



TEORÍA DE BOGOLIUBOV PARA LA CONDENSACIÓN DE EXCITONES-POLARITONES

Autor:

Areli Jael Vega Carmona

Asesor:

Dr. Miguel Angel Bastarrachea Magnani

PROYECTO TERMINAL II: INVESTIGACIÓN TEÓRICA
CLAVE 2111109. TRIMESTRE 22-I.

Licenciatura en Física
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
29 de Junio 2022

Índice

1. Introducción	2
1.1. Segunda cuantización y teoría cuántica de campos	2
1.2. Función de Green	4
2. Energía de un condensado de Bose-Einstein	7
3. Espectro de un sistema de excitones-polaritones	17
4. BEC de excitones-polaritones	19
4.1. Energía del espectro de Bogoliubov de un BEC de polaritones inferiores	20
4.2. Función de Green de Bogoliubov para la condensación de excitones-polaritones	22
5. Conclusión	26
A. Reglas de Feynman en espacio de momento	27
Bibliografía	28

1. Introducción

Los excitones son cuasipartículas que consisten en un par ligado de un electrón en la banda de conducción y un agujero en la banda de valencia de un semiconductor [1]. Surgen gracias a la excitación colectiva de los electrones en la banda de valencia de un semiconductor que ha sido bombeado por medios ópticos dentro de una microcavidad. Sin embargo, cuando los excitones del semiconductor se acoplan fuertemente con los fotones dentro de una microcavidad se da origen a nuevas cuasipartículas llamadas excitones-polaritones [2, 3, 4] que son una mezcla de luz y materia [5].

Por otra parte, el bombeo óptico produce una densidad finita de excitones-polaritones, que al ser considerados como un gas diluido de bosones, permite la existencia de cierta temperatura en la cual una fracción de las partículas ocupa el mismo estado de mínima energía [6]. Este fenómeno denominado condensación de Bose-Einstein (BEC) fue predicho teóricamente en 1920, primero por Bose quien estudió la estadística de los fotones y posteriormente por Einstein quien consideró el gas diluido de bosones [6]. En cuanto a los excitones-polaritones, éstos logran la condensación de Bose-Einstein a temperaturas de siete órdenes de magnitud, en Kelvin, superior a las requeridas, por ejemplo, para el hidrógeno [1], debido a su ligera masa efectiva de su parte fotónica y a las interacciones coulombianas repulsivas de su parte excitónica [7]. Estas propiedades proporcionan las bases para estudiar los fluidos cuánticos de luz [8].

Tradicionalmente, los condensados de Bose-Einstein de excitones-polaritones se describen mediante teorías de campo medio [3]. Sin embargo, el progreso experimental sobre las interacciones fuertes exige mejores aproximaciones teóricas. Por ello surge la necesidad de emplear técnicas avanzadas tales como la teoría cuántica de campos, segunda cuantización y funciones de Green.

A propósito, en mi Proyecto Terminal I se estudió el espectro de un condensado de Bose-Einstein mediante una aproximación Hamiltoniana no hermitiana, mientras que en éste Proyecto Terminal se propone usar el método de la función de Green dado que permite combinar las propiedades del condensado de Bose-Einstein y todas las ramas polaritónicas así como incluir los efectos de interacciones fuertes. Es por esto que tuve que aprender el uso de la función de Green y la teoría cuántica de campos. Así pues como resultado se obtuvieron las ramas polaritónicas combinadas.

1.1. Segunda cuantización y teoría cuántica de campos

Cuando se quiere hacer una descripción de un sistema de muchos cuerpos interactuantes surge la necesidad de emplear métodos más eficientes, dado que, si bien la función de onda de N cuerpos contiene toda la información del sistema, es impráctico querer obtener la solución de la ecuación de Schrödinger [9]. La segunda cuantización, también llamada más apropiadamente representación del número de ocupación [10], es la formulación que permite representar la mecánica cuántica de sistemas de muchos cuerpos de forma eficiente y comprensiva y constituye el marco en el que la teoría cuántica de campos fue construida [11].

Una simplificación que se obtiene de la representación del número de ocupación es pasar contar el número de partículas en cada estado de un conjunto completo de estados de una sola partícula [9] a contar el número de partículas en el mismo estado $|\nu\rangle$ [10]. Para realizar esto se hace uso de vectores abstractos [9] que forman una base del sistema de N cuerpos [10] de la forma

$$|n_1 n_2 n_3 \dots\rangle \quad (1.1)$$

tal que

$$\sum_j n_j = N. \quad (1.2)$$

Para ser completa ésta base debe satisfacer las condiciones de ortogonalidad

$$\langle n'_1 n'_2 \dots | n_1 n_2 \dots \rangle = \delta_{n'_1 n_1} \delta_{n'_2 n_2} \dots, \quad (1.3)$$

y completitud

$$\sum_{n_1 n_2 \dots} |n_1 n_2 \dots\rangle \langle n'_1 n'_2 \dots| = 1. \quad (1.4)$$

Además, se define el operador de número de ocupación \hat{n}_j , tal que

$$\hat{n}_j |n_j\rangle = n_j |n_j\rangle, \quad (1.5)$$

donde n_j son sus eigenvalores y $|n_j\rangle$ su eigenestados. Por otra parte, se introducen los operadores de aniquilación y creación, \hat{b}_k y \hat{b}_k^\dagger , cuya algebra es

$$[\hat{b}_j^\dagger, \hat{b}_k^\dagger] = 0 \quad [\hat{b}_j, \hat{b}_k] = 0 \quad [\hat{b}_j, \hat{b}_k^\dagger] = \delta_{jk}, \quad (1.6)$$

tal que $\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j = \hat{n}_j$, de tal forma que

$$\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j |n_j\rangle = n_j |n_j\rangle \quad (1.7)$$

$$\hat{b}_j |n_j\rangle = \sqrt{n_j} |n_j - 1\rangle \quad (1.8)$$

$$\hat{b}_j^\dagger |n_j\rangle = \sqrt{n_j + 1} |n_j + 1\rangle \quad (1.9)$$

y entonces el nuevo vector abstracto resulta ser el producto de los vectores individuales,

$$|n_1 n_2 \dots\rangle = |n_1\rangle |n_2\rangle \dots \quad (1.10)$$

Ahora bien, en la segunda cuantización se definen los operadores de campos cuánticos $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ y $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ cuyo significado físico de $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ es la suma de todas las formas posibles de añadir una partícula al sistema en la posición \mathbf{r} a través de cualquiera de los estados base [10]. Estos operadores están definidos en cada punto del espacio por eso se les llama operadores de campos cuánticos. Su regla de conmutación para el caso de bosones es

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}_1), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_2)] = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (1.11)$$

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}_1), \hat{\Psi}(\mathbf{r}_2)] = 0 \quad (1.12)$$

$$[\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_1), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_2)] = 0 \quad (1.13)$$

La relación de estos operadores de campos cuánticos con los operadores de creación y aniquilación es

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) \equiv \sum_j \psi_j(\mathbf{r}) \hat{b}_j \quad (1.14)$$

$$\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \equiv \sum_j \psi_j^\dagger(\mathbf{r}) \hat{b}_j^\dagger, \quad (1.15)$$

donde $\psi_j(\mathbf{r})$ es la función de onda ordinaria de la primera cuantización. Los operadores como el Hamiltoniano, energía cinética, espín, densidad y corriente se pueden escribir en términos de los operadores de campos cuánticos, de forma general

$$\hat{T} = \sum_{j,k} \left(\int d\mathbf{r} \psi_j^*(\mathbf{r}) T_{\mathbf{r}} \psi_k(\mathbf{r}) \right) \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_k \quad (1.16)$$

$$= \int d\mathbf{r} \left(\sum_i \psi_i^*(\mathbf{r}) \hat{b}_i^\dagger \right) T_{\mathbf{r}} \left(\sum_j \psi_j(\mathbf{r}) \hat{b}_j \right) = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) T_{\mathbf{r}} \hat{\Psi}(\mathbf{r}). \quad (1.17)$$

1.2. Función de Green

Por lo que se refiere a la función de Green, también conocida como propagador, brinda la información relevante de un sistema como la energía del estado base, el tiempo de vida de los estados excitados [9] y permite resolver sistemas de muchos cuerpos considerando las interacciones entre estos [10].

La función de Green de una sola partícula se define como [9]

$$iG_{\alpha\beta}(xt, yt') = \frac{\langle \Psi_0 | T [\hat{\Psi}_{H\alpha}(xt) \hat{\Psi}_{H\beta}^\dagger(yt')] | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \quad (1.18)$$

donde $|\Psi_0\rangle$ es el estado base que satisface la relación $\hat{H}|\Psi_0\rangle = E_0|\Psi_0\rangle$ y $|\Psi_{H\alpha}(xt)\rangle$ es la representación del operador en el esquema de Heisenberg cuya relación con el esquema de Schrödinger se establece mediante la transformación

$$\hat{\Psi}_{H\alpha}(xt) = e^{iHt/\hbar} \hat{\Psi}_\alpha(xy) e^{-iHt/\hbar}. \quad (1.19)$$

Además, los subíndices α y β etiquetan a los operadores de campo. En el caso de fermiones de espín 1/2 α y β sólo pueden tomar dos valores y para los bosones no hay que etiquetarlos porque el sistema se puede describir por un solo operador de campo [9] gracias a la indistinguibilidad de las partículas [10]. Finalmente, T es el operador de ordenamiento temporal, el cual se define para bosones como [10]

$$T(t, t') = \theta(t - t') + \theta(t' - t) \quad (1.20)$$

donde $\theta(t - t')$ es la función escalón de Heaviside. Es decir, la función de Green es el valor de expectación del operador de campo en el estado base [9].

Por otra parte, algunas de las características de la función de Green se pueden apreciar mejor tomando la representación de Lehmann, la cual permite usar el conjunto de eigenestados del Hamiltoniano como una base [10]. Tomando el estado base normalizado en la Ecuación 1.18 la función de Green la podemos escribir como

$$iG(xt, yt) = \langle \Psi_0 | T [\hat{\Psi}(xt) \hat{\Psi}^\dagger(yt')] | \Psi_0 \rangle. \quad (1.21)$$

Ahora bien, podemos reescribir la función de Green insertando un conjunto completo de eigenestados ,

$$iG(xt, yt) = \sum_n \left[\theta(t - t') \langle \Psi_0 | \hat{\Psi}(xt) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\Psi}^\dagger(yt') | \Psi_0 \rangle - \theta(t' - t) \langle \Psi_0 | \hat{\Psi}^\dagger(yt') | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\Psi}(xt) | \Psi_0 \rangle \right] \quad (1.22)$$

el cuál puede ser reescrito mostrando la dependencia del tiempo

$$iG(xt, yt) = \sum_n \left[\theta(t-t') e^{i(E_n-E)(t-t')/\hbar} \langle \Psi_0 | \hat{\Psi}(x) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\Psi}^\dagger(y) | \Psi_0 \rangle - \theta(t'-t) e^{i(E_n-E)(t-t')/\hbar} \langle \Psi_0 | \hat{\Psi}^\dagger(y) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\Psi}(x) | \Psi_0 \rangle \right]. \quad (1.23)$$

El operador del número de ocupación es

$$\hat{n} = \int d^3x \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \quad (1.24)$$

y su conmutador con el operador de campo es

$$[\hat{n}, \hat{\Psi}(x)] = -\hat{\Psi}(x) \quad (1.25)$$

o bien,

$$\hat{n} \hat{\Psi}(x) = \hat{\Psi}(x) (\hat{n} - 1) \quad (1.26)$$

que aplicado al estado base, en el que se asume que hay N partículas, se obtiene

$$\hat{n} [\hat{\Psi}(x) | \Psi_0] = (N-1) [\Psi(x) | \Psi_0]. \quad (1.27)$$

Es decir, el operador $\hat{\Psi}$ disminuye el número de partículas en 1 y el operador $\hat{\Psi}^\dagger$ aumenta en 1 el número de partículas al sistema. A su vez se pueden considerar los eigenestados del momento como el conjunto completo de estados, dado que P es una constante de movimiento [9], es decir

$$iG(xt, yt') = \sum_n \left[\theta(t-t') e^{-i(E_n-E)(t-t')/\hbar} e^{iP_n(x-y)/\hbar} \langle \Psi_0 | \hat{\Psi}(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\Psi}^\dagger(0) | \Psi_0 \rangle - \theta(t'-t) e^{i(E_n-E)(t-t')/\hbar} e^{-iP(x-y)/\hbar} \langle \Psi_0 | \hat{\Psi}^\dagger(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\Psi}(0) | \Psi_0 \rangle \right] \quad (1.28)$$

cuya transformada de Fourier es

$$G(\omega, p) = \int d^3(x-y) d^3(t-t') e^{-ip(x-y)} e^{i\omega(t-t')} G(xt, yt') \\ = V \sum_n \delta_{p, -P_n/\hbar} \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\Psi}^\dagger(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\Psi}(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega - \frac{1}{\hbar}(E_n - E) + i\eta} + V \sum_n \delta_{p, P_n/\hbar} \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\Psi}(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\Psi}^\dagger(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega + \frac{1}{\hbar}(E_n - E) - i\eta} \quad (1.29)$$

donde η es un número muy pequeño, es decir, $\eta \rightarrow -\infty$ tal que $\pm i\eta$ asegura la convergencia de la integral [9]. Esta ecuación nos permite ver que la función de Green depende directamente de la frecuencia ω y sus singularidades brindan el espectro de energía.

2. Energía de un condensado de Bose-Einstein

Como siguiente punto, se desarrollará el tratamiento para describir, mediante la teoría cuántica de campos, el espectro de un condensado de Bose-Einstein típico, es decir, de un sistema en equilibrio.

La autoenergía se puede interpretar como el cambio en la energía de una partícula al interactuar consigo misma debido a un sistema de muchos cuerpos. Los diagramas de las autoenergías propias son los que se muestran en la Figura 1

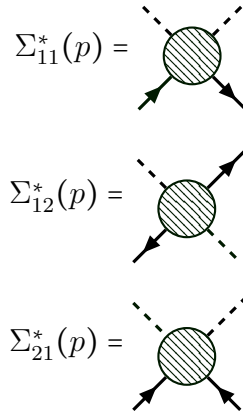


Figura 1: Autoenergía propia para bosones.

La primera autoenergía $\Sigma^*_{11}(p)$ tiene dos líneas sólidas, una que entra y una que sale, las cuales corresponden a una partícula que entra al condensado y luego sale de éste, mientras que las líneas punteadas corresponden a partículas del condensado. En el caso de la autoenergía $\Sigma^*_{12}(p)$ las dos líneas de partícula salen y en $\Sigma^*_{21}(p)$ las dos líneas de partícula entran, lo que muestra las características de la condensación de Bose dado que no hay conservación de partículas, pues el condensado es un suministro o sumidero de partículas [9]. Estos diagramas se denominan anómalos.

Para representar la desaparición y aparición de partículas en el condensado se introducen, respectivamente, las funciones de Green exactas: $G'_{12}(x, y) = G'_{12}(p)$ y $G'_{21}(x, y) = G'_{21}(p)$ y su representación se muestra en la Figura 2

Por otra parte, ecuaciones de Dyson para un condensado de Bose son [12, 9]:

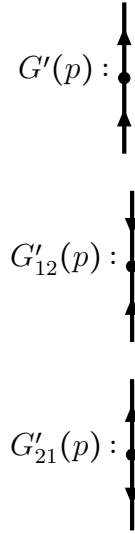


Figura 2: Representación de las funciones de Green para bosones. Las líneas están dirigidas hacia el flujo de momento en el espacio de momentos.

$$G'(p) = G^0(p) + G^0(p)\Sigma_{11}^*(p)G'(p) + G^0(p)\Sigma_{12}^*(p)G'_{12}(p) \quad (2.1)$$

$$G'_{12}(p) = G^0(p)\Sigma_{12}^*(p)G'(p) + G^0(p)\Sigma_{11}^*(p)G'_{12}(p) \quad (2.2)$$

$$G'_{21}(p) = G^0(-p)\Sigma_{12}^*(p)G'(p) + G^0(-p)\Sigma_{11}^*(-p)G'_{21}(p) \quad (2.3)$$

$$G'(-p) = G^0(-p) + G^0(-p)\Sigma_{11}^*(-p)G'(-p) + G^0(-p)\Sigma_{12}^*(p)G'_{12}(p) \quad (2.4)$$

Los diagramas correspondientes a estas ecuaciones de Dyson se muestran en la Figura [3](#)

Las funciones de Green $G'_{12}(x, y)$ y $G'_{21}(x, y)$ tienen una definición precisa usando los operadores de Heisenberg [9](#), siendo $\hat{\phi}$ los operadores cuánticos de campo,

$$iG'_{12}(x, y) = \frac{\langle \mathbf{O} | T[\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(y)] | \mathbf{O} \rangle}{\langle \mathbf{O} | \mathbf{O} \rangle} \quad (2.5)$$

$$iG'_{21}(x, y) = \frac{\langle \mathbf{O} | T[\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^\dagger(x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^\dagger(y)] | \mathbf{O} \rangle}{\langle \mathbf{O} | \mathbf{O} \rangle} \quad (2.6)$$

donde se aprecia que no hay conservación de partículas, dado que en G'_{12} desaparecen y en G'_{21} aparecen.

De acuerdo a estas deficiones se cumplen las condiciones

$$G'_{12}(x, y) = G'_{12}(y, x), \quad G'_{21}(x, y) = G'_{21}(y, x) \quad (2.7)$$

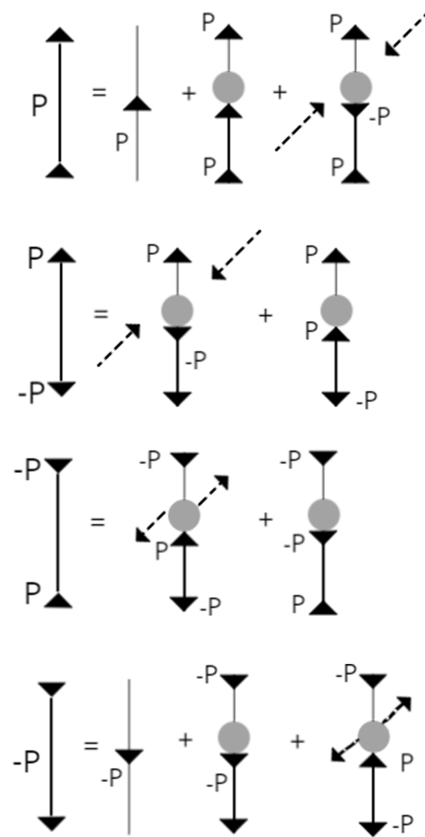


Figura 3: Ecuaciones de Dyson para un sistema de bosones [9]

dado que el operador de ordenamiento se define como [10]

$$T[\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(y)] = \theta(x-y)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(y) + \theta(y-x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(y)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(x) \quad (2.8)$$

puesto que se trata de un sistema de bosones, de tal forma que

$$\begin{aligned} T[\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(y)] &= \theta(x-y)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(y) + \theta(y-x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(y)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(x) \\ &= \theta(y-x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(y)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(x) + \theta(x-y)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(y) = T[\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(y)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(x)]. \end{aligned}$$

Y de forma similar,

$$\begin{aligned} T[\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(y)] &= \theta(x-y)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(y) + \theta(y-x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(y)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(x) \\ &= \theta(y-x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(y)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(x) + \theta(x-y)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(y) = T[\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(y)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(x)]. \end{aligned}$$

Ahora bien, para obtener una visión clara sobre la estructura de la ecuación de Dyson se introduce la matriz [9]

$$\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}(x) = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{\mathbf{k}}(x) \\ \hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(x) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

y

$$\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(y) = [\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(y) \quad \hat{\phi}_{\mathbf{k}}(y)] \quad (2.10)$$

tal que,

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}}(x)\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(y) &= \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{\mathbf{k}}(x) \\ \hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(x) \end{bmatrix} [\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(y) \quad \hat{\phi}_{\mathbf{k}}(y)] \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{\mathbf{k}}(x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(y) & \hat{\phi}_{\mathbf{k}}(x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(y) \\ \hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(y) & \hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(x)\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(y) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

lo que da la posibilidad de formar una matriz de la función de Green

$$i\mathbf{G}'(x, y) = \frac{\langle \mathbf{O} | T [\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}(x)\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(y)] | \mathbf{O} \rangle}{\langle \mathbf{O} | \mathbf{O} \rangle} \quad (2.12)$$

donde los elementos fuera de la diagonal corresponden a $iG'_{12}(x, y)$ y $iG'_{21}(x, y)$, respectivamente. Y se identifican los elementos en la diagonal de la Ec. 2.11 como

$$G'_{11}(x, y) = G'(x, y), \quad G'_{22}(x, y) = G'(y, x). \quad (2.13)$$

De acuerdo a lo anterior, la ecuación de Dyson es una ecuación matricial [9]

$$\mathbf{G}'(x, y) = \mathbf{G}^0(x, y) + \int d^4x_1 d^4x'_1 \mathbf{G}^0(x, x_1) \mathbf{\Sigma}^*(x_1, x'_1) \mathbf{G}(x'_1, y) \quad (2.14)$$

con

$$\mathbf{\Sigma}^*(x, y) = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^*(x, y) & \Sigma_{12}^*(x, y) \\ \Sigma_{21}^*(x, y) & \Sigma_{11}^*(y, x) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

y

$$\mathbf{G}^0(x, y) = \begin{bmatrix} G^0(x, y) & 0 \\ 0 & G^0(y, x) \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Haciendo la transformada de Fourier correspondiente podemos pasar la ecuación matricial

$$\mathbf{G}'(p) = \mathbf{G}^0(p) + \mathbf{G}^0(p) \mathbf{\Sigma}^*(p) \mathbf{G}'(p) \quad (2.17)$$

que se puede resolver por medio de la matriz inversa, es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{G}'(p) - \mathbf{G}^0(p) \mathbf{\Sigma}^*(p) \mathbf{G}'(p) &= \mathbf{G}^0(p) \\ (\mathbf{1} - \mathbf{G}^0(p) \mathbf{\Sigma}^*(p)) \mathbf{G}'(p) &= \mathbf{G}^0(p) \\ (\mathbf{1} - \mathbf{G}^0(p) \mathbf{\Sigma}^*(p)) \mathbf{G}'(p) &= \mathbf{G}^0(p) (\mathbf{G}'(p))^{-1} \\ (\mathbf{G}^0(p))^{-1} - \mathbf{\Sigma}^*(p) &= (\mathbf{G}'(p))^{-1} \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde,

$$(\mathbf{G}^0(p))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{G^0(p)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G^0(-p)} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Por lo tanto,

$$(\mathbf{G}'(p))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{G^0(p)} - \Sigma_{11}^*(p) & -\Sigma_{12}^*(p) \\ -\Sigma_{21}^*(p) & \frac{1}{G^0(-p)} - \Sigma_{11}^*(-p) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Donde la función de Green libre es $G^0(p) = (p_0 - i\omega_p + \frac{\mu}{\hbar})^{-1}$ y $G^0(-p) = (-p_0 - i\omega_p + \frac{\mu}{\hbar})^{-1}$, por lo que se puede escribir la matriz como sigue

$$(\mathbf{G}'(p))^{-1} = \begin{bmatrix} p_0 - i\omega_p + \frac{\mu}{\hbar} - \Sigma_{11}^*(p) & -\Sigma_{12}^*(p) \\ -\Sigma_{21}^*(p) & -p_0 - i\omega_p + \frac{\mu}{\hbar} - \Sigma_{11}^*(-p) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Y entonces para obtener $\mathbf{G}'(p)$ se usa el hecho que $(\mathbf{G}'(p))^{-1}\mathbf{G}'(p) = \mathbb{1}$, con

$$\mathbf{G}'(p) = \frac{1}{\mathcal{D}(p)} \begin{bmatrix} -p_0 - i\omega_p + \frac{\mu}{\hbar} - \Sigma_{11}^*(-p) & \Sigma_{12}^*(p) \\ \Sigma_{21}^*(p) & p_0 - i\omega_p + \frac{\mu}{\hbar} - \Sigma_{11}^*(p) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

tal que,

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= \frac{1}{\mathcal{D}(p)} (\mathbf{G}'(p))^{-1} \mathbf{G}'(p) \\ &= \frac{1}{\mathcal{D}(p)} \begin{bmatrix} (\xi' - \Sigma_{11}^*(p)) (\xi - \Sigma_{11}^*(-p)) - \Sigma_{12}^*(p) \Sigma_{21}^*(p) & 0 \\ 0 & (\xi' - \Sigma_{11}^*(p)) (\xi - \Sigma_{11}^*(-p)) - \Sigma_{12}^*(p) \Sigma_{21}^*(p) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde $\xi = -p_0 - i\omega_p + \frac{\mu}{\hbar}$ y $\xi' = p_0 - i\omega_p + \frac{\mu}{\hbar}$. De tal forma que

$$\mathcal{D}(p) = \left(p_0 - \omega_p + \frac{\mu}{\hbar} - \Sigma_{11}^*(p) \right) \left(-p_0 - \omega_p + \frac{\mu}{\hbar} - \Sigma_{11}^*(-p) \right) - \Sigma_{12}^*(p) \Sigma_{21}^*(p) \quad (2.24)$$

donde se ha realizado la continuación analítica $i\omega_p \rightarrow \omega_p + i0^+$ y haciendo la expansión de éste término

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}(p) &= -p_0^2 - \omega_p p_0 + \frac{\mu}{\hbar} p_0 - p_0 \Sigma_{11}(-p) + \omega_p p_0 + \omega_p^2 - \omega_p \frac{\mu}{\hbar} + \omega_p \Sigma_{11}(-p) \\
 &- p_0 \frac{\mu}{\hbar} - \omega_p \frac{\mu}{\hbar} + \frac{\mu^2}{\hbar^2} - \frac{\mu}{\hbar} \Sigma_{11}(-p) + p_0 \Sigma_{11}(p) + \omega_p \Sigma_{11}(p) - \frac{\mu}{\hbar} \Sigma_{11}(p) + \Sigma_{11}(p) \Sigma_{11}(-p) - \\
 &\quad - \Sigma_{12}(p) \Sigma_{21}(p) \\
 &= - \left\{ p_0^2 - \left(\omega_p - \frac{\mu}{\hbar} \right)^2 - p_0 (\Sigma_{11}(p) - \Sigma_{11}(-p)) - \omega_p (\Sigma_{11}(p) + \Sigma_{11}(-p)) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\mu}{\hbar} (\Sigma_{11}(p) + \Sigma_{11}(-p)) - \Sigma_{11}(p) \Sigma_{11}(-p) + \Sigma_{12}(p) \Sigma_{21}(p) \right\}.
 \end{aligned}$$

Definiendo $A = \frac{1}{2} (\Sigma_{11}(p) - \Sigma_{11}(-p))$ y $S = \frac{1}{2} (\Sigma_{11}(p) + \Sigma_{11}(-p))$ podemos reescribir la expresión anterior como

$$\mathcal{D}(p) = - \left\{ p_0^2 - 2p_0 A - \left(\omega_p - \frac{\mu}{\hbar} \right)^2 - 2 \left(\omega_p - \frac{\mu}{\hbar} \right) S - \Sigma_{11}(p) \Sigma_{11}(-p) + \Sigma_{12}(p) \Sigma_{21}(p) \right\},$$

completando los trinomios

$$\mathcal{D}(p) = - \left\{ (p_0 - A)^2 - \left(\left(\omega_p - \frac{\mu}{\hbar} \right) + S \right)^2 - A^2 + S^2 - \Sigma_{11}(p) \Sigma_{11}(-p) + \Sigma_{12}(p) \Sigma_{21}(p) \right\},$$

pero $S^2 - A^2 = \Sigma_{11}(p) \Sigma_{11}(-p)$, y así

$$\mathcal{D}(p) = - \left\{ (p_0 - A)^2 - \left(\left(\omega_p - \frac{\mu}{\hbar} \right) + S \right)^2 + \Sigma_{12}(p) \Sigma_{21}(p) \right\}. \quad (2.25)$$

Y por lo tanto las entradas de la matriz $\mathbf{G}'(p)$ son

$$G'(p) = \frac{1}{D(p)} \left(p_0 + \omega_p - \frac{\mu}{\hbar} + \Sigma_{11}(-p) \right) \quad (2.26)$$

$$G_{12} = - \frac{\Sigma_{12}^*}{D(p)} \quad (2.27)$$

$$G_{21} = - \frac{\Sigma_{21}^*}{D(p)}, \quad (2.28)$$

donde $D(p) = (p_0 - A)^2 - \left(\left(\omega_p - \frac{\mu}{\hbar} \right) + S \right)^2 + \Sigma_{12}(p) \Sigma_{21}(p)$ de tal forma que calculando los polos de la función de Green obtenemos

$$E_p = \mu - \frac{1}{2} [\Sigma_{11}(p) + \Sigma_{11}(-p)] \pm \left[\left(p - \frac{1}{2} [\Sigma_{11}(p) - \Sigma_{11}(-p)] \right)^2 + \Sigma_{12}(p)\Sigma_{21}(p) \right]^{1/2}. \quad (2.29)$$

Por otra parte, para el caso debilmente interactuante el potencial químico está representado por [9]

$$\mu = \langle \mathbf{O} | \frac{\partial \hat{V}}{\partial N_0} | \mathbf{O} \rangle \quad (2.30)$$

donde el vector $|\mathbf{O}\rangle$ depende de μ y N_0 , siendo N_0 el número de partículas en el estado base y $\hat{V} = \hat{V}(\mathbf{p})$ el potencial de interacción. El valor de expectación del hamiltoniano en el estado vacío es $\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = E_0 = \frac{1}{2} V^{-1} N^2 V(0)$, solucionando para V obtenemos

$$V = \frac{1}{2} \frac{N_0^2}{E_0} V(0) \quad (2.31)$$

y entonces

$$\frac{\partial V}{\partial N_0} = \frac{N_0}{E_0} V(0) \quad (2.32)$$

y por lo tanto,

$$\mu = \langle \mathbf{O} | \frac{\partial \hat{V}}{\partial N_0} | \mathbf{O} \rangle = n_0 V(0) \quad (2.33)$$

donde $n_0 = \frac{E_0}{N_0}$. Por otra parte, el potencial químico satisface la relación con las autoenergías [9]. Nótese que en éste caso se está suponiendo un sistema en equilibrio. Más adelante, se estudiará el caso fuera de equilibrio en el sistema de excitones-polaritones.

$$\mu = \hbar \Sigma_{11}^*(0) - \hbar \Sigma_{12}^*(0) \quad (2.34)$$

donde, además, a órdenes bajos se cumple que [9]

$$\hbar \Sigma_{11}^*(p) = n_0 (V(0) + V(\mathbf{p})) \quad (2.35)$$

$$\hbar \Sigma_{12}^*(p) = \hbar \Sigma_{21}^*(p) = n_0 V(\mathbf{p}) \quad (2.36)$$

Y de acuerdo a los diagramas se puede tomar $p \leftrightarrow -p$ (véase el apéndice), por lo tanto $\Sigma_{12}^*(p) = \Sigma_{21}^*(-p)$, de tal forma que las entradas de la matriz $G'(p)$ las podemos reescribir como sigue

$$\begin{aligned} G'(p) &= \frac{p_0 + \omega_p - \frac{n_0}{\hbar}V(0) + \frac{n_0}{\hbar}(V(0) + V(\mathbf{p}))}{p_0^2 - \left(\omega_p - \frac{n_0V(0)}{\hbar} + \frac{n_0V(0)}{\hbar} + \frac{n_0V(p)}{\hbar} \right)^2 + \frac{n_0^2}{\hbar^2}V^2(p)} \\ &= \frac{p_0 + \frac{1}{\hbar}(\epsilon_p + n_0V(p))}{p_0^2 - \frac{1}{\hbar^2}[(\epsilon_p + n_0V(p))^2 - n_0^2V^2(p)]} \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde $\epsilon_p = \omega_p \hbar$. Simplificando el segundo término del denominador de la Ecuación 2 se puede definir $E_p = [\epsilon_p^2 + 2\epsilon_p n_0 V(p)]^{1/2}$, de tal forma que

$$G'(p) = \frac{p_0 + \frac{1}{\hbar}(\epsilon_p + n_0V(p))}{p_0^2 - \left(\frac{E_p}{\hbar} \right)^2} \quad (2.38)$$

$$G'_{12}(p) = G'_{21}(p) = -\frac{\frac{1}{\hbar}n_0V(p)}{p_0^2 - \left(\frac{E_p}{\hbar} \right)^2} \quad (2.39)$$

Ahora bien, podemos notar que de acuerdo al denominador $p_0^2 - \left(\frac{E_p}{\hbar} \right)^2 = \left(p_0 - \frac{E_p}{\hbar} \right) \left(p_0 + \frac{E_p}{\hbar} \right)$ podemos expresar la función de Green libre como la resta de dos fracciones, o bien como la separación de sus polos. Es decir,

$$\frac{A}{x} - \frac{B}{y} = \frac{Ay - Bx}{xy} \quad (2.40)$$

con $x = p_0 - \frac{E_p}{\hbar}$ y $y = p_0 + \frac{E_p}{\hbar}$, por lo tanto

$$\frac{A}{x} - \frac{B}{y} = \frac{A \left(p_0 + \frac{E_p}{\hbar} \right) - B \left(p_0 - \frac{E_p}{\hbar} \right)}{p_0^2 - \left(\frac{E_p}{\hbar} \right)^2} \quad (2.41)$$

Igualando el denominador de las Ecuaciones 2.38 y 2.41

$$p_0(A - B) + \frac{E_p}{\hbar}(A + B) = p_0 + \frac{1}{\hbar}[\epsilon_p + n_0V(p)] \quad (2.42)$$

igualando factores obtenemos el sistema de ecuaciones

$$A - B = 1 \quad (2.43)$$

$$\frac{E_p}{\hbar}(A + B) = \frac{1}{\hbar}[\epsilon_p + n_0V(p)] \quad (2.44)$$

Solucionando el sistema de ecuaciones obtenemos los valores de A y B ,

$$A = \frac{1}{2}E_p^{-1}[\epsilon_p + n_0V(p)] + \frac{1}{2} \quad (2.45)$$

$$B = \frac{1}{2}E_p^{-1}[\epsilon_p + n_0V(p)] - \frac{1}{2} \quad (2.46)$$

Y entonces podemos definir los factores

$$u_p^2 = \frac{1}{2}E_p^{-1}[\epsilon_p + n_0V(p)] + \frac{1}{2} \quad (2.47)$$

$$v_p^2 = \frac{1}{2}E_p^{-1}[\epsilon_p + n_0V(p)] - \frac{1}{2} \quad (2.48)$$

Y por lo tanto,

$$G'(p) = \frac{u_p^2}{p_0 - \frac{E_p}{\hbar} + i\eta} - \frac{v_p^2}{p_0 + \frac{E_p}{\hbar} - i\eta} \quad (2.49)$$

De la misma forma,

$$G'_{12}(p) = G'_{21}(p) = -\frac{u_p v_p}{p_0 - \frac{E_p}{\hbar} + i\eta} + \frac{u_p v_p}{p_0 + \frac{E_p}{\hbar} - i\eta}. \quad (2.50)$$

Así pues, E_p es la energía del condensado de Bose-Einstein cuyo espectro se muestra en la Figura [4](#)

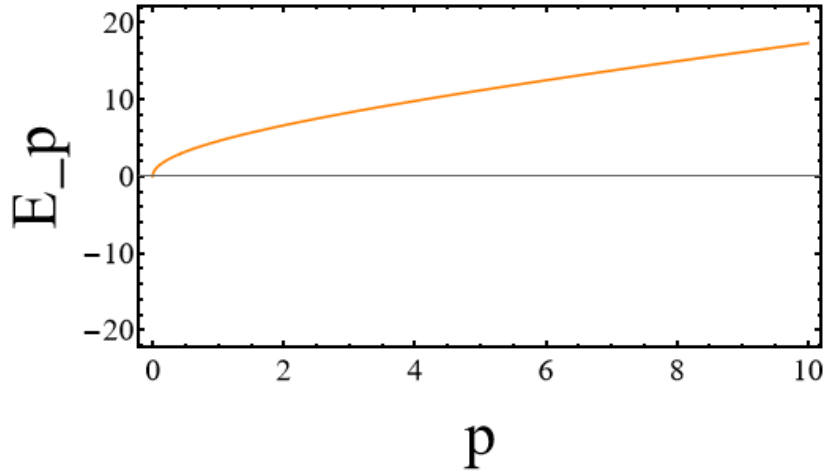


Figura 4: Espectro de energía del condensado de Bose-Einstein con $V = 10$ y $n = 1$. En este caso, al tratarse de un condensado de Bose-Einstein típico, $E_p \geq 0$, por lo que se observa sólo la brecha positiva, dado que la brecha negativa surge por los procesos fuera de equilibrio del sistema [3].

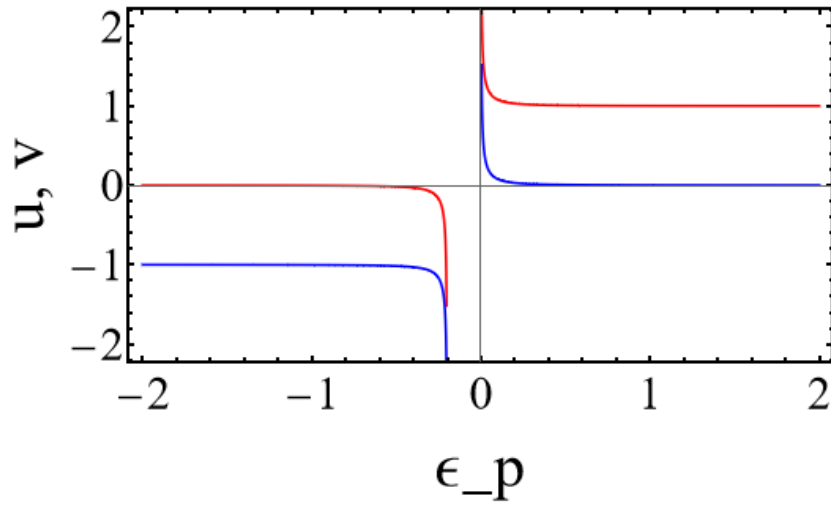


Figura 5: Se muestran los coeficientes de Bogoliubov u (rojo) y v (azul) con $n_0=10$ y $V(p) = 0.01$ mientras se varía ϵ_p .

3. Espectro de un sistema de excitones-polaritones

Prosiguiendo, en esta sección se tratará el espectro de los excitones-polaritones empleando el formalismo de la función de Green para introducir el hecho de que el sistema de polaritones depende de láseres externos [5] tal que el potencial químico se puede relacionar con la frecuencia de bombeo de estos láseres [8]. En el caso del Proyecto Terminal I para introducir este efecto de bombeo se introdujo un corrimiento en el Hamiltoniano.

$$(\mathbf{G}(p, i\omega)) = \begin{bmatrix} G_{xx}(p, i\omega) & G_{xc}(p, i\omega) \\ G_{xc}(p, i\omega) & G_{cc}(p, i\omega) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde $G_{xx}(p, i\omega)$ corresponde a la función de Green de los excitones sin interacción con la luz, $G_{cc}(p, i\omega)$ es la función de Green de los fotones y $G_{xc}(p, i\omega)$ y $G_{cx}(p, i\omega)$ corresponde a la interacción de la luz con la materia.

En el caso de la función de Green sin interacción $\mathbf{G}^0(p, \omega)$, la matriz es

$$\mathbf{G}^0(p, i\omega) = \begin{bmatrix} G_{xx}^0(p, i\omega) & 0 \\ 0 & G_{cc}^0(p, i\omega) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

donde $G_{xx}^0(p, i\omega) = (i\omega - \epsilon^x(p))^{-1}$ y $G_{cc}^0(p, i\omega) = (i\omega - \epsilon^c(p))^{-1}$. Por otra parte, la matriz de la autoenergía es

$$\Sigma(p, i\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \Omega \\ \Omega & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

donde Ω nos da la fuerza de acoplamiento entre los excitones del semiconductor y los fotones de la microcavidad.

La ecuación de Dyson en forma matricial es

$$\mathbf{G}(p, \omega) = \mathbf{G}^0(p, \omega) + \mathbf{G}^0(p, \omega)\Sigma(p, \omega)\mathbf{G}(p, \omega) \quad (3.4)$$

la cual se puede resolver por medio de la matriz inversa, dando como resultado

$$(\mathbf{G}(p, \omega))^{-1} = (\mathbf{G}^0(p, \omega))^{-1} - \Sigma(p, \omega). \quad (3.5)$$

con

$$(\mathbf{G}^0(p, \omega))^{-1} = \begin{bmatrix} i\omega - \epsilon^x(p) & 0 \\ 0 & i\omega - \epsilon^c(p) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

por lo tanto

$$(\mathbf{G}(p, \omega))^{-1} = \begin{bmatrix} i\omega - \epsilon^x(p) & -\Omega \\ -\Omega & i\omega - \epsilon^c(p) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Y dado que $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G} = \mathbb{1}$, obtenemos finalmente que

$$\mathbf{G}(p, \omega) = \frac{1}{D(p)} \begin{bmatrix} i\omega - \epsilon^c(p) & \Omega \\ \Omega & i\omega - \epsilon^x(p) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

con $D(p) = (i\omega - \epsilon^c(p))(i\omega - \epsilon^x(p)) - \Omega^2$. Realizando la continuación analítica $i\omega \rightarrow \omega + i0^+$,

$$\mathbf{G}(p, \omega) = \frac{1}{D(p)} \begin{bmatrix} \omega - \epsilon^c(p) & \Omega \\ \Omega & \omega - \epsilon^x(p) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

y $D(p) = (\omega - \epsilon^c(p))(\omega - \epsilon^x(p)) - \Omega^2$. El espectro de la energía se encuentra en el límite $D(p) \rightarrow 0$, es decir, resolviendo para ω

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\epsilon^x(p) - \epsilon^c(p) \pm \sqrt{(\epsilon^x(p) - \epsilon^c(p))^2 + 4\Omega^2} \right). \quad (3.10)$$

Es decir

$$\epsilon_{UP} = \frac{1}{2} \left(\epsilon^x(p) - \epsilon^c(p) + \sqrt{(\epsilon^x(p) - \epsilon^c(p))^2 + 4\Omega^2} \right) \quad (3.11)$$

$$\epsilon_{LP} = \frac{1}{2} \left(\epsilon^x(p) - \epsilon^c(p) - \sqrt{(\epsilon^x(p) - \epsilon^c(p))^2 + 4\Omega^2} \right) \quad (3.12)$$

corresponden a la energía del polariton superior e inferior, respectivamente, las cuales se han tomado como función de la desintonización δ a momento cero, lo que permite obtener distintas distribuciones de luz o materia para cada polaritón como se estudió en el Proyecto Terminal I. La gráfica de la energía se muestra en la Figura [6](#)

4. BEC de excitones-polaritones

Continuando, se considerará la función de Green de un condensado de Bose-Einstein de excitones-polaritones, lo que representa el objetivo principal de éste proyecto, que es mezclar el espectro de los excitones-polaritones con el espectro de Bogoliubov para obtener la rama polaritónica de menor energía e investigar su espectro, constatando el espectro encontrado en el Proyecto Terminal I.

4.1 Energía del espectro de Bogoliubov de un BEC de polaritones inferiores

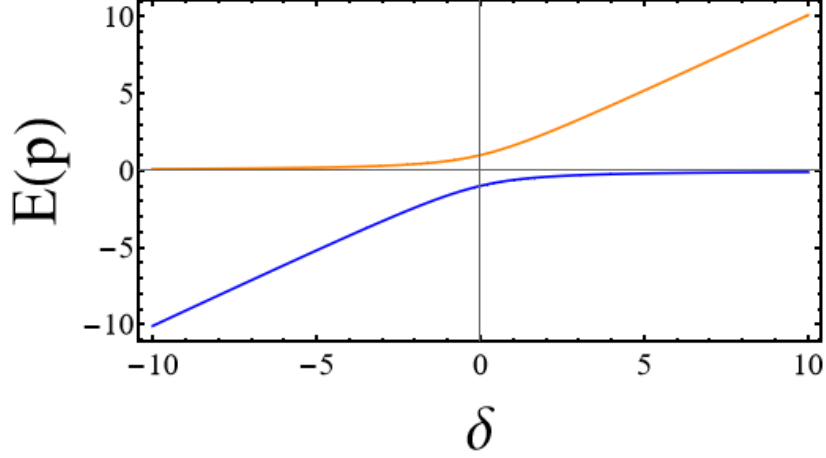


Figura 6: Se muestra el espectro de energía del polaritón superior (anaranjado) y del polaritón inferior (azul), donde $\delta = \epsilon^x - \epsilon^c$ con momento cero y se ha tomado $\Omega = 1$.

4.1. Energía del espectro de Bogoliubov de un BEC de polaritones inferiores

De acuerdo a la secciones anteriores la ecuación matricial de la función de Green de bosones que interactúan es

$$(\mathbf{G}(p))^{-1} = (\mathbf{G}^0(p))^{-1} - \Sigma(p) \quad (4.1)$$

en este caso,

$$(\mathbf{G}^0)^{-1} = \begin{pmatrix} (G^0(p))^{-1} & 0 \\ 0 & (G^0(p))^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega_p - (\epsilon_{LP} - \epsilon_{pu}) & 0 \\ 0 & -i\omega_p - (\epsilon_{LP} - \epsilon_{pu}) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

donde ϵ_{LP} es la energía de los polaritones inferiores y ϵ_{pu} se puede relacionar con el potencial químico dado que al ser un sistema fuera de equilibrio, el potencial químico se puede fijar mediante la frecuencia de bombeo del laser [3] para mantener un estado estable, además, se puede relacionar con la rama fantasma que sirve como una prueba de las fluctuaciones cuánticas en el condensado [3].

Por otra parte, la matriz de autoenergías es

$$\Sigma(p) = \begin{pmatrix} \Sigma_{11}(p) & \Sigma_{12}(p) \\ \Sigma_{21}(p) & \Sigma_{11}(-p) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

entonces,

$$(\mathbf{G}(p))^{-1} = \begin{pmatrix} i\omega_p - (\epsilon_{LP} - \epsilon_{pu}) - \Sigma_{11}(p) & -\Sigma_{12}(p) \\ -\Sigma_{21}(p) & -i\omega_p - (\epsilon_{LP} - \epsilon_{pu}) - \Sigma_{11}(-p) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

4.1 Energía del espectro de Bogoliubov de un BEC de polaritones inferiores

y a su vez,

$$\mathbf{G}^0(p) = \frac{1}{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} -i\omega_p - (\epsilon_{LP} - \epsilon_{pu}) - \Sigma_{11}(-p) & \Sigma_{12}(p) \\ \Sigma_{21}(p) & i\omega_p - (\epsilon_{LP} - \epsilon_{pu}) - \Sigma_{11}(p) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Y dado que, $\mathbf{G}(p)(\mathbf{G}(p))^{-1} = \mathbb{1}$, entonces

$$\mathbb{1} = \frac{1}{\mathcal{D}(p)} \begin{pmatrix} ((\xi - \Sigma_{11}(p))(\xi' - \Sigma_{11}(-p)) - \Sigma_{12}(p)\Sigma_{21}(p)) & 0 \\ 0 & ((\xi - \Sigma_{11}(p))(\xi' - \Sigma_{11}(-p)) - \Sigma_{12}(p)\Sigma_{21}(p)) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

entonces,

$$\mathcal{D}(p) = (\xi - \Sigma_{11}(p))(\xi' - \Sigma_{11}(-p)) - \Sigma_{12}(p)\Sigma_{21}(p) \quad (4.7)$$

donde $\xi = i\omega_p - (\epsilon_{LP} - \epsilon_{pu})$ y $\xi' = -i\omega_p - (\epsilon_{LP} - \epsilon_{pu})$. Ahora bien, llevando a cabo la continuación analítica $i\omega_p \rightarrow \omega_p + i0^+$ y expandiendo la Ecuación [4.7](#) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(p) = & -[\omega_p^2 + \omega_p \Sigma_{11}(-p) - (\epsilon_{LP} - \epsilon_{pu})^2 - \Sigma_{11}(-p)(\epsilon_{LP} - \epsilon_{pu}) - \omega_p \Sigma_{11}(p) - \\ & - (\epsilon_{LP} - \epsilon_{pu})\Sigma_{11}(p) - \Sigma_{11}(p)\Sigma_{11}(-p) + \Sigma_{12}(p)\Sigma_{21}(p)]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Agrupando en términos semejantes,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(p) = & -[\omega_p^2 - \omega_p [\Sigma_{11}(p) - \Sigma_{11}(-p)] - (\epsilon_{LP} - \epsilon_{pu})^2 - \\ & - (\epsilon_{LP} - \epsilon_{pu}) [\Sigma_{11}(p) + \Sigma_{11}(-p)] - \Sigma_{11}(p)\Sigma_{11}(-p) + \Sigma_{12}(p)\Sigma_{21}(p)]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Completando el trinomio

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(p) = & -\left[\omega_p^2 - \omega_p [\Sigma_{11}(p) - \Sigma_{11}(-p)] - \left(\epsilon_{LP} - \epsilon_{pu} + \frac{1}{2} [\Sigma_{11}(p) + \Sigma_{11}(-p)] \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} [\Sigma_{11}(p) + \Sigma_{11}(-p)]^2 - \Sigma_{11}(p)\Sigma_{11}(-p) + \Sigma_{12}(p)\Sigma_{21}(p) \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

La solución se encuentra en los polos de la función de Green, es decir cuando $\omega_p \rightarrow 0$, de tal forma que resolviendo la Ecuación [4.1](#), obtenemos

4.2 Función de Green de Bogoliubov para la condensación de excitones-polaritones

$$E_p = \frac{1}{2} [\Sigma_{11}(p) - \Sigma_{11}(-p)] \pm \frac{1}{2} \left\{ \epsilon_{LP} - \epsilon_{pu} + \frac{1}{2} [\Sigma_{11}(p) + \Sigma_{11}(-p)] - \Sigma_{12}(p)\Sigma_{21}(p) \right\}^{1/2}. \quad (4.11)$$

Tomando en cuenta los términos de interacción

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}(p) &= \Sigma_{11}(-p) = 2n_{LP}g_{xx} \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_p \\ \Sigma_{12}(p) &= n_{LP}g_{xx} \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_p \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde n_{LP} representa la densidad del condensado de polaritones y g_{xx} es el coeficiente de la energía de interacción entre los excitones del condensado. Mientras que los coeficientes de Hopfield, $\cos^2 \theta_0$ corresponden a los polaritones del estado base y $\cos^2 \theta_q$ a los polaritones de estados excitados. A propósito, los coeficientes de Hopfield se pueden escribir en términos de la desintonización como [5]

$$C_p^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\delta_p}{[\delta_p^2 + 4\Omega^2]^{1/2}} \quad (4.13)$$

$$S_p^2 = 1 - C_p^2 \quad (4.14)$$

y proporcionan el contenido fotónico y excitónico de los excitones-polaritones [8]. Estos coeficientes se pueden escribir como senos y cosenos para poder formar una matriz que permita diagonalizar el Hamiltoniano que describe al sistema y obtener los operadores de los polaritones superiores e inferiores, como se realizó en el Proyecto Terminal I.

De acuerdo a estas consideraciones la energía del condensado de polaritones inferiores es

$$E_q = \pm \left[(\epsilon_{LP} - \epsilon_{pu} + 2n_{LP}g_{xx} \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_q)^2 - n_{LP}^2 g_{xx}^2 \cos^4 \theta_0 \cos^4 \theta_q \right]^{1/2}, \quad (4.15)$$

que es la misma expresión que se encontró en el Proyecto Terminal I. El espectro de energía de éste condensado se muestra en la Figura 7 y podemos observar la semejanza de la brecha positiva con la gráfica de la energía de un condensado de Bose-Einstein mostrado en la Figura 4 de la Sección 2.

4.2. Función de Green de Bogoliubov para la condensación de excitones-polaritones

Ahora bien, para poder hacer la aproximación de un sistema fuera de equilibrio usando el formalismo de la función de Green es necesario introducir las funciones de Green avanzadas o retardadas. Entonces, se puede tomar la base $\{\hat{c}_{\pm p}, \hat{c}_{\pm p}^\dagger, \hat{x}_{\pm p}, \hat{x}_{\pm p}^\dagger\}$. Partiendo nuevamente de la ecuación matricial,

4.2 Función de Green de Bogoliubov para la condensación de excitones-polaritones

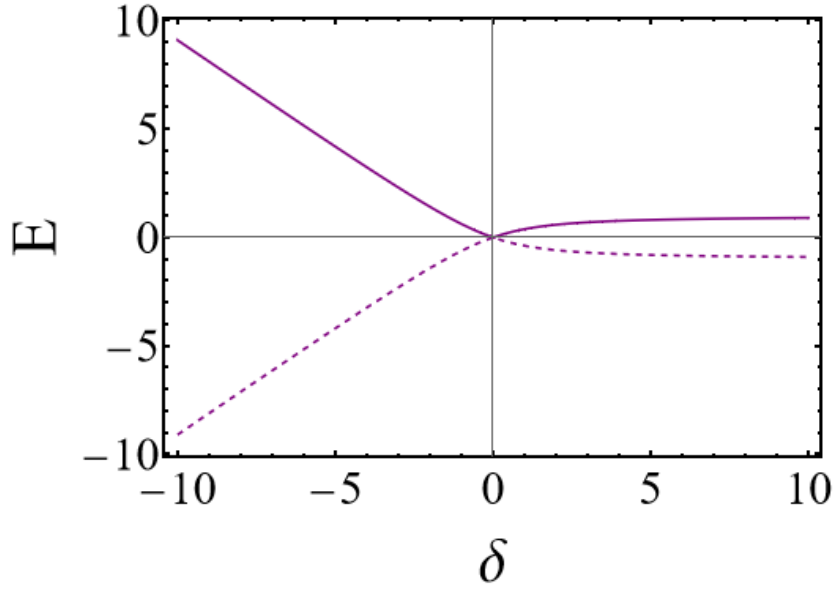


Figura 7: Se muestra el espectro de energía del condensado de Bose-Einstein del polaritón inferior con la brecha positiva (línea sólida) y la brecha negativa (línea punteada). En este caso se varía $\delta = \delta_0$ con $n_{LP}g_{xx} = 0$, $\Omega = 1$, y el bombeo $\epsilon_{pu} = -1$.

$$(\mathbf{G}(p))^{-1} = (\mathbf{G}^0(p))^{-1} - \mathbf{\Sigma}(p) \quad (4.16)$$

donde la función de Green libre es

$$(\mathbf{G}^0(p))^{-1} = \begin{pmatrix} i\omega_p - \epsilon_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\omega_p - \epsilon_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\omega_p - (\epsilon_x - \epsilon_{pu}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega_p - (\epsilon_x - \epsilon_{pu}) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

en donde para se ha considerado la energía de bombeo para mantener el estado estable de los excitones. Y la matriz de autoenergías es

$$\mathbf{\Sigma}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega \\ \Omega & 0 & \Sigma_{11}(p) & \Sigma_{12}(p) \\ 0 & \Omega & \Sigma_{21}(p) & \Sigma_{11}(-p) \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Estas representaciones se han obtenido a partir de la Ecuación [3.3](#) y de las interacciones de Bogoliubov

4.2 Función de Green de Bogoliubov para la condensación de excitones-polaritones

$$\Sigma(p) = \begin{pmatrix} \Sigma_{11}(p) & \Sigma_{12}(p) \\ \Sigma_{21}(p) & \Sigma_{11}(-p) \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

De tal forma que,

$$(\mathbf{G}(p))^{-1} = \begin{pmatrix} i\omega_p - \epsilon_c & 0 & -\Omega & 0 \\ 0 & -i\omega_p - \epsilon_c & 0 & -\Omega \\ -\Omega & 0 & i\omega_p - (\epsilon_x - \epsilon_{pu}) - \Sigma_{11}(p) & -\Sigma_{12}(p) \\ 0 & -\Omega & -\Sigma_{21}(p) & -i\omega_p - (\epsilon_x - \epsilon_{pu}) - \Sigma_{11}(-p) \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

La matriz inversa es

$$\mathbf{G}(p) = \frac{1}{\mathcal{D}(p)} \begin{pmatrix} G_{11}(p) & \Sigma_{12}(p)\Omega^2 & G_{13}(p) & -\Sigma_{12}(p)\Omega(\epsilon_c - \omega_p) \\ \Sigma_{21}(p)\Omega^2 & G_{22}(p) & \Sigma_{12}(p)\Omega(\omega_p - \epsilon_c) & G_{24}(p) \\ G_{31}(p) & \Sigma_{12}(p)\Omega(\omega_p - \epsilon_c) & G_{33}(p) & \Sigma_{12}(p)(\epsilon_c^2 - \omega_p^2) \\ -\Sigma_{21}(p)\Omega(\epsilon_c - \omega_p) & G_{42}(p) & \Sigma_{21}(p)(\epsilon_c - \omega_p^2) & G_{44}(p) \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

donde

$$G_{11}(p) = \Sigma_{12}(p)\Sigma_{21}(p)(\epsilon_c + \omega_p) + (\epsilon_x - \epsilon_{pu} - \omega_p + \Sigma_{11}(p))(\Omega^2 - ((\epsilon_c + \omega_p)(\epsilon_x - \epsilon_{pu} + \omega_p + \Sigma_{11}(-p))))$$

$$G_{13}(p) = (\epsilon_c + \omega_p)(\epsilon_x - \epsilon_{pu} + \omega_p + \Sigma_{11}(-p))\Omega - \Omega^3$$

$$G_{22}(p) = \Sigma_{12}(p)\Sigma_{21}(p)(\epsilon_c - \omega_p) - (\omega_p + \epsilon_x - \epsilon_{pu} + \Sigma_{11}(-p))((\omega_p - \epsilon_c)(\omega - (\epsilon_x - \epsilon_{pu}) - \Sigma_{11}(p)) - \Omega^2)$$

$$G_{24}(p) = (\omega_p + \epsilon_c)(\omega_p - (\epsilon_x - \epsilon_{pu}) - \Sigma_{11}(p))\Omega - \Omega^3$$

$$G_{31}(p) = \Omega(\omega_p^2 + \omega_p(\epsilon_x - \epsilon_{pu}) + \Sigma_{11}(-p)(\omega_p + \epsilon_c) + \epsilon_c(\omega_p + \epsilon_x - \epsilon_{pu}) - \Omega^2)$$

$$G_{33}(p) = -((\epsilon_c - \omega_p)(\omega_p^2 + \omega_p(\epsilon_x - \epsilon_{pu}) + \Sigma_{11}(-p)(\omega_p + \epsilon_c) + \epsilon_c(\omega_p + \epsilon_x - \epsilon_{pu}) - \Omega^2))$$

$$G_{42}(p) = (\omega_p - \epsilon_c)(\omega_p - (\epsilon_x - \epsilon_{pu}) - \Sigma_{11}(p))\Omega - \Omega^3$$

$$G_{44}(p) = -(\omega_p + \epsilon_c)((\omega_p - \epsilon_c)(\omega_p - (\epsilon_x - \epsilon_{pu}) - \Sigma_{11}(p)) - \Omega^2).$$

4.2 Función de Green de Bogoliubov para la condensación de excitones-polaritones

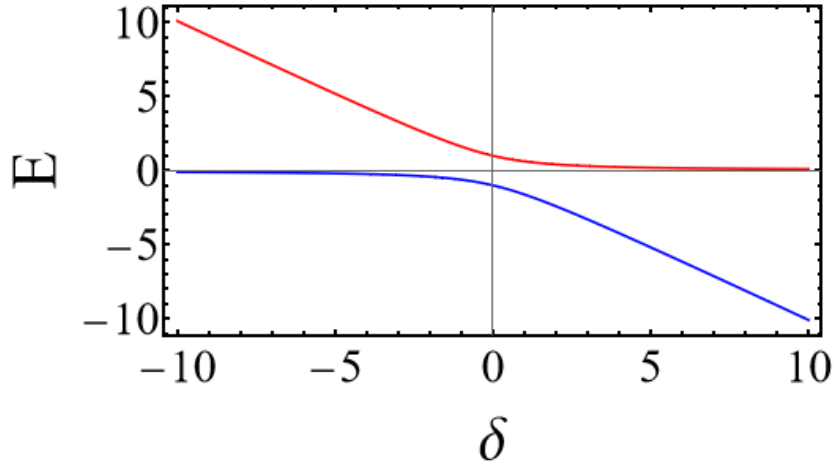


Figura 8: Se muestra el espectro de energía correspondiente a la Ecuación 4.23, donde la línea roja corresponde al signo positivo y la línea azul al signo negativo donde se ha usado $\epsilon_{pu} = 1$ y se ha variado $\delta = \delta_0$.

Se tienen las ramas polaritónicas superior e inferior que resultan de la interacción con el condensado de excitones-polaritones, lo cual se estudiará en el futuro. El determinante es,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(p) = & (\epsilon_c - \omega_p)(-\epsilon_x + \epsilon_{pu} - \Sigma_{11}(p) + \omega_p)\Omega^2 + \Omega^4 + (-\epsilon_c - \omega_p)(\Sigma_{21}(p)\Sigma_{12}(p)(\epsilon_c - \omega_p) \\ & + (\epsilon_x - \epsilon_{pu} + \omega_p + \Sigma_{11}(-p))((\epsilon_x - \epsilon_{pu} - \omega_p + \Sigma_{11}(p))(-\epsilon_c + \omega_p) + \Omega^2)) \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde se ha hecho la continuación analítica $i\omega_p \rightarrow \omega_p + i0^+$. Ahora se encontrarán los límites para verificar los resultados. Si no hay interacciones de Bogoliubov, es decir $\Sigma_{11}(p) = \Sigma_{11}(-) = \Sigma_{12}(p) = \Sigma_{21}(p) = 0$, entonces se recupera lo que se encontró en el caso donde sólo hay interacción de la luz con la materia,

$$\mathcal{D}(p)_{g_{BB}=0} = ((\epsilon_c + \omega_p)(\epsilon_x - \epsilon_{pu} + \omega_p) - \Omega^2)((-\epsilon_c + \omega_p)(-\epsilon_x + \epsilon_{pu} + \omega_p) - \Omega^2).$$

donde g_{BB} son las interacciones de Bogoliubov. De ésta ecuación encontramos los modos de Bogoliubov para polaritones inferiores y superiores, respectivamente,

$$\omega_p = \frac{1}{2}(\epsilon_c + \epsilon_x - \epsilon_{pu}) \pm \frac{1}{2} \left\{ (\epsilon_c - (\epsilon_x - \epsilon_{pu}))^2 + 4\Omega^2 \right\}^{1/2} \quad (4.23)$$

$$\omega_p = \frac{1}{2}(-\epsilon_c - \epsilon_x + \epsilon_{pu}) \pm \frac{1}{2} \left\{ (\epsilon_c - (\epsilon_x - \epsilon_{pu}))^2 + 4\Omega^2 \right\}^{1/2}. \quad (4.24)$$

Para el caso sin interacción de los excitones con los fotones, es decir, $\Omega = 0$, obtenemos

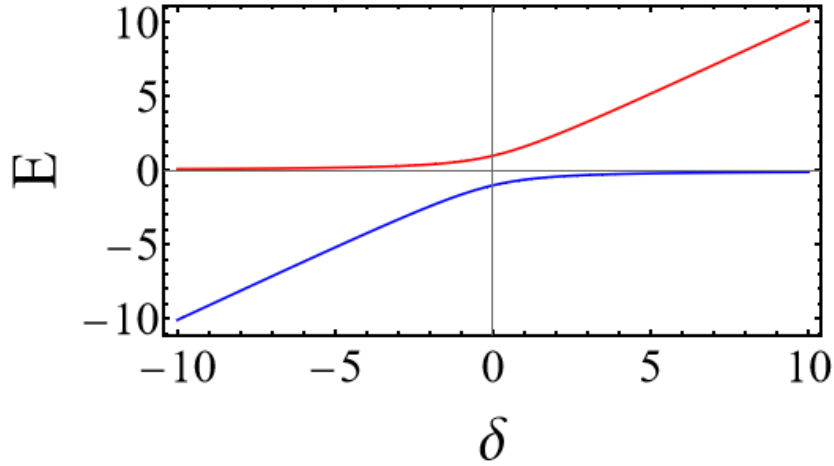


Figura 9: Se muestra el espectro de energía correspondiente a la Ecuación 4.24, donde el polaritón superior corresponde a la línea roja y el polaritón inferior a la línea azul donde se ha usado $\epsilon_{pu} = 1$ y se ha variado $\delta = \delta_0$.

$$\mathcal{D}(p) = -[\omega_p + \epsilon_c] \{ \Sigma_{12}(p) \Sigma_{21}(p) (\epsilon_c - \omega_p) - [\omega_p + (\epsilon_x - \epsilon_{pu}) - \Sigma_{11}(-p)] [(\omega_p - \epsilon_c)(\omega_p - (\epsilon_x - \epsilon_{pu}) - \Sigma_{11}(p))] \}. \quad (4.25)$$

Y tomando $\omega_p \rightarrow 0$,

$$\omega_{\pm} = -\epsilon_c \quad (4.26)$$

$$\omega_p = \epsilon_c \quad (4.27)$$

$$\omega_p = \frac{1}{2}(\Sigma_{11}(p) - \Sigma_{11}(-p)) \pm \left[(\epsilon_x - \epsilon_{pu} + \frac{1}{2}(\Sigma_{11}(p) + \Sigma_{11}(-p)))^2 - \Sigma_{12}(p) \Sigma_{21}(p) \right]^{1/2}. \quad (4.28)$$

Con lo que se recuperan los dos límites por separado.

5. Conclusión

El uso de la función de Green permitió obtener la energía de los polaritones inferiores y superiores así como el espectro del condensado de Bose-Einstein de excitones-polaritones de una forma eficaz, resultando ser un mejor método que la aproximación Hamiltoniana no hermitiana estudiado en el Proyecto Terminal I. Además, el uso de la segunda cuantización y teoría cuántica de campos hizo posible una mejor comprensión sobre la interacción en sistemas cuánticos de muchos cuerpos.

Finalmente, como un trabajo futuro se propone explotar la técnica comenzando con el estudio de los polos que surgen de la Ecuación 4.2

A. Reglas de Feynman en espacio de momento

1. Por cada línea punteada (corregir la línea roja por la punteada) que salga o entre del vértice hay un factor de $n_o^{1/2}$. El número total de líneas que entran en el diagrama debe el mismo que las líneas que salen del diagrama.
2. En el m-ésimo orden, el operador $\hat{H} - \mu\hat{n}$ se puede escoger de $m!$ maneras distintas. El factor $m!$ corresponde a las posibles formas de reetiquetar las diferentes líneas de interacción.
3. Cada diagrama de m-ésimo orden en la expansión de $G'(x, y)$ tiene un factor $(i/\hbar)^m (-i)^C (2\pi)^{4(C-m)}$ donde C es el número de factores n_o del condensado que aparecen en el diagrama
4. Ningún diagrama contribuye a menos que haya un ordenamiento temporal en el cual todas las las líneas de G^0 fluyan hacia delante en el tiempo.

Los vértices básicos para bosones se muestran en la Figura 10



Figura 10: Se describe: (Primero) Una partícula que entra al condensado en \mathbf{x} , $\hat{\Psi}(\mathbf{x})$, y la línea punteada (roja) corresponde a una partícula que sale del condensado, $\hat{\xi}_0^\dagger(\mathbf{x}) = n_o^{1/2}$. (Segundo) Una partícula del condensado se aniquila en \mathbf{x} , $\hat{\xi}_0(\mathbf{x}) = n_o^{1/2}$, y se crea una partícula, $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x})$. (Tercero) Una partícula que entra, $\hat{\Psi}(\mathbf{x})$, y sale, $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x})$, del condensado en \mathbf{x} . (Cuarto) Una partícula del condensado entra y sale de éste en \mathbf{x} .

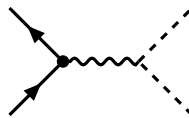


Figura 11: Se trata de una partícula que entra y sale del condensado en \mathbf{x}_1

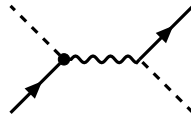


Figura 12: Una partícula entra al condensado en x_1 y sale de éste en x_2

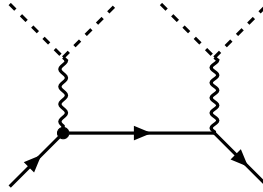


Figura 13: Una partícula entra y sale del condensado en x_1 , luego vuelve a entrar y salir en x_2

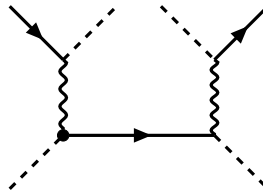


Figura 14: Una partícula entra al condensado en x_1 y sale en x_2 , luego entra de nuevo al condensado en x_3 y sale en x_4 .

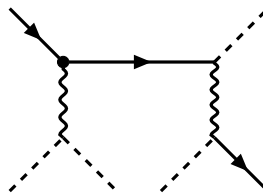


Figura 15: Una partícula entra y sale del condensado en x_1 , luego vuelve a entrar en x_2 y sale en x_3 .

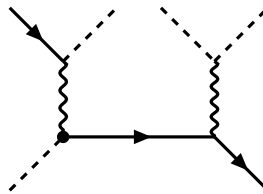


Figura 16: Una partícula entra al condensado en x_1 y sale en x_2 , luego entra de nuevo al condensado en x_3 y sale en x_3 .

Referencias

- [1] Hui Deng, Gregor Weihs, David Snoke, Jacqueline Bloch, and Yoshihisa Yamamoto. Polariton lasing vs. photon lasing in a semiconductor microcavity. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 100(26):15318–15323, 2003.
- [2] JJ Hopfield. Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant

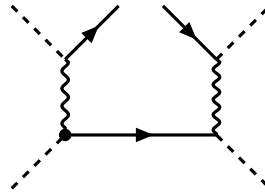


Figura 17: Una partícula sale del condensado en x_1 y otra en x_2 y luego entra al condensado en x_3 . Y en x_4 entra una partícula al condensado.

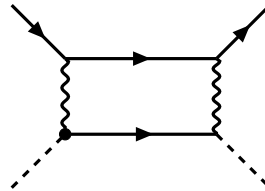


Figura 18: Una partícula entra y sale del condensado en x_1 y entra de nuevo y sale en x_2 . Mientras que otra sale del condensado en x_3 y vuelve a entrar en x_4 .

of crystals. *Physical Review*, 112(5):1555, 1958.

- [3] Cristiano Ciuti and Iacopo Carusotto. Quantum fluid effects and parametric instabilities in microcavities. *physica status solidi (b)*, 242(11):2224–2245, 2005.
- [4] Alexey V Kavokin, Alexandra S Sheremet, Ivan A Shelykh, Pavlos G Lagoudakis, and Yuri G Rubo. Exciton-photon correlations in bosonic condensates of exciton-polaritons. *Scientific reports*, 5(1):1–8, 2015.
- [5] MA Bastarrachea-Magnani, A Camacho-Guardian, M Wouters, and GM Bruun. Strong interactions and biexcitons in a polariton mixture. *Physical Review B*, 100(19):195301, 2019.
- [6] Christopher J Pethick and Henrik Smith. *Bose–Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge university press, 2008.
- [7] Verena Kohnle, Yoan Léger, Michiel Wouters, Maxime Richard, MT Portella-Oberli, and B Deveaud. Four-wave mixing excitations in a dissipative polariton quantum fluid. *Physical Review B*, 86(6):064508, 2012.
- [8] Iacopo Carusotto and Cristiano Ciuti. Quantum fluids of light. *Reviews of Modern Physics*, 85(1):299, 2013.
- [9] Alexander L Fetter and John Dirk Walecka. *Quantum theory of many-particle systems*. Courier Corporation, 2012.
- [10] Henrik Bruus and Karsten Flensberg. *Many-body quantum theory in condensed matter physics: an introduction*. OUP Oxford, 2004.
- [11] Alexander Altland and Ben D Simons. *Condensed matter field theory*. Cambridge university press, 2010.
- [12] ST Beliaev. Energy spectrum of a non-ideal bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 7(2):299–307, 1958.

- [13] Pavel Cejnar, Pavel Stránský, Michal Macek, and Michal Kloc. Excited-state quantum phase transitions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 54(13):133001, 2021.
- [14] Yueh-Nan Chen, Neill Lambert, and Franco Nori. Detecting bose-einstein condensation of exciton-polaritons via electron transport. *Physical Review B*, 80(23):235335, 2009.
- [15] Pierre Meystre and Murray Sargent. *Elements of quantum optics*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [16] Bo Han, Cédric Robert, Emmanuel Courtade, Marco Manca, Shivangi Shree, Thierry Amand, Pierre Renucci, Takashi Taniguchi, Kenji Watanabe, Xavier Marie, et al. Exciton states in monolayer mose 2 and mote 2 probed by upconversion spectroscopy. *Physical Review X*, 8(3):031073, 2018.
- [17] N Zettili. Quantum mechanics concepts and applications: John wiley & sons ltd uk. 2009.
- [18] Jacek Kasprzak, Murielle Richard, S Kundermann, A Baas, P Jeambrun, Jonathan Mark James Keeling, FM Marchetti, MH Szymańska, R André, JL Staehli, et al. Bose–einstein condensation of exciton polaritons. *Nature*, 443(7110):409–414, 2006.
- [19] Maciej Pieczarka, Eliezer Estrecho, Maryam Boozarjmehr, Olivier Bleu, Mark Steger, Kenneth West, Loren N Pfeiffer, David W Snoke, Jesper Levinsen, Meera M Parish, et al. Observation of quantum depletion in a non-equilibrium exciton–polariton condensate. *Nature communications*, 11(1):1–7, 2020.
- [20] D Snoke, S Denev, Y Liu, L Pfeiffer, and K West. Long-range transport in excitonic dark states in coupled quantum wells. *Nature*, 418(6899):754–757, 2002.
- [21] J Ginibre. On the asymptotic exactness of the bogoliubov approximation for many boson systems. *Communications in Mathematical Physics*, 8(1):26–51, 1968.
- [22] LV Keldysh and AN Kozlov. Collective properties of excitons in semiconductors. *Sov. Phys. JETP*, 27(3):521, 1968.
- [23] N Bogoliubov. On the theory of superfluidity. *J. Phys*, 11(1):23, 1947.