{LP} - \epsilon_{pu}) \hat{l}_k^\dagger \hat{l}_k + \Omega_f |F_{pu}| \sin \theta_k (\hat{l}_k^\dagger + \hat{l}_k) \right] + \\
&\quad \frac{g_{xx}}{2} \cos^4 \theta_0 n_{LP}^2 - g_{xx} \cos^2 \theta_0 n_{LP} \sum_{q \neq 0} \cos^2 \theta_q (\hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q) + \\
&\quad + \frac{g_{xx}}{2} \cos^2 \theta_0 \sum_{q \neq 0} \left[ 2 \cos^2 \theta_q \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 (\hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q + \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q}) + \cos^2 \theta_q (\hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_q \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_0 \hat{l}_0) \right] \\
&= \sum_k \left[ (\epsilon_k^{LP} - \epsilon_{pu}) \hat{l}_k^\dagger \hat{l}_k + \Omega_f |F_{pu}| \sin \theta_k (\hat{l}_k^\dagger + \hat{l}_k) \right] + \frac{g_{xx}}{2} \cos^4 \theta_0 n_{LP}^2 + \\
&\quad + \sum_{q \neq 0} \left\{ g_{xx} \cos^2 \theta_0 n_{LP} \cos^2 \theta_q (\hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q) + \frac{g_{xx}}{2} \cos^2 \theta_0 n_{LP} \cos^2 \theta_q (\hat{l}_q \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_{-q}^\dagger) \right\}.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Nos interesa tener al sistema en el estado base para la condensación de Bose-Einstein y pequeñas excitaciones en éste, por lo que separamos el Hamiltoniano en  $k = 0$  y  $k \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= (\epsilon_0^{LP} - \epsilon_{pu}) \hat{l}_0^\dagger \hat{l}_0 + \Omega_f |F_{pu}| \sin \theta_0 (\hat{l}_0^\dagger + \hat{l}_0) + \frac{g_{xx}}{2} \cos^4 \theta_0 n_{LP}^2 + \\
&\quad + \sum_{q \neq 0} \left\{ (\epsilon_q^{LP} - \epsilon_{pu}) \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q + \Omega_f |F_{pu}| \sin \theta_q (\hat{l}_q^\dagger + \hat{l}_q) + \right. \\
&\quad \left. (\epsilon_{-q}^{LP} - \epsilon_{pu}) \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q} + \Omega_f |F_{pu}| \sin \theta_{-q} (\hat{l}_{-q}^\dagger + \hat{l}_{-q}) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{q \neq 0} \left\{ g_{xx} \cos^2 \theta_0 n_{LP} \cos^2 \theta_q (\hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q) + \frac{g_{xx}}{2} \cos^2 \theta_0 n_{LP} \cos^2 \theta_q (\hat{l}_q \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_{-q}^\dagger) \right\}, \right.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Pero sabemos que la energía de los polaritones inferiores es cuadrática en los momentos, por lo tanto,  $\epsilon_q^{LP} = \epsilon_{-q}^{LP}$ . Y dado que se había considerado  $\cos \theta_q = \cos \theta_{-q}$ , entonces



$\sin \theta_q = \sin \theta_{-q}$ . Estos términos se tendrán que multiplicar por 1/2 para evitar la doble suma, de tal forma que,

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= (\epsilon_0^{LP} - \epsilon_{pu})n_{LP} + 2\sqrt{n_{LP}}\Omega_f |F_{pu}| \sin \theta_0 + \frac{g_{xx}}{2} \cos^4 \theta_0 n_{LP}^2 + \\
&+ \sum_{q \neq 0} \left\{ \frac{1}{2} (\epsilon_q^{LP} - \epsilon_{pu}) (\hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q + \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q}) + \frac{1}{2} \Omega_f |F_{pu}| \sin \theta_q (\hat{l}_q^\dagger + \hat{l}_q + \hat{l}_{-q}^\dagger + \hat{l}_{-q}) \right\} + \\
&+ \sum_{q \neq 0} \left\{ g_{xx} \cos^2 \theta_0 n_{LP} \cos^2 \theta_q (\hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q) + \frac{g_{xx}}{2} \cos^2 \theta_0 n_{LP} \cos^2 \theta_q (\hat{l}_q \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_{-q}^\dagger) \right\} \\
&= n_{LP} \left( \epsilon_0^{LP} - \epsilon_{pu} + \frac{g_{xx}}{2} n_{LP} \cos^4 \theta_0 \right) + 2\sqrt{n_{LP}} \Omega_f |F_{pu}| \sin \theta_0 + \\
&\sum_{q \neq 0} \left\{ \frac{1}{2} (\epsilon_q^{LP} - \epsilon_{pu} + 2g_{xx} \cos^2 \theta_0 n_{LP} \cos^2 \theta_q) (\hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q + \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q}) + \right. \\
&\left. + \frac{1}{2} \Omega_f |F_{pu}| \sin \theta_q (\hat{l}_q^\dagger + \hat{l}_q + \hat{l}_{-q}^\dagger + \hat{l}_{-q}) + \frac{g_{xx}}{2} n_{LP} \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_q (\hat{l}_q \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_{-q}^\dagger) \right\} \\
&= n_{LP} \left( \epsilon_0^{LP} - \epsilon_{pu} + \frac{g_{xx}}{2} n_{LP} \cos^4 \theta_0 \right) + 2\sqrt{n_{LP}} \Omega_f |F_{pu}| \sin \theta_0 + \\
&\frac{1}{2} \sum_{q \neq 0} \left\{ (\epsilon_q^{LP} - \epsilon_{pu} + 2g_{xx} n_{LP} \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_q) (\hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q + \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q}) + \right. \\
&\left. + g_{xx} n_{LP} \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_q (\hat{l}_q \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_{-q}^\dagger) + \Omega_f |F_{pu}| \sin \theta_q (\hat{l}_q^\dagger + \hat{l}_q + \hat{l}_{-q}^\dagger + \hat{l}_{-q}) \right\}. \tag{2.45}
\end{aligned}$$

Ahora vamos a renombrar algunas expresiones,

$$E^{(0)} = n_{LP} \left( \epsilon_0^{LP} - \epsilon_{pu} + \frac{1}{2} g_{xx} n_{LP} \cos^4 \theta_0 \right) + 2\sqrt{n_{LP}} \Omega_f |F_{PU}| \sin \theta_0, \tag{2.46a}$$

$$E_q^{(1)} = (\epsilon_q^{LP} - \epsilon_{pu}) + 2g_{xx} n_{LP} \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_q, \tag{2.46b}$$

$$E_q^{(2)} = g_{xx} n_{LP} \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_q, \tag{2.46c}$$

$$E_q^{(3)} = \Omega_f |F_{pu}| \sin \theta_q. \tag{2.46d}$$

De tal forma que el Hamiltoniano lo podemos reescribir como sigue,

$$\hat{H} = E^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{q \neq 0} \left\{ E_q^{(1)} (\hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q + \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q}) + E_q^{(2)} (\hat{l}_q^\dagger \hat{l}_{-q}^\dagger + \hat{l}_{-q} \hat{l}_q) + E_q^{(3)} (\hat{l}_q^\dagger + \hat{l}_q + \hat{l}_{-q}^\dagger + \hat{l}_{-q}) \right\}.$$

## 2.5. Transformación de Bogoliubov

Ahora vamos a desacoplar  $\hat{l}_q$  y  $\hat{l}_{-q}$ , mediante la transformación de Bogoliubov [14, 17, 12],

$$\hat{l}_q = u_q \hat{L}_q + v_q \hat{L}_{-q}^\dagger, \tag{2.47}$$

$$\hat{l}_{-q} = u_q \hat{L}_{-q} + v_q \hat{L}_q^\dagger \tag{2.48}$$

Cuyas reglas de conmutación obedecen las reglas de conmutación de Bose. Dentro de las cuales,

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_q, \hat{L}_q^\dagger] &= 1 = \hat{L}_q \hat{L}_q^\dagger - \hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q \\
&= (u_q \hat{l}_q + v_q \hat{l}_{-q}^\dagger) (u_q \hat{l}_q^\dagger + v_q \hat{l}_{-q}) - (u_q \hat{l}_q^\dagger + v_q \hat{l}_{-q}) (u_q \hat{l}_q + v_q \hat{l}_{-q}^\dagger) \\
&= u_q^2 \hat{l}_q \hat{l}_q^\dagger + u_q v_q \hat{l}_q \hat{l}_{-q} + u_q v_q \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_q^\dagger + v_q^2 \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q} + u_q^2 \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q - u_q v_q \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_{-q} - u_q v_q \hat{l}_{-q} \hat{l}_q - v_q^2 \hat{l}_{-q} \hat{l}_{-q}^\dagger \\
&= u_q^2 (\hat{l}_q \hat{l}_q^\dagger - \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q) + v_q^2 (\hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q} - \hat{l}_{-q} \hat{l}_{-q}^\dagger) + u_q v_q (\hat{l}_q \hat{l}_{-q} + \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_q^\dagger - \hat{l}_q^\dagger \hat{l}_{-q} - \hat{l}_{-q} \hat{l}_q),
\end{aligned} \tag{2.49}$$

pero de acuerdo a las reglas de conmutación de los operadores  $\hat{l}_q$  y  $\hat{l}_{-q}$ ,

$$[\hat{l}_{\nu_k}, \hat{l}_{\nu_j}] = 0, \quad [\hat{l}_{\nu_k}^\dagger, \hat{l}_{\nu_j}^\dagger] = 0, \quad [\hat{l}_{\nu_k}, \hat{l}_{\nu_k}^\dagger] = 1, \tag{2.50}$$

obtenemos finalmente que,

$$[\hat{L}_q, \hat{L}_q^\dagger] = u_q^2 - v_q^2 = 1, \tag{2.51}$$

donde  $u_k$  y  $v_k$  son los coeficientes de Bogoliubov. Ahora vamos a reescribir el Hamiltoniano en términos de los nuevos operadores  $\hat{L}_q$  y  $\hat{L}_{-q}$ . Para el segundo término del hamiltoniano,

$$\begin{aligned}
\hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q + \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q} &= (u_q \hat{L}_q^\dagger + v_q \hat{L}_{-q}) (u_q \hat{L}_q + v_q \hat{L}_{-q}^\dagger) + (u_q \hat{L}_{-q}^\dagger + v_q \hat{L}_q) (u_q \hat{L}_{-q} + v_q \hat{L}_q^\dagger) \\
&= u_q^2 \hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + u_q v_q \hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger + u_q v_q \hat{L}_{-q} \hat{L}_q + v_q^2 \hat{L}_{-q} \hat{L}_{-q}^\dagger + u_q^2 \hat{L}_{-q}^\dagger \hat{L}_{-q} + \\
&\quad + u_q v_q \hat{L}_{-q}^\dagger \hat{L}_q^\dagger + u_q v_q \hat{L}_q \hat{L}_{-q} + v_q^2 \hat{L}_q \hat{L}_q^\dagger \\
&= u_q^2 (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger \hat{L}_{-q}) + v_q^2 (\hat{L}_{-q} \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_q \hat{L}_q^\dagger) + \\
&\quad + u_q v_q (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q} \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger \hat{L}_q^\dagger + \hat{L}_q \hat{L}_{-q}),
\end{aligned} \tag{2.52}$$

pero  $[\hat{L}_{\nu_k}^\dagger, \hat{L}_{\nu_j}^\dagger] = 0$  y  $[\hat{L}_{\nu_k}, \hat{L}_{\nu_j}] = 0$ , entonces,

$$\hat{l}_q^\dagger \hat{l}_q + \hat{l}_{-q}^\dagger \hat{l}_{-q} = u_q^2 (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger \hat{L}_{-q}) + v_q^2 (\hat{L}_{-q} \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_q \hat{L}_q^\dagger) + 2u_q v_q (\hat{L}_q \hat{L}_{-q} + \hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger). \tag{2.53}$$

Para el tercer término del Hamiltoniano,

$$\begin{aligned}
\hat{l}_q^\dagger \hat{l}_{-q}^\dagger + \hat{l}_{-q} \hat{l}_q &= (u_q \hat{L}_q^\dagger + v_q \hat{L}_{-q}) (u_q \hat{L}_{-q}^\dagger + v_q \hat{L}_q) + (u_q \hat{L}_{-q} + v_q \hat{L}_q^\dagger) (u_q \hat{L}_q + v_q \hat{L}_{-q}^\dagger) \\
&= u_q^2 \hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger + u_q v_q \hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + u_q v_q \hat{L}_{-q} \hat{L}_{-q}^\dagger + v_q^2 \hat{L}_{-q} \hat{L}_q + \\
&\quad + u_q^2 \hat{L}_{-q} \hat{L}_q + u_q v_q \hat{L}_{-q} \hat{L}_{-q}^\dagger + u_q v_q \hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + v_q^2 \hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger \\
&= u_q^2 (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q} \hat{L}_q) + v_q^2 (\hat{L}_{-q} \hat{L}_q + \hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger) + \\
&\quad + u_q v_q (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + \hat{L}_{-q} \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q} \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q) \\
&= u_q^2 (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q} \hat{L}_q) + v_q^2 (\hat{L}_{-q} \hat{L}_q + \hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger) + 2u_q v_q (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + \hat{L}_{-q} \hat{L}_{-q}^\dagger) \\
&= (u_q^2 + v_q^2) (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q} \hat{L}_q) + 2u_q v_q (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + \hat{L}_{-q} \hat{L}_{-q}^\dagger). \tag{2.54}
\end{aligned}$$

Para el cuarto término del Hamiltoniano,

$$\begin{aligned}
\hat{l}_q^\dagger + \hat{l}_q + \hat{l}_{-q}^\dagger + \hat{l}_{-q} &= (u_q \hat{L}_q^\dagger + v_q \hat{L}_{-q}) + (u_q \hat{L}_{-q} + v_q \hat{L}_q) + (u_q \hat{L}_{-q}^\dagger + v_q \hat{L}_q) + (u_q \hat{L}_q + v_q \hat{L}_{-q}^\dagger) \\
&= u_q (\hat{L}_q^\dagger + \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q}) + v_q (\hat{L}_q^\dagger + \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q}) \\
&= (u_q + v_q) (\hat{L}_q^\dagger + \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q}). \tag{2.55}
\end{aligned}$$

De tal forma que el Hamiltoniano es

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= E^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{q \neq 0} \left\{ E_q^{(1)} \left[ u_q^2 (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger \hat{L}_{-q}) + v_q^2 (\hat{L}_{-q} \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_q \hat{L}_q) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2u_q v_q (\hat{L}_q \hat{L}_{-q} + \hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger) \right] E_q^{(2)} \left[ (u_q^2 + v_q^2) (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q} \hat{L}_q) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2u_q v_q (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + \hat{L}_{-q} \hat{L}_{-q}^\dagger) \right] + E_q^{(3)} \left[ (u_q + v_q) (\hat{L}_q^\dagger + \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q}) \right] \right\} \\
&= E^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{q \neq 0} \left\{ E_q^{(1)} \left[ u_q^2 (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger \hat{L}_{-q}) + v_q^2 (1 + \hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + 1 + \hat{L}_{-q}^\dagger \hat{L}_{-q}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2u_q v_q (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_q \hat{L}_{-q}) \right] + E_q^{(2)} \left[ (u_q^2 + v_q^2) (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q} \hat{L}_q) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2u_q v_q (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + \hat{L}_{-q} \hat{L}_{-q}^\dagger) \right] + E_q^{(3)} \left[ (u_q + v_q) (\hat{L}_q^\dagger + \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q}) \right] \right\}. \tag{2.56}
\end{aligned}$$

En el segundo término del Hamiltoniano usaremos que,  $[\hat{L}_\nu, \hat{L}_\nu^\dagger] = 1$ ,

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= E^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{q \neq 0} \left\{ E_q^{(1)} \left[ u_q^2 (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger \hat{L}_{-q}) + 2v_q^2 + v_q^2 (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger \hat{L}_{-q}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2u_q v_q (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_q \hat{L}_{-q}) \right] + E_q^{(2)} \left[ (u_q^2 + v_q^2) (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q} \hat{L}_q) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2u_q v_q (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + \hat{L}_{-q} \hat{L}_{-q}^\dagger) \right] + E_q^{(3)} \left[ (u_q + v_q) (\hat{L}_q^\dagger + \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q}) \right] \right\} \\
&= E^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{q \neq 0} 2E_q^{(1)} v_q^2 + \frac{1}{2} \sum_{q \neq 0} \left\{ E_q^{(1)} \left[ (u_q^2 + v_q^2) (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger \hat{L}_{-q}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2u_q v_q (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_q \hat{L}_{-q}) \right] + E_q^{(2)} \left[ (u_q^2 + v_q^2) (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q} \hat{L}_q) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2u_q v_q (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + \hat{L}_{-q} \hat{L}_{-q}^\dagger) \right] + E_q^{(3)} \left[ (u_q + v_q) (\hat{L}_q^\dagger + \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q}) \right] \right\}. \quad (2.57)
\end{aligned}$$

Usando nuevamente las reglas de conmutación de los operadores podemos reescribir el Hamiltoniano como sigue

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= E^{(0)} + \sum_{q \neq 0} E_q^{(1)} v_q^2 + \frac{1}{2} \sum_{q \neq 0} \left\{ E_q^{(1)} \left[ (u_q^2 + v_q^2) (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger \hat{L}_{-q}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2u_q v_q (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_q \hat{L}_{-q}) \right] + E_q^{(2)} \left[ (u_q^2 + v_q^2) (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q} \hat{L}_q) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2u_q v_q (\hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + 1 + \hat{L}_{-q}^\dagger \hat{L}_{-q}) \right] + E_q^{(3)} \left[ (u_q + v_q) (\hat{L}_q^\dagger + \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q}) \right] \right\}. \quad (2.58)
\end{aligned}$$

Ahora podemos agrupar en términos semejantes,

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= E^{(0)} + \sum_{q \neq 0} \left( E_q^{(1)} v_q^2 + E_q^{(2)} u_q v_q \right) + \frac{1}{2} \sum_{q \neq 0} \left\{ \left[ E_q^{(1)} (u_q^2 + v_q^2) + 2E_q^{(2)} u_q v_q \right] \left[ \hat{L}_q^\dagger \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger \hat{L}_{-q} \right] + \right. \\
&\quad \left. \left[ 2E_q^{(1)} u_q v_q + E_q^{(2)} (u_q^2 + v_q^2) \right] \left[ \hat{L}_q^\dagger \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_q \hat{L}_{-q} \right] + E_q^{(3)} \left[ (u_q + v_q) (\hat{L}_q^\dagger + \hat{L}_q + \hat{L}_{-q}^\dagger + \hat{L}_{-q}) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Para remover los términos cruzados  $\hat{l}_q^\dagger \hat{l}_{-q} + \hat{l}_q \hat{l}_{-q}$  hacemos

$$E_q^{(2)} (u_q^2 + v_q^2) + 2E_q^{(1)} u_q v_q = 0. \quad (2.59)$$

Ésta última expresión la podemos reescribir usando la Ec. 2.51 como sigue

$$\begin{aligned}
E_q^{(2)} (1 + 2v_q^2) &= -2E_q^{(1)} \sqrt{1 + v_q^2} v_q \\
(E_q^{(2)})^2 (1 + 2v_q^2)^2 &= 4(E_q^{(1)})^2 (1 + v_q^2) v_q^2 \\
(E_q^{(2)})^2 + 4v_q^2 (E_q^{(2)})^2 (1 + v_q^2) - 4v_q^2 (E_q^{(1)})^2 (1 + v_q^2) &= 0 \\
(E_q^{(2)})^2 + 4v_q^2 (1 + v_q^2) \left[ (E_q^{(2)})^2 - (E_q^{(1)})^2 \right] &= 0. \quad (2.60)
\end{aligned}$$

Ahora vamos a solucionar para  $v_q^2$ ,

$$(v_q^2)^2 + v_q^2 - \frac{(E_q^{(2)})^2}{4 \left[ (E_q^{(1)})^2 - (E_q^{(2)})^2 \right]} = 0. \quad (2.61)$$

Reconocemos esta expresión como una ecuación cuadrática, cuya solución es bien conocida. Tomaremos sólo los valores positivos,

$$v_q^2 = \frac{E_q^{(1)}}{2 E_q^{BEC}} - \frac{1}{2}, \quad (2.62)$$

donde  $E_q^{BEC}$  es el espectro de Bogoliubov  $\sqrt{(E_q^{(1)})^2 - (E_q^{(2)})^2}$ . Entonces el primer coeficiente de Bogoliubov es

$$v_q = -\sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{E_q^{(1)}}{E_q^{BEC}} - 1 \right)}. \quad (2.63)$$

Y de acuerdo a la Ec. [2.51](#) el segundo coeficiente de Bogoliubov es

$$u_q = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{E_q^{(1)}}{E_q^{BEC}} + 1 \right)}. \quad (2.64)$$

De forma explícita,

$$u_q = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{(\epsilon_q^{LP} - \epsilon_{pu}) + 2g_{xx}n_{LP} \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_q}{E_q^{BEC}} + 1 \right)}, \quad (2.65)$$

$$v_q = -\sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{(\epsilon_q^{LP} - \epsilon_{pu}) + 2g_{xx}n_{LP} \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_q}{E_q^{BEC}} - 1 \right)}, \quad (2.66)$$

con

$$\begin{aligned} E_q^{BEC} &= \pm \sqrt{(E_q^{(1)})^2 - (E_q^{(2)})^2} \\ &= \pm \sqrt{\left( (\epsilon_q^{LP} - \epsilon_{pu}) + 2g_{xx}n_{LP} \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_q \right)^2 - (g_{xx}n_{LP} \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_q)^2}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

De acuerdo a este resultado, habrá dos ramas de energía para el espectro de Bogoliubov, una positiva (Rama Normal) correspondiente al signo positivo, y otra negativa (Rama Fantasma) correspondiente al signo negativo, respecto a la energía de condensación [\[12\]](#). La rama fantasma puede servir como una prueba directa de fluctuaciones cuánticas en el condensado, pues corresponde a la emisión de fotones asociada a la creación de excitaciones reales de Bogoliubov que están relacionadas al proceso del escape de los fotones de la microcavidad [\[6\]](#). Usualmente la rama fantasma no se puede medir, pero en el caso de los polaritones es posible porque se relaciona con el potencial químico.

### 3. Espectro de Bogoliubov

En los diagramas siguientes se muestra el espectro de Bogoliubov para los polaritones inferior y superior, con energía positiva y negativa. Se hizo una variación en los parámetros

$\delta_{\mathbf{k}}$  (desintonización),  $g_{xx}n_{LP}$  (interacciones) y  $\epsilon_{pu}$  (frecuencia del bombeo) para entender cómo es que las propiedades del sistema cambian con las variaciones de estos parámetros. Este análisis diagramático del espectro de Bogoliubov para los polaritones fue estudiado anteriormente por Carusotto et al. [14] y Ciuti et al. [6]. En este caso se tomó  $m_x = 1.0$  como la masa efectiva del excitón y  $m_c = 0.01$  la masa efectiva del fotón. La energía de interacción del condensado (potencial químico) es función de la interacción de los excitones  $g_{xx}$  y de la densidad de los polaritones  $n_{LP}$ , donde  $g_{xx}n_{LP}$  será tomado como un parámetro de estudio.

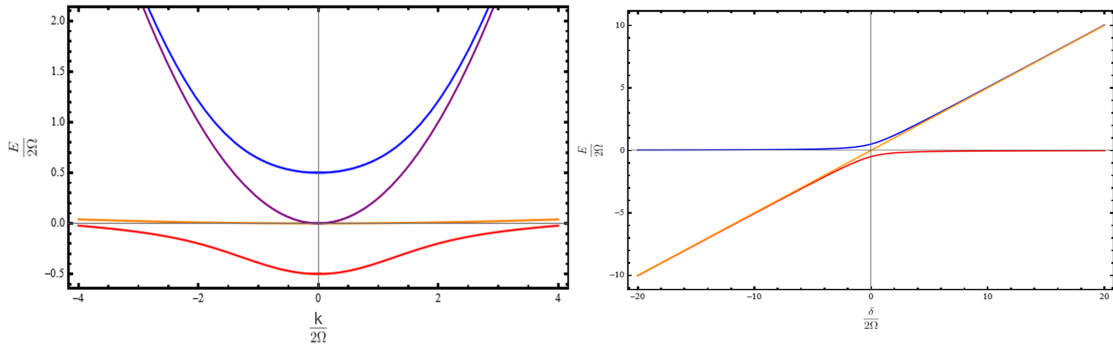


Figura 2: Se muestra el espectro de los polaritones superiores (azul) e inferiores (rojo) sin interacciones materiales con una normalización de  $2\Omega$ . Se ha tomado la masa efectiva del excitón como  $m_x = 1.0$  y la masa efectiva del fotón como  $m_c = 0.01$ . (Izquierda) La energía del excitón (anaranjado) y del fotón (morado), variando el momento  $k$ . (Derecha) Espectro como del fotón (anaranjado) y del excitón (negro), variando el parámetro  $\delta = \delta_0$ .

De la Fig. 2 podemos observar el comportamiento en la energía de los polaritones cuando el fotón y el excitón interactúan. La brecha entre los polaritones es  $2\Omega$ , donde  $\Omega$  es el acoplamiento luz-materia. Este comportamiento de repulsión [11] entre los niveles de energía es un resultado de la mezcla de estados, pues recordemos que los polaritones son la superposición de luz y materia. Del lado izquierdo vemos la variación respecto al momento  $|\mathbf{k}|$ . Por otra parte, el lado derecho nos muestra el comportamiento de los polaritones cuando el parámetro de variación es  $\delta_0 = \epsilon_{c,0} - \epsilon_{x,0}$ , es decir, para momento cero. Vemos que cuando  $\delta_0 \leq 0$ , es decir, cuando la energía del excitón es mayor que la energía del fotón, el polaritón inferior tiende a comportarse como la luz, mientras que el polaritón superior se comporta como el excitón, es decir, como materia. Y cuando  $\delta_0 \geq 0$ , es decir, la energía del fotón es mayor que la energía del excitón, entonces el comportamiento del polaritón inferior tiende al excitón y el comportamiento del polaritón superior tiende al comportamiento del fotón. Esta figura, en específico, nos permite ver la naturaleza dual de los polaritones.

La Fig. 3 muestra la variación de los coeficientes de Hopfield respecto a  $\delta$  tomando  $|\mathbf{k}| = 0$ . Recordemos que los coeficientes de Hopfield son los que permiten determinar la fracción fotónica o excitónica de los polaritones [6]. Vemos que cuando  $\delta_k \approx 0$  tenemos un estado completamente mezclado. Sin embargo cuando  $\delta_0$  es suficientemente grande o pequeño entonces recuperamos al excitón o al fotón. En el caso de  $C_{\mathbf{k}}^2$  cuando  $\delta < 0$  se aproxima al excitón y si  $\delta > 0$  entonces se aproxima al fotón. Lo contrario ocurre para

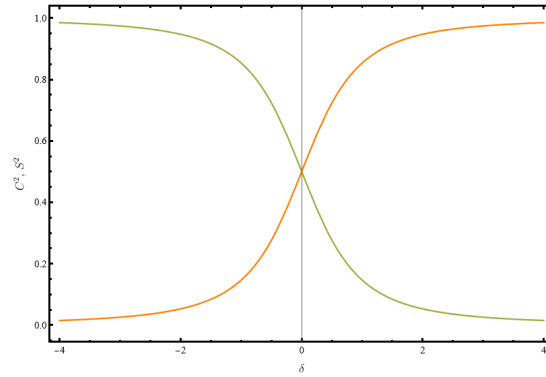


Figura 3: Coeficientes de Hopfield  $C_{\mathbf{k}}^2$  (anaranjado) y  $S_{\mathbf{k}}^2$  (verde) variando  $\delta =$  con  $k = 0$ .

$S_{\mathbf{k}}^2$ , que para  $\delta < 0$  se aproxima al fotón y para  $\delta > 0$  se aproxima al excitón.

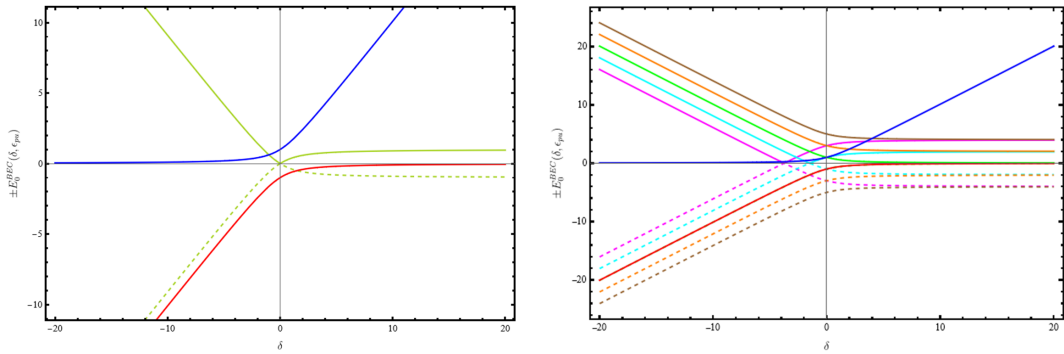


Figura 4: Se muestra el espectro de Bogoliubov sin condensación, es decir,  $g_{xx} n_{lp} = 0.0$ , variando  $\delta = \delta_0$ , así como el espectro de los polaritones superiores (azul) e inferiores (rojo) sin interacción material. (Izquierda) La curva verde continua corresponde a la brecha positiva del espectro, mientras que la línea punteada corresponde a la brecha negativa del espectro, para un bombeo  $\epsilon_{pu} = -1$ . (Derecha) Se observan los diferentes espectros, tanto positivos (líneas continuas) como negativos (líneas punteadas), con una variación en el potencial químico cambiando la frecuencia de bombeo correspondientes a  $\epsilon_{pu} = -4, -2, 0, 2, 4$ .

En la Fig. 4 se muestra el espectro de Bogoliubov sin condensación, es decir  $g_{xx} n_{LP} = 0$ . Se ha tomado  $m_x = 1.0$  y  $m_c = 0.01$  como en el caso de la Fig. 4. Las curvas continuas corresponde a las brechas normales o positivas y las curvas punteadas corresponden a las brechas fantasmas. Y como se puede observar en algunos casos la brecha positiva está en contacto con la brecha negativa, lo que corresponde a una anomalía pues hace que el comportamiento sea lineal. Además, no hay parte imaginaria de las brechas, por lo tanto no hay puntos inestables aún cuando la intensidad del bombeo de fotones se incremente. En este caso se está mostrando cuando hay interacción y cuando no.

En lo que sigue, Fig. 5 se muestra el caso de condensación con una energía de interacción dada por  $g_{xx} n_{LP} = 1$  fija, mientras que la frecuencia de bombeo se varía con  $\epsilon_{pu}$  tomando valores  $\epsilon_{pu} = -4$  (arriba),  $\epsilon_{pu} = -1$  (medio) y  $\epsilon_{pu} = 4$  (abajo). Se muestra que para  $\epsilon_{pu} = -4, -2$  la brecha positiva toca a la brecha negativa en algunos puntos donde  $\delta \neq 0$ ,

lo cual, como se mencionó anteriormente, representa un comportamiento anómalo.

Ahora bien, manteniendo  $g_{xx} n_{LP} = 1$  y  $\delta = \delta_0$ , pero con  $\epsilon_{pu} = 2$  como se muestra en la Fig. 6 (izquierda) vemos que la brecha positiva, curva continua, y negativa, curva punteada, se han aplanado en una región, en la que coinciden, y este comportamiento no tiene un análogo en sistemas en equilibrio [6]. Además, vemos sus partes imaginarias (derecha) que para el caso de la brecha positiva, su parte imaginaria corresponde a la curva negra continua, que, como vemos es positiva, lo que indica que corresponde a puntos inestables. Esta inestabilidad proviene del hecho de que la rama fantasma entra a la región real, por lo que la curva de la dispersión cambia y por conservación de la energía se esperan partículas en la brecha fantasma [11], es decir, el decaimiento de un polaritón en un excitón y la emisión de un fotón. Por otra parte en la Fig. 7 vemos que las brechas positivas y negativas se han convertido en imaginarias (derecha), lo que nos indica que hay puntos de inestabilidad [6].

Entonces hemos visto que al variar algunos parámetros el espectro de Bogoliubov puede tener cambios significantes como que las partes imaginarias de las brechas tomen valores positivos lo que implica inestabilidades paramétricas tal como lo describen Ciuti y Carusotto [6].



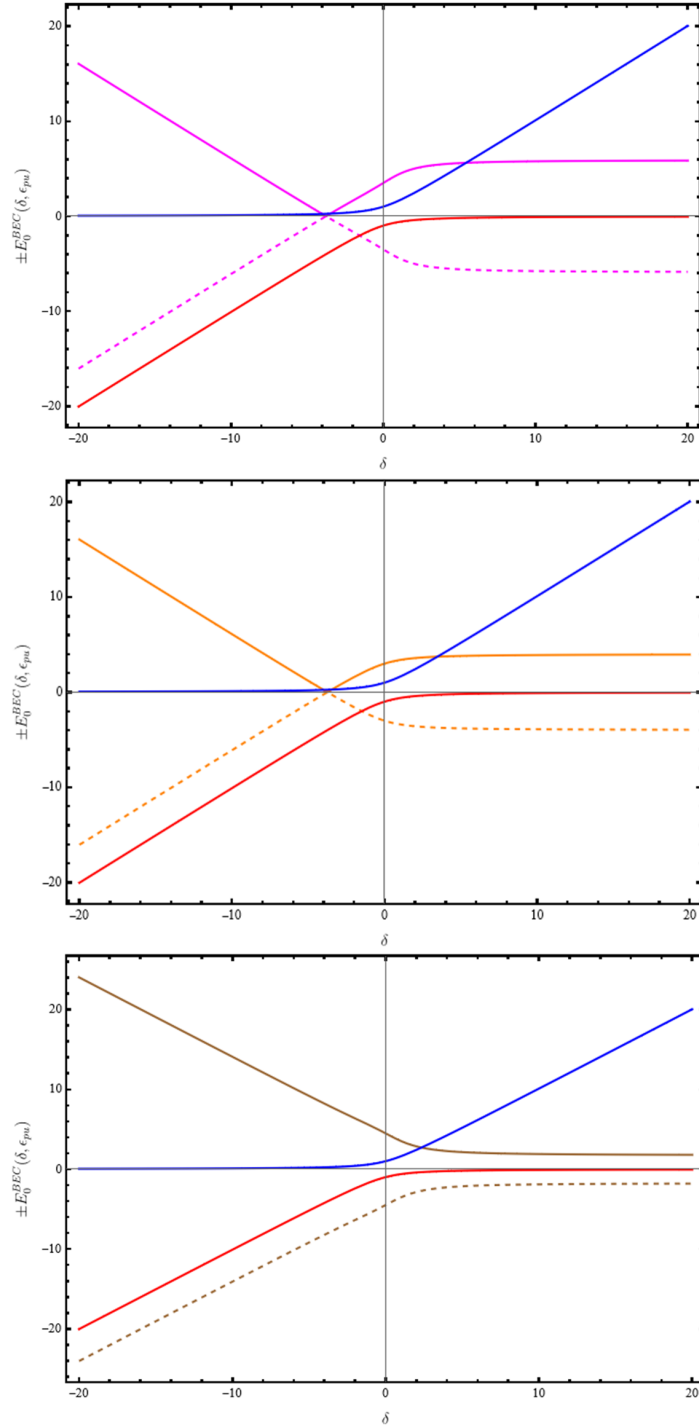


Figura 5: Espectro de Bogoliubov para la condensación con  $g_{xx} n_{lp} = 1.0$  fija y  $\delta = \delta_0$ . Se muestran los espectros de los polaritones superiores (azul) e inferiores (rojo) sin interacción material. La variación ocurre en el potencial químico al cambiar la frecuencia de bombeo  $\epsilon_{pu} = -4.0$  (arriba),  $\epsilon_{pu} = -1$  (medio) y  $\epsilon_{pu} = 4$  (abajo).

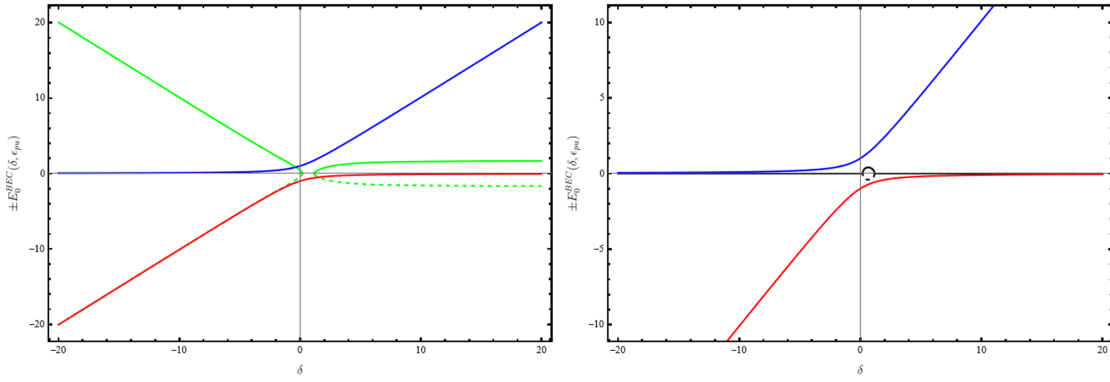


Figura 6: Espectro de Bogoliubov con  $g_{xx} n_{lp} = 1.0$  y  $\epsilon_{pu} = 0.0$  variando  $\delta = \delta_0$ . Se muestra el espectro de los polaritones superiores (azul) e inferiores (rojo) sin interacción material. (Izquierda) Parte real de la brecha normal, curva continua, y de la brecha fantasma, curva punteada. (Derecha) Parte imaginaria de la brecha normal, curva continua, y fantasma, curva punteada.

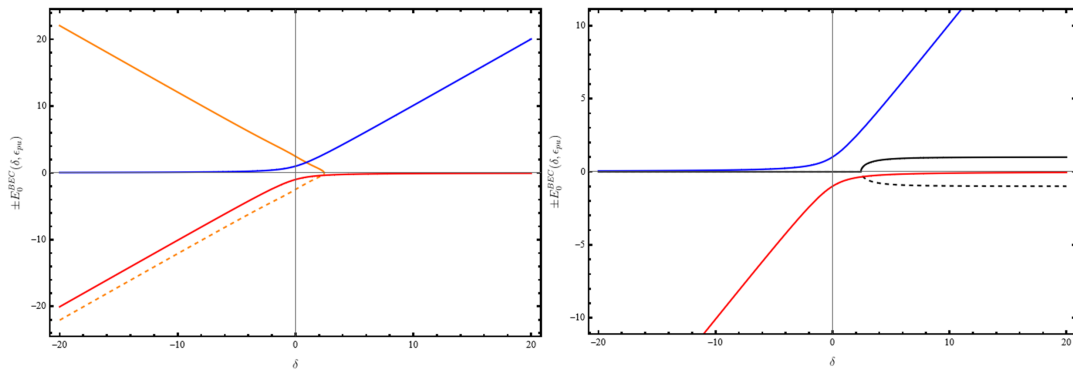


Figura 7: Lo mismo que en la Fig. 6 pero con  $\epsilon_{pu} = 2$ .

## 4. Conclusiones

Se obtuvo el espectro de Bogoliubov mediante una aproximación Hamiltoniana no hermitiana (para incluir la disipación de los excitones a partir de un número complejo). Se estudió el espectro como función de los parámetros de interacción de los excitones, desintonización y bombeo, lo cual permitió la identificación de características exóticas que surgen de los efectos fuera de equilibrio, es decir, tanto la disipación como el cambio en el potencial químico debido al bombeo. El trabajo futuro consiste en emplear las energías de Bogoliubov para describir el propagador de un polaritón en el condensado de Bose-Einstein de forma completa tomando en cuenta las ramas inferiores y superiores.

## Referencias

- [1] Hui Deng, Gregor Weihs, David Snoke, Jacqueline Bloch, and Yoshihisa Yamamoto. Polariton lasing vs. photon lasing in a semiconductor microcavity. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 100(26):15318–15323, 2003.
- [2] Pierre Meystre and Murray Sargent. *Elements of quantum optics*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [3] Bo Han, Cédric Robert, Emmanuel Courtade, Marco Manca, Shivangi Shree, Thierry Amand, Pierre Renucci, Takashi Taniguchi, Kenji Watanabe, Xavier Marie, et al. Exciton states in monolayer mose 2 and mote 2 probed by upconversion spectroscopy. *Physical Review X*, 8(3):031073, 2018.
- [4] MA Bastarrachea-Magnani, A Camacho-Guardian, M Wouters, and GM Bruun. Strong interactions and biexcitons in a polariton mixture. *Physical Review B*, 100(19):195301, 2019.
- [5] JJ Hopfield. Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant of crystals. *Physical Review*, 112(5):1555, 1958.
- [6] Cristiano Ciuti and Iacopo Carusotto. Quantum fluid effects and parametric instabilities in microcavities. *physica status solidi (b)*, 242(11):2224–2245, 2005.
- [7] Alexey V Kavokin, Alexandra S Sheremet, Ivan A Shelykh, Pavlos G Lagoudakis, and Yuri G Rubo. Exciton-photon correlations in bosonic condensates of exciton-polaritons. *Scientific reports*, 5(1):1–8, 2015.
- [8] Christopher J Pethick and Henrik Smith. *Bose–Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge university press, 2008.
- [9] N Zettili. *Quantum mechanics concepts and applications*: John wiley & sons ltd uk. 2009.
- [10] Jacek Kasprzak, Murielle Richard, S Kundermann, A Baas, P Jeambrun, Jonathan Mark James Keeling, FM Marchetti, MH Szymańska, R André, JL Staehli, et al. Bose–einstein condensation of exciton polaritons. *Nature*, 443(7110):409–414, 2006.
- [11] Verena Kohnle, Yoan Léger, Michiel Wouters, Maxime Richard, MT Portella-Oberli, and B Deveaud. Four-wave mixing excitations in a dissipative polariton quantum fluid. *Physical Review B*, 86(6):064508, 2012.
- [12] Maciej Pieczarka, Eliezer Estrecho, Maryam Boozarjmehr, Olivier Bleu, Mark Steger, Kenneth West, Loren N Pfeiffer, David W Snoke, Jesper Levinsen, Meera M Parish, et al. Observation of quantum depletion in a non-equilibrium exciton–polariton condensate. *Nature communications*, 11(1):1–7, 2020.
- [13] Yueh-Nan Chen, Neill Lambert, and Franco Nori. Detecting bose-einstein condensation of exciton-polaritons via electron transport. *Physical Review B*, 80(23):235335, 2009.

- 
- [14] Iacopo Carusotto and Cristiano Ciuti. Quantum fluids of light. *Reviews of Modern Physics*, 85(1):299, 2013.
- [15] D Snoke, S Denev, Y Liu, L Pfeiffer, and K West. Long-range transport in excitonic dark states in coupled quantum wells. *Nature*, 418(6899):754–757, 2002.
- [16] N Bogoliubov. On the theory of superfluidity. *J. Phys*, 11(1):23, 1947.
- [17] LV Keldysh and AN Kozlov. Collective properties of excitons in semiconductors. *Sov. Phys. JETP*, 27(3):521, 1968.
- [18] Pavel Cejnar, Pavel Stránský, Michal Macek, and Michal Kloc. Excited-state quantum phase transitions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 54(13):133001, 2021.
- [19] Alexander L Fetter and John Dirk Walecka. *Quantum theory of many-particle systems*. Courier Corporation, 2012.
- [20] Henrik Bruus and Karsten Flensberg. *Many-body quantum theory in condensed matter physics: an introduction*. OUP Oxford, 2004.
- [21] J Ginibre. On the asymptotic exactness of the bogoliubov approximation for many boson systems. *Communications in Mathematical Physics*, 8(1):26–51, 1968.