



**NOTAS DE APOYO A LA  
INVESTIGACIÓN EN TRANSISTORES  
POLARITÓNICOS**

**Autor:**

Jesús Gerardo Huerta Escobar

**Asesor :**

Dr. Bastarrachea Magnani Miguel Angel

**Servicio Social**

13 de febrero al 13 de agosto 2021

**Departamento de Física**  
**Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa**

# Índice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Introducción</b>   | <b>4</b>  |
| <b>2. Estado de la cuestión</b>                                  | <b>5</b>  |
| <b>3. Condensado de Bose-Einstein</b>                            | <b>9</b>  |
| 3.1. Temperatura de transición . . . . .                         | 9         |
| 3.2. Distribución de Bose-Einstein . . . . .                     | 10        |
| 3.3. Densidad de estados . . . . .                               | 12        |
| 3.4. Fracción de condensación . . . . .                          | 13        |
| 3.4.1. Condensación en tres dimensiones . . . . .                | 15        |
| 3.4.2. Condensación en dos dimensiones . . . . .                 | 16        |
| <b>4. Ecuación de Gross-Pitaevskii</b>                           | <b>18</b> |
| <b>5. Excitones-Polaritones.</b>                                 | <b>28</b> |
| 5.1. Microcavidades ópticas . . . . .                            | 28        |
| 5.2. Excitones . . . . .   | 31        |
| 5.3. Excitones-Polaritones . . . . .                             | 33        |
| 5.4. Condensación de Excitones-Polaritones . . . . .             | 35        |
| 5.5. Ecuación de Gross-Pitaevskii para polaritones . . . . .     | 37        |
| <b>6. Compuertas lógicas</b>                                     | <b>40</b> |
| 6.1. Álgebra de Boole . . . . .                                  | 40        |
| 6.2. Compuertas lógicas . . . . .                                | 41        |
| 6.2.1. Compuerta NOT . . . . .                                   | 42        |
| 6.2.2. Compuerta OR . . . . .                                    | 42        |
| 6.2.3. Compuerta AND . . . . .                                   | 43        |
| 6.2.4. Compuerta NOR . . . . .                                   | 43        |
| <b>7. Lógica totalmente óptica</b>                               | <b>45</b> |
| 7.1. Transistor polaritónico . . . . .                           | 45        |
| 7.2. Compuertas AND, OR y NOR. . . . .                           | 50        |
| 7.2.1. Compuertas AND y OR . . . . .                             | 51        |
| 7.2.2. Compuertas NOT y NOR . . . . .                            | 54        |
| <b>8. Conclusiones</b>   | <b>60</b> |
| <b>A. Apéndice: Ecuación de Gross-Pitaevskii con espín</b>       | <b>61</b> |
| A.1. Notación . . . . .  | 61        |
| A.2. Generalización de la Ecuación de Gross-Pitaevskii . . . . . | 62        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>B. Apéndice: Códigos</b>  | <b>66</b> |
| B.1. Cálculo de la densidad del condensado y la distribución<br>de Bose-Einstein (Python) . . . . .  | 66        |
| B.2. No linealidad presentada en la ecuación de Gross-Pitaevskii.<br>Fig. 13 (Mathematica) . . . . . | 68        |
| <b>References</b>  | <b>71</b> |

# 1. Introducción

En las últimas décadas la implementación de microcavidades ópticas semiconductoras ha tenido un fuerte impacto en el estudio de la interacción luz-materia debido a que permite la manipulación y el análisis de los excitones-polaritones. Mientras que los excitones son estados ligados entre un agujero y un electrón, los excitones-polaritones de microcavidad son cuasipartículas resultantes del acoplamiento fuerte entre un excitón y un fotón. Podemos pensar a los polaritones como entidades que heredan propiedades sintonizables tanto de la luz como de la materia, procedentes de los fotones y excitones, respectivamente. Debido a sus masas reducidas, los excitones-polaritones se comportan como bosones, lo que permite obtener efectos cuánticos como la condensación de Bose-Einstein. A partir de esto se pueden formar fluidos polaritónicos que tienen la capacidad de interactuar entre ellos dando lugar a la posibilidad de manipulación de estos fluidos.

El avance en el estudio de los polaritones de microcavidades ha permitido su implementación en múltiples funciones esenciales de tecnologías cuánticas, por ejemplo, en el desarrollo de un transistor totalmente óptico en donde, a partir de la interacción entre fluidos polaritónicos, es posible generar fenómenos no lineales sintonizables capaces de crear una señal de salida y usarla como señal de entrada de otro transistor, demostrando así la propiedad de cascabilidad y amplificación de señal en sistemas totalmente ópticos.

En este trabajo se describen las propiedades de los fluidos polaritónicos para su implementación en la creación de puertas lógicas basadas en polaritones y sus posibles implicaciones directas en la creación de circuitos integrados totalmente ópticos.



## 2. Estado de la cuestión

La implementación de la óptica en la creación de dispositivos es conocida como tecnología óptica. Generalmente los instrumentos creados mediante el uso de esta tecnología tienen aplicación tanto en el ramo científico como en el industrial, y su desarrollo es una actividad en la que se están invirtiendo esfuerzos cada vez más crecientes [5]. Existen múltiples ventajas en la implementación de la tecnología óptica respecto a la tecnología electrónica. Lo que se busca con esta tecnología en general es crear mejores herramientas para simplificar el ahorro de tiempo, esfuerzo de trabajo y energía. Se espera que la aparición de un dispositivo óptico en reemplazo de su homólogo electrónico, venga acompañada con una mejora en la eficiencia de la realización de la tarea para la que fue originalmente creado. Por estas razones nos encontramos rodeados de tecnología de esta naturaleza con mayor frecuencia. Ejemplos son los láseres, diodos emisores de luz o LEDs y dispositivos de almacenamiento computacional. Por mencionar sólo algunos.

La transmisión de información es un proceso centrado en el intercambio de cantidad de información de un punto a otro a través de un canal. Uno de los intereses prácticos de la tecnología óptica es desarrollar nuevas técnicas en el ramo de la transmisión de información pues ha prometido ser más eficiente que la tecnología electrónica propuesta para este mismo fin. Algunas de las ventajas de las redes ópticas frente a su homólogo electrónico son: transmisión de información a mayor velocidad, menor disipación de energía, un ancho de banda más amplio, menor costo energético por operación y una mayor seguridad en la transmisión de información [13]. En la ruta para lograr obtener un mejor procesamiento de información existen problemas técnicos que aún se tienen que resolver para obtener, por ejemplo, un ordenador totalmente óptico. Debido a su naturaleza óptica un dispositivo de este tipo tendría varias ventajas importantes como: bajo calentamiento, mayor velocidad de procesamiento, inmunidad a la interferencia electromagnética, transmisión de baja pérdida y mayor densidad de almacenamiento [5]. Es decir, en estos dispositivos habría menos disipación de energía, lo que a su vez no generaría calentamiento en los sistemas. Lo más probable es que, para un futuro a corto o a mediano plazo, lo que vamos a ver es una combinación de procesos clásicos y ópticos que harán más eficientes los ordenadores con los que ya contamos en nuestro día a día.

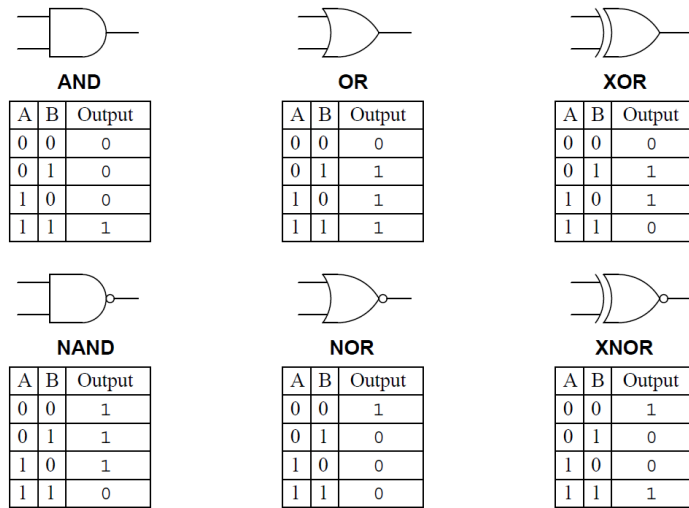


Figura 1: Las compuertas lógicas son consideradas la base de la toma de decisiones en los dispositivos electrónicos digitales [7]. Esencialmente, una compuerta lógica toma la señal de entrada y produce una sola señal de salida al realizar operaciones sobre la señal de entrada. La entrada y salida de una compuerta lógica está en forma de bits (dígitos binarios) que son 0 o 1. Las compuertas lógicas más simples tienen dos entradas y una salida con la excepción de la compuerta NOT. Lo observado en esta figura son las tablas de verdad para distintas compuertas lógicas. Las tablas de verdad en un sistema lógico describen las señales de salidas devueltas por el sistema para un par de señales de entrada recibidas. Estas entradas y salidas se utilizan para etiquetar con 0 y 1 las columnas de una tabla de verdad; las filas representan todas las posibles entradas al circuito y las salidas correspondientes. Típicamente, para sistemas lógicos electrónicos, el estado 0 (estado bajo) describe una señal de aproximadamente 0 voltios (0 V), mientras que el estado 1 (estado alto) representa una señal de aproximadamente cinco voltios (+5 V) [7]. En la sección 6 se discute con más detalle el funcionamiento de las compuertas lógicas y su implementación en circuitos lógicos.

En computación generalmente se trabaja con compuertas lógicas (ver figura 1). Las compuertas lógicas son los constituyentes básicos en la elaboración de procesadores, debido a que de manera combinada estas compuertas actúan como un bloque de construcción de los circuitos que realizan las funciones lógicas básicas, las cuales son fundamentales en los dispositivos electrónicos digitales [7]. Por consiguiente, cuando estas compuertas lógicas son combinadas pueden ser pensadas como meros circuitos electrónicos que a su vez están formados internamente por transistores dispuestos de tal manera que otorgan señales de voltaje específicas. Esta respuesta permite todo el proceso de lógica que ocurre en

los circuitos integrados, por ejemplo, en los ordenadores convencionales. El transistor electrónico ha logrado que los circuitos electrónicos tengan una alta potencia de cálculo debido a su alta densidad de componentes. De modo que un paso importante a dar en la dirección del desarrollo de circuitos integrados ópticos es la implementación de un transistor totalmente óptico.

Un transistor que opera con fotones en lugar de electrones a menudo se anuncia como el siguiente paso en el procesamiento de la información, debido a la velocidad que tiene la luz en un medio óptico, respecto a la velocidad de los electrones en los semiconductores. Esto produce una alta velocidad de conmutación. Además de esta ventaja, se añaden la de un menor consumo de energía por operación y la alta compatibilidad con los sistemas de comunicación óptica. Todo lo cual permitiría la construcción de tecnología significativamente más potente para el procesamiento y transmisión de información. Si realmente se quiere tener éxito en la creación de lógica con luz, entonces los dispositivos deben satisfacer varios criterios cualitativos, algunos de los más importantes son especificados en el recuadro I. La cascabilidad, uno de los requisitos que la lógica totalmente óptica tiene que lograr cubrir, se aborda con más detalle adelante en estas notas.

Un enfoque que se ha propuesto para abordar el problema de la construcción de un transistor totalmente óptico es el de los excitones-polaritones de microcavidad que, en su fase condensada fuera del equilibrio, han abierto el camino para el estudio de nuevos fenómenos, los cuales podrían acercarnos a las operaciones lógicas ópticas a una temperatura ambiente, característica vital para el uso a gran escala de estos dispositivos totalmente ópticos. En la siguiente sección se discutirá en general sobre la condensación de Bose-Einstein y luego para los excitones-polaritones.

## Recuadro I | Criterios para una lógica totalmente óptica.

Los siguientes requisitos, presentados en la Ref. [14], son esenciales para cualquier dispositivo basado en lógica óptica.

**Cascadabilidad (*cascadability*).** La salida de una etapa del procesamiento de señales debe estar en la forma correcta para lograr impulsar la entrada de la siguiente etapa. En decir, las longitudes de onda de entrada y salida, las formas del haz y las formas del pulso deben ser compatibles.

**Cargabilidad de salida (*Fan-out*).** La salida de una etapa debe ser suficiente para impulsar las entradas de al menos dos etapas posteriores. Sin embargo, no se requiere una ganancia de emisión estimulada; es suficiente que los pequeños cambios de potencia de entrada den como resultado cambios de potencia de salida mayores.

**Restauración a nivel lógico (*Logic-Level restoration*).** La calidad de la señal lógica se debe restaurar para que las degradaciones en la calidad de la señal no se propaguen a través del sistema; es decir, la señal se “limpia” en cada etapa.

**Aislamiento de entrada/salida (*Input/output isolation*).** No es deseable que las señales obtenidas en la salida se comporten como si fueran señales de entrada, ya que esto dificulta el diseño del sistema. Por tanto, es necesario un dispositivo con haces de entrada y salida separados.

**Ausencia de sesgos críticos (*Absence of critical biasing*).** No es óptimo tener que configurar el punto de funcionamiento de cada dispositivo con un alto nivel de precisión. Un dispositivo con la característica de entrada/salida tiene una ganancia de señal alrededor de un punto de polarización y también proporciona cierta restauración del nivel lógico, pero requiere que el punto de polarización se establezca con mucha precisión.

**Nivel lógico independiente de la pérdida (*Logic level independent of loss*).** El nivel lógico representado en una señal no debería depender de la pérdida de transmisión, ya que esta pérdida puede variar para diferentes rutas de un sistema.

### 3. Condensado de Bose-Einstein

Un condensado de Bose-Einstein es un estado cuántico macroscópico de la materia descrito por la estadística de Bose-Einstein; este estado puede formarse cuando un gas de bosones (con espín entero) se enfría cerca del cero absoluto. A esa temperatura una fracción de los bosones pueden ser descritos por una sola función de onda. En esta sección se abordan los aspectos más fundamentales del condensado de Bose-Einstein, entre los que incluyen la temperatura de transición y el fracción de condensación. La presentación de estos temas sigue la de la referencia [15].

#### 3.1. Temperatura de transición

La temperatura de transición  $T_c$ , es comúnmente definida como la temperatura más alta en la que aparece la ocupación macroscópica del estado de menor energía. Es a partir de esta temperatura que comienza a ocurrir el estado de condensación. Esto se debe a que a esta temperatura el nivel fundamental del gas comienza a llenarse macroscópicamente, es decir, los bosones comienzan a condensarse; esto se entiende como que una fracción de los bosones ocupa el menor nivel de energía posible. Dado que la longitud de onda es grande, las partículas se comportarán como una función de onda global. Debido a esto, los átomos serán descritos mediante una función de onda idéntica; por consiguiente, se obtendrá un estado de coherencia cuántica macroscópica.

Un orden de magnitud estimado para la temperatura de transición al estado condensado de Bose-Einstein se puede obtener mediante argumentos dimensionales. Para un gas uniforme de partículas libres, las únicas cantidades relevantes son la masa de las partículas  $m$ , el número de partículas por unidad de volumen  $n$ , y la constante de Planck  $\hbar = 2\pi\hbar$ . La única cantidad que tiene dimensiones de energía que puede ser formada por  $\hbar$ ,  $n$  y  $m$  es  $\hbar n^{2/3}/m$ . Dividiendo esta energía por la constante de Boltzmann  $k$  podemos obtener un estimado de la temperatura de condensación  $T_c$ .

$$T_c = C \frac{\hbar n^{2/3}}{mk}, \quad (1)$$

donde  $C$  es una constante de proporcionalidad.

Otra manera de relacionar la temperatura de transición con la densidad de partículas es comparar la longitud de la onda térmica de De Broglie  $\lambda_T$  con el espaciado medio entre partículas, que es del orden de  $n^{-1/3}$ . La longitud de onda térmica de De Broglie es

$$\lambda_T = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Lo que ocurre cuando la temperatura es alta, es que la longitud de onda térmica de De Broglie se vuelve pequeña a comparación del espaciado entre partículas del sistema. Por este motivo podemos apoyarnos de esta longitud característica para poder describir el estado de transición del sistema. Cuando la temperatura disminuye, la longitud de onda térmica de De Broglie aumenta. En el momento en que  $\lambda_T$  es comparable a la longitud de espaciado de los bosones, el sistema comienza a exhibir un comportamiento cuántico debido a que las funciones de onda de las partículas se superponen y para poder dar una correcta descripción de este nuevo estado del sistema es necesario utilizar mecánica cuántica. Es decir, alcanzada la temperatura de transición, una fracción del sistema podrá ser descrito como una nube de partículas bosónicas que ocuparán el mismo estado cuántico, a este estado se le denomina condensado de Bose-Einstein.

A continuación se discuten algunas propiedades de un gas de Bose no interactuante. Se revisará porque es importante entender algunas características que describen el comportamiento del condensado como lo son: la distribución estadística que describe a dicho estado, la temperatura de transición y la fracción de partículas en el condensado. Por medio de todas estas propiedades se podrá establecer un sistema análogo de excitones-polaritones, que es la base para la creación de lógica totalmente óptica expuesta en este trabajo.

### 3.2. Distribución de Bose-Einstein

En sistemas constituidos por bosones no interactuantes en equilibrio termodinámico, el número medio de ocupación del estado de una sola partícula  $\nu$ , viene dado por la función de distribución de Bose-Einstein,

$$f^0(\epsilon_\nu) = \frac{1}{e^{(\epsilon_\nu - \mu)/kT} - 1}, \quad (3)$$

donde  $\epsilon_\nu$  es la energía del estado de una sola partícula para el potencial de captura particular en consideración,  $\mu$  es el potencial químico. Definimos  $\zeta = \exp(\mu/kT)$ , que se conoce como fugacidad. Algunas veces es conveniente escribir la función de distribución de Bose en términos de la fugacidad,

$$f^0(\epsilon_\nu) = \frac{1}{\zeta^{-1}e^{\epsilon_\nu/kT} - 1}. \quad (4)$$

Si para una sola partícula tomamos el cero de energía como el estado más bajo, la fugacidad es menor que la unidad por encima de la temperatura de transición e igual a la unidad en el estado condensado. En la figura [2](#) se muestra el comportamiento de la ecuación (4) para distintos valores de  $\zeta$ .

A altas temperaturas, los efectos de la estadística cuántica se vuelven insignificantes y la función de distribución viene dada aproximadamente por la distribución de Boltzmann:

$$f^0(\epsilon_\nu) \approx e^{-(\epsilon_\nu - \mu)/kT}. \quad (5)$$

Escribiendo la distribución de Boltzmann en términos de la fugacidad se obtiene,

$$f^0(\epsilon_\nu) \approx \zeta e^{-\epsilon_\nu/kT}. \quad (6)$$

De la figura [2](#) se puede observar que la distribución de Boltzmann es válida en el límite clásico. Sin embargo, cuando el sistema no se encuentra en este régimen (baja temperatura o alta densidad), los efectos cuánticos son significativos debido a que la separación media entre las partículas se encuentra en el orden de magnitud de la longitud de onda térmica de De Broglie, lo que imposibilita un tratamiento clásico. Es precisamente en este límite en el que la estadística de Bose-Einstein explica el comportamiento exhibido por el sistema.

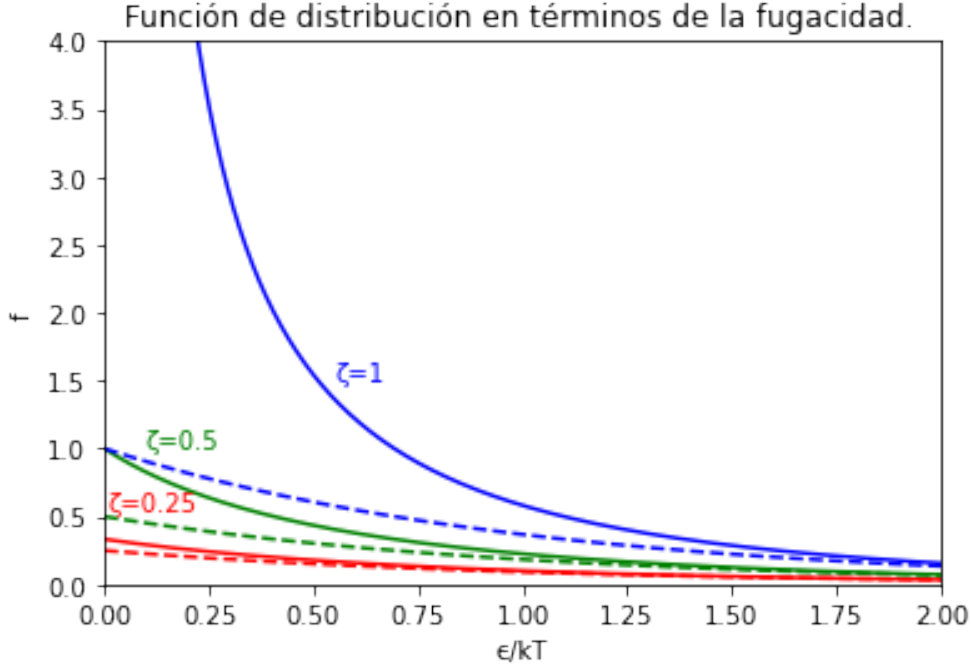


Figura 2: Distribución de Bose-Einstein (línea continua) y Boltzmann (línea punteada) en función de la energía para distintos valores de la fugacidad:  $\zeta = 1$ ,  $\zeta = 0,5$  y  $\zeta = 0,25$ . En azul, verde y rojo, respectivamente.

### 3.3. Densidad de estados

La energía total para una partícula libre en tres dimensiones y de momento  $\mathbf{p}$  es  $\epsilon_{\mathbf{p}} = p^2/2m$ . Mientras que en el espacio de momentos en un volumen es  $4\pi p^3/3$ , así, el número total de estados  $G(\epsilon)$  es [15],

$$G(\epsilon) = \frac{4\pi}{3} \frac{(2m\epsilon)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (7)$$

$$G(\epsilon) = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} \frac{(2m\epsilon)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} = V \frac{4\pi}{3} \frac{(2m\epsilon)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} = V \frac{2^{1/2}}{3\pi^2} \frac{(m\epsilon)^{3/2}}{\hbar^3}. \quad (8)$$

La densidad de estados se define como

$$g(\epsilon) = \frac{dG(\epsilon)}{d\epsilon}. \quad (9)$$

Substituyendo  $G(\epsilon)$  en (9), se obtiene,



$$g(\epsilon) = V \frac{2^{1/2}}{3\pi^2 \hbar^3} m^{3/2} \frac{3}{2} \epsilon^{1/2} = \frac{V m^{3/2}}{2^{1/2} \pi \hbar^3} \epsilon^{1/2}. \quad (10)$$

La densidad de estados  $g(\epsilon)$ , generalmente es definida como el número de estados del sistema cuyas energías toman los valores comprendidos entre un intervalo de energía. Comúnmente es expresada como una función de distribución de densidad de probabilidad y representa un promedio de los distintos estados ocupados por el sistema.

### 3.4. Fracción de condensación

Dado que la función de distribución de probabilidad de Bose-Einstein se usa para encontrar la probabilidad de que un bosón ocupe un estado cuántico específico en un sistema en equilibrio térmico, entonces, a partir de esta distribución y la de la densidad de estados, es posible calcular propiedades como la energía interna o el número de partículas  $N_{ex}$ . Para los cálculos subsecuentes, la relación que aquí interesa es el número de partículas en estados excitados. La relación entre el número de partículas, el producto de la densidad de estados y la distribución de probabilidad de Bose-Einstein  $f^0(\epsilon)$ , viene dada por

$$N_{ex} = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) f^0(\epsilon), \quad (11)$$

aquí, la densidad de estados generalizada para este tipo de sistemas está dada por la Eq. (10). Se define la constante de proporcionalidad  $C_\alpha = \frac{V m^{2/3}}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3}$ .

Así,

$$g(\epsilon) = C_\alpha \epsilon^{\alpha-1}, \quad (12)$$

donde  $\alpha = d/2$  y  $d$  son las dimensiones en las que se encuentra el sistema. Por ejemplo, para un gas confinado en tres dimensiones por paredes rígidas,  $\alpha$  es igual a  $3/2$ . Sustituyendo esto en la ecuación (11), y con  $\mu = 0$ , resulta en

$$N = N_{ex}(T_c, \mu = 0) = C_\alpha \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{\alpha-1} \frac{1}{e^{\epsilon/kT_c} - 1}. \quad (13)$$

Esta expresión puede ser escrita en términos de la variable adimensional  $x = \epsilon/kT_c$ , como

$$N = \int_0^\infty C_\alpha \frac{\epsilon^{\alpha-1}}{e^{\epsilon/kT} - 1} \frac{\left(\frac{1}{kT_c}\right)^{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{kT_c}\right)^{\alpha-1}} kT_c dx = C_\alpha (kT_c)^\alpha \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} dx. \quad (14)$$

Al tener convergencia para  $\alpha > 1$ , podemos usar  $\int_0^\infty dx \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} = \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)$ , para escribir  $kT_c$  como,

$$kT_c = \frac{N^{1/\alpha}}{[C_\alpha \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)]^{1/\alpha}}. \quad (15)$$

Por debajo de la temperatura de transición, el número  $N_{ex}$  de partículas en estados excitados viene dado por la ecuación (11) con  $\mu = 0$ ,

$$N_{ex}(T) = C_\alpha \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{\alpha-1} \frac{1}{e^{\epsilon/kt} - 1}, \quad (16)$$

usando  $\int_0^\infty dx \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} = \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)$ , podemos escribir el resultado como

$$N_{ex} = C_\alpha \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)(kT)^\alpha. \quad (17)$$

Resultado que no depende del número total de partículas. Sin embargo, escribiendo la expresión (16), como  $k^\alpha C_\alpha \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha) = N/T_c^\alpha$  y sustituyendola en (18), se obtiene,

$$N_{ex} = C_\alpha \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)(kT)^\alpha = T^\alpha \frac{N}{T_c^\alpha}, \quad (18)$$

$$N_{ex} = N \left(\frac{T}{T_c}\right)^\alpha. \quad (19)$$

El número de partículas en el condensado está dado por

$$N_0(T) = N - N_{ex}(T). \quad (20)$$

Sustituyendo (20) en (21), obtenemos,

$$N_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^\alpha\right]. \quad (21)$$

Esta es la expresión que comúnmente es utilizada para determinar el número de partículas en el condensado.

Ahora es posible realizar un estudio de casos, comenzando con el un sistema de partículas en una caja en tres dimensiones.

### 3.4.1. Condensación en tres dimensiones

En este caso,  $\alpha = 3/2$ , el número de partículas excitadas por unidad de volumen  $n_{ex}$ , se puede obtener como sigue.

Se toma en consideración a la siguiente expresión

$$N_{ex} = C_{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right) (kT)^{3/2}, \quad (22)$$

y

$$C_{3/2} = \frac{Vm^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}. \quad (23)$$

Dado que

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (24)$$

$$n_{ex} = \frac{N_{ex}}{V} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{m^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3} (kT_c)^{3/2}, \quad (25)$$

$$n_{ex} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{mkT}{2^{3/2}\pi^{3/2}\hbar^2}\right)^{3/2}. \quad (26)$$

Mientras que la fracción de partículas en el estado condensado para este caso,  $\alpha = 3/2$ , es

$$N_0 = N \left[ 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \right]. \quad (27)$$

La ecuación indica que la fracción de partículas con velocidad cero se aproxima al 100 % cuando  $T \rightarrow 0$ . En la siguiente figura se muestra este resultado.

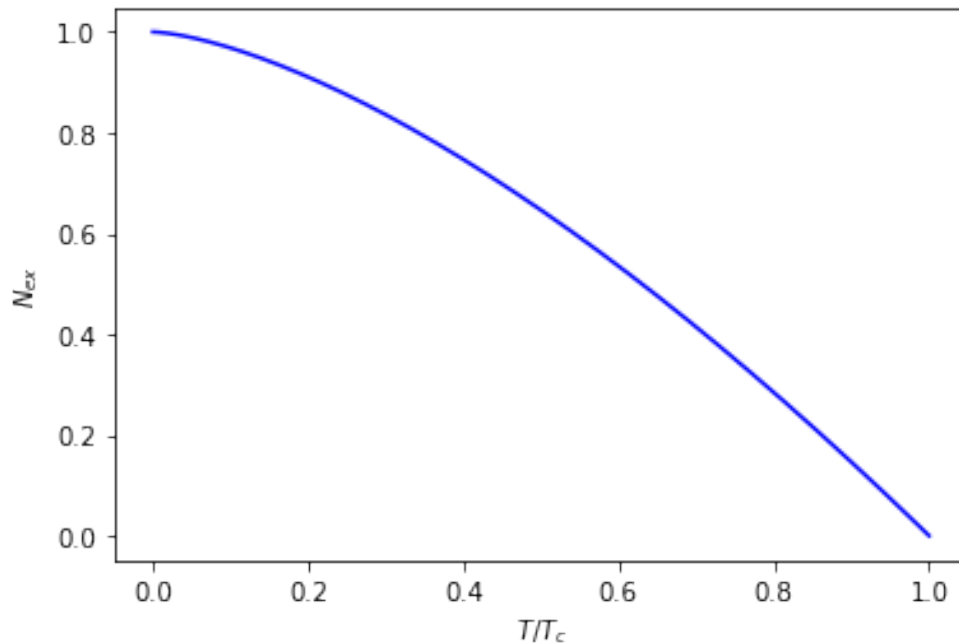


Figura 3: Fracción de condensación del número de partículas en el condensado contra la temperatura.

En esta figura se observa que para  $T = T_c$ , el número de partículas en el estado basal es despreciable. Una vez que  $T$  decrece por debajo de  $T_c$ , el número de partículas crece rápidamente. Teóricamente, estas partículas poseen energía cero y momento cero. Debido a esto, no contribuyen a la presión del fluido ni poseen viscosidad. El proceso en que se concentran partículas en el estado base de energía cero, se conoce como condensación de Bose-Einstein.

### 3.4.2. Condensación en dos dimensiones

Para el caso de un gas en dos dimensiones en el que  $\alpha = 1$ , se puede proponer el cálculo del número de partículas excitadas por unidad de volumen,  $n_{ex}$ , usando las expresiones (18) y (12), como sigue

De la ecuación (18) tenemos que

$$N_{ex} = C_2 \Gamma(2) \zeta(2). \quad (28)$$

Mientras que de la ecuación (13)

$$g(\epsilon) = C_\alpha \epsilon^{\alpha-1} = C_\alpha \epsilon^{1-1} = C_\alpha. \quad (29)$$

Es interesante notar que esta expresión no depende de la energía  $\epsilon$ . Esto motiva a considerar que la condensación en dos dimensiones puede ocurrir independientemente de la energía a la que se encuentre el sistema, lo que, por supuesto, no concuerda con el análisis presentado en las secciones 3.1 y 3.2. El motivo de esta discordancia es que para el caso en el que  $d = 2 = \alpha = 1$ , la integral de la expresión (15) diverge, por lo que la temperatura tiende a cero. La condensación de Bose-Einstein en una caja bidimensional sólo podría ocurrir a temperatura cero. Sin embargo, para un gas de Bose bidimensional, puede existir condensación a temperatura distinta de cero si las partículas se encuentran confinadas por un potencial de tipo oscilador armónico [15]. Por otra parte, se ha observado la condensación en dos dimensiones para sistemas de excitones-polaritones en microcavidades [9]. En la sección 5 se abordan este tipo de condensados.

## 4. Ecuación de Gross-Pitaevskii

El comportamiento de la dinámica del condensado de Bose-Einstein para el régimen de bajas temperaturas puede ser descrito por la ecuación de Gross-Pitaevskii, la cual es una aproximación que involucra las interacciones entre las partículas [15]. Para lograr obtener la ecuación de Gross-Pitaevskii se considerará una aproximación de campo medio. Bajo esta aproximación se parte de la suposición de que la acción sobre una partícula, debida a todas las demás partículas, es sustituida por la acción promedio de todo el condensado. De esta forma se obtiene un modelo simplificado para la interacción entre bosones, que es válido para gases diluidos.

Se considera una aproximación de campo medio y se parte de la suposición de que la función de onda es un producto simetrizado de funciones de onda de una sola partícula. En el estado completamente condensado, todos los bosones se encuentran en el mismo estado de una sola partícula  $\phi(\mathbf{r})$ . Por lo que podemos escribir la función de onda del sistema de  $N$  partículas como

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \phi(\mathbf{r}_i). \quad (30)$$

La función de onda de una sola partícula  $\phi(\mathbf{r})$  está normalizada:

$$\int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^2 = 1. \quad (31)$$

Esta función de onda no contiene las correlaciones producidas por la interacción cuando dos átomos están cerca el uno del otro. Esos efectos se tienen en cuenta mediante la interacción de contacto:  $U_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ .

Entonces, el Hamiltoniano del sistema se puede escribir como

$$H = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{p_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) \right] + U_0 \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (32)$$

donde  $V(\mathbf{r})$ , es el potencial externo.

La energía del estado descrito por la ecuación [30] está dada por,

$$E = N \int d\mathbf{r} \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\phi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r})|\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{(N-1)}{2} U_0 |\phi(\mathbf{r})|^4 \right]. \quad (33)$$

Podemos pasar de la expresión (32) a la expresión (33) por medio del valor esperado del Hamiltoniano, pues  $\langle H \rangle = E$ , obteniéndose la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \langle \phi | H | \phi \rangle &= \left\langle \prod_{i=1}^N \phi(\mathbf{r}_i) \left| H \right| \prod_{i=1}^N \phi(\mathbf{r}_i) \right\rangle = \quad (34) \\ &= \left\langle \prod_{i=1}^N \phi(\mathbf{r}_i) \left| \sum_{i=1}^N \left[ \frac{p_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) \right] + U_0 \sum_{i<j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right| \prod_{i=1}^N \phi(\mathbf{r}_i) \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N \phi^*(\mathbf{r}_i) \left[ \sum_{i=1}^N \left[ \frac{p_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) \right] + U_0 \sum_{i<j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right] \prod_{i=1}^N \phi(\mathbf{r}_i) d^3\mathbf{r} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 \left[ \sum_{i=1}^N \left[ \frac{p_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) \right] + U_0 \sum_{i<j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right] d^3\mathbf{r}. \end{aligned}$$

La energía cinética se define como

$$\frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{1}{2m} \left( -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right). \quad (35)$$

Por lo que

$$\frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2. \quad (36)$$

Podemos utilizar la expresión (36) en la ecuación (4), obteniéndose lo siguiente,

$$\begin{aligned} \langle \phi | H | \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 \left[ \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}_i) \right] + \right. \quad (37) \\ &\quad \left. U_0 \sum_{i<j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right] d^3\mathbf{r}, \end{aligned}$$

$$\langle \phi | H | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \prod_{i=1}^N \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 + V(\mathbf{r}_i) |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 \right] + U_0 \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \prod_{i=1}^N |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 \right] d^3 \mathbf{r}, \quad (38)$$

Al operar el producto y la suma sobre el cuadrado de la función de onda simetrizada se obtiene

$$\prod_{i=1}^N \sum_{i=1}^N |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 = |\phi(\mathbf{r}_1)|^2 + \dots + |\phi(\mathbf{r}_N)|^2 = N |\phi(\mathbf{r})|^2, \quad (39)$$

$$\prod_{i=1}^N \sum_{i=1}^N |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 = N |\phi(\mathbf{r})|^2. \quad (40)$$

Usando la expresión (40) en la ecuación (38), obtenemos

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \prod_{i=1}^N \sum_{i=1}^N \nabla^2 |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 + \prod_{i=1}^N \sum_{i=1}^N V(\mathbf{r}_i) |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 \right. \\ &\quad \left. + U_0 \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \prod_{i=1}^N |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 \right] d^3 \mathbf{r}, = \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} N |\nabla \phi(\mathbf{r}_i)|^2 + N V(\mathbf{r}_i) |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 \right. \\ &\quad \left. + U_0 \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \prod_{i=1}^N |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 \right] d\mathbf{r}^{3d}, = \\ &N \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} N |\nabla \phi(\mathbf{r}_i)|^2 + N V(\mathbf{r}_i) |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 \right) d\mathbf{r}^{3D} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} U_0 \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \prod_{i=1}^N |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 d\mathbf{r}^{3d}. \end{aligned} \quad (41)$$

Obviando los límites de integración, el segundo término se puede desarrollar agrupando las  $\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$  con las funciones de onda respectivas como se muestra a continuación



$$\begin{aligned}
& \int U_0 \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \prod_{i=1}^N |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 d\mathbf{r}^{3d} = \\
& \int \int \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) |\phi(\mathbf{r}_1)|^2 |\phi(\mathbf{r}_2)|^2 d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \cdot \int |\phi(\mathbf{r}_3)|^2 d\mathbf{r}_3 \cdots \int |\phi(\mathbf{r}_N)|^2 d\mathbf{r}_N + \dots \\
& \dots + \int \int \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 |\phi(\mathbf{r}_j)|^2 d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j \cdots \int |\phi(\mathbf{r}_N)|^2 d\mathbf{r}_N. \quad (42)
\end{aligned}$$

Conviene agrupar de esta manera para poder efectuar la definición de  $\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ , donde ocurre que,  $\int \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) f(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i = f(\mathbf{r}_j)$ . Además se observa que se había partido de que la función de onda estaba normalizada, por lo que la integral de todas las funciones de onda que no están agrupadas valen 1. Por eso sólo nos quedamos con

$$\begin{aligned}
& \int U_0 \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \prod_{i=1}^N |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 d^3\mathbf{r} = \\
& \int \int \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) |\phi(\mathbf{r}_1)|^2 |\phi(\mathbf{r}_2)|^2 d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \dots \\
& \dots + \int \int \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 |\phi(\mathbf{r}_j)|^2 d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j. \quad (43)
\end{aligned}$$

Ahora podemos usar la definición de  $\int \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ ,

$$\begin{aligned}
& \int U_0 \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \prod_{i=1}^N |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 d^3\mathbf{r} = \\
& \int |\phi(\mathbf{r}_2)|^2 d\mathbf{r}_2 \left( \int \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) |\phi(\mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}_1 \right) + \dots \\
& \dots + \int |\phi(\mathbf{r}_j)|^2 d\mathbf{r}_j \left( \int \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 d\mathbf{r}_i \right). \quad (44)
\end{aligned}$$

Obteniéndose,

$$\begin{aligned}
& \int U_0 \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \prod_{i=1}^N |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 d^3\mathbf{r} = \\
& \int |\phi(\mathbf{r}_2)|^2 d\mathbf{r}_2 |\phi(\mathbf{r}_2)|^2 + \dots + \int |\phi(\mathbf{r}_j)|^2 d\mathbf{r}_j |\phi(\mathbf{r}_j)|^2. \quad (45)
\end{aligned}$$

Cada término de esta suma considera una pareja de bosones que, debido al hecho de que son indistinguibles, pueden escribirse de manera compacta formando parejas de ellos, como se muestra a continuación,

$$\int U_0 \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \prod_{i=1}^N |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 d^3 \mathbf{r} = \int |\phi(\mathbf{r}_2)|^4 d\mathbf{r}_2 + \dots + \int |\phi(\mathbf{r}_j)|^4 d\mathbf{r}_j. \quad (46)$$

Debido a que los bosones son indistinguibles y están formando parejas, el orden de configuración no importa. Esto es importante porque se pueden ignorar los pares que se repiten, es decir, tenemos un gas compuesto de  $N$  partículas indistinguibles, ¿Cuántas parejas se pueden formar? Este es un problema de combinatoria y está bien estudiado por lo que se usa el concepto de combinación sin repetición (el orden no importa). La expresión es la siguiente:

$$\binom{N}{P} = \frac{N!}{P!(N-P)!}, \quad (47)$$

donde  $N$  es el número de elementos que se pueden elegir, en nuestro caso  $N$  es el número de bosones, mientras que  $P$  es el número de elementos que se eligen a la vez, en nuestro caso  $P = 2$ , porque estamos formando parejas de bosones.

Entonces

$$\binom{N}{P} = \frac{N!}{P!(N-P)!} = \frac{N(N-1)(N-2)!}{2(N-2)!} = \frac{N(N-1)}{2}, \quad (48)$$

$$\binom{N}{P} = \frac{N(N-1)}{2}. \quad (49)$$

Ya contamos con el número de configuraciones. Por lo que ahora la expresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_0 \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \prod_{i=1}^N |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 d\mathbf{r}^{3D} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(N-1)}{2} U_0 |\phi(\mathbf{r})|^4 d\mathbf{r}^{3d}, \quad (50)$$

la podemos añadir a la ecuación (4), obteniéndose,

$$E = \langle \phi | H | \phi \rangle = N \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{(N-1)}{2} U_0 |\phi(\mathbf{r})|^4 \right] d\mathbf{r}^{3d}. \quad (51)$$

Finalmente, la expresión obtenida en la Ref. [15], es

$$E = N \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{(N-1)}{2} U_0 |\phi(\mathbf{r})|^4 \right] d\mathbf{r}^{3d}. \quad (52)$$

En la aproximación de campo medio, todos los átomos se encuentran en el estado cuya función de onda denotamos por  $\phi$ . En la verdadera función de onda, algunos átomos se encontrarán en estados con una variación espacial más rápida, debido a las correlaciones en pequeñas separaciones atómicas, y por tanto, el número total de átomos en el estado  $\phi$  será menor que  $N$ . La reducción relativa del número de partículas en el condensado, el llamado agotamiento (*depletion*) del condensado debido a interacciones, es del orden de  $(na^3)^{1/2}$ , donde en esta expresión  $n$  es la densidad de partículas. Como medida de la separación entre las partículas se introduce el radio  $r_s$  de una esfera que tiene un volumen igual al volumen medio por partícula. Esto está relacionado en la densidad de partículas  $n$ , por medio de la ecuación,  $n = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi r_s^3}$ .

Por lo que dentro de una esfera de radio  $r_s$ , el agotamiento es aproximadamente

$$\left( \frac{a^3 N}{\frac{4}{3}\pi r_s^3} \right)^{1/2} \rightarrow \frac{1}{\frac{4}{3}\pi} \left( \frac{a^3 N}{\frac{4}{3} r_s^3} \right)^{1/2} \approx \left( \frac{aN}{r_s} \right)^{3/2}. \quad (53)$$

En donde  $a$  es la longitud de dispersión.

Típicamente  $\left( \frac{aN}{r_s} \right)^{3/2}$  es del orden del 1% o menos en la mayoría de los experimentos realizados hasta la fecha, y por tanto, el agotamiento del condensado debido a interacciones puede despreciarse en la mayoría de las circunstancias.

En un sistema de volumen  $V$ , la energía de interacción de un par de partículas es,  $U_0/V$ . Así que, la energía de un estado con  $N$  bosones, todos en el mismo estado, es esta cantidad multiplicada por el número de formas posibles de hacer pares de bosones,  $N(N-2)/2$ .

Entonces,

$$E = \left(\frac{U_0}{V}\right) \left(\frac{N(N-1)}{2}\right), \quad (54)$$

$$E = \frac{N(N-1)}{2V} U_0. \quad (55)$$

Si ocurre que  $N \gg 1$ , entonces  $N-1 \approx N$ .

Por lo que,

$$E = \frac{N^2}{2V} U_0, \quad \text{para } N \gg 1. \quad (56)$$

Si ahora

$$E = \frac{V N^2}{V 2V} U_0 = \frac{V N^2}{2 V^2} U_0, \quad (57)$$

y si definimos a la densidad de partículas como  $n = \frac{N}{V}$ . Entonces de (57) se obtiene,

$$E = \frac{1}{2} V n^2 U_0. \quad (58)$$

En este punto es conveniente introducir el concepto de función de onda  $\psi(\mathbf{r})$  del estado condensado como

$$\psi(\mathbf{r}) = N^{1/2} \phi(\mathbf{r}). \quad (59)$$

Mientras que la densidad de partículas del estado condensado está dada por,

$$n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2. \quad (60)$$

Ahora empleamos la función de onda en la expresión de la energía de la ecuación (52), donde también vamos a suponer que  $N \gg 1$ , tenemos entonces que

$$E = N \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{N}{2} U_0 |\phi(\mathbf{r})|^4 \right] d\mathbf{r}^{3d}. \quad (61)$$

Usando (59) en (61), obtenemos

$$\begin{aligned} E(\psi) &= N \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla N^{-1/2} \psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |N^{-1/2} \psi(\mathbf{r})|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{N}{2} U_0 |N^{-1/2} \psi(\mathbf{r})|^4 \right] d\mathbf{r}^{3d} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ N \left( -\frac{\hbar^2}{2m} N^{-1} |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 + N^{-1} V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{N^2}{2} U_0 N^{-2} |\psi(\mathbf{r})|^4 \right] d\mathbf{r}^{3d} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{U_0}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4 \right] d\mathbf{r}^{3d}. \end{aligned} \quad (62)$$

Para encontrar la forma óptima de  $\psi$ , se minimiza  $E(\psi)$  con respecto a las variaciones independientes de  $\psi(\mathbf{r})$  y  $\psi^*(\mathbf{r})$ , sujeta a la siguiente restricción

$$N = \int d\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^2. \quad (63)$$

Para obtener la  $\psi$  que minimiza la energía se procederá mediante los multiplicadores de Lagrange. Podemos plantear el problema como,

$$F = \delta E - \mu \delta N = 0. \quad (64)$$

Explícitamente,

$$\begin{aligned} F &= \delta E - \mu \delta N = \\ &= \delta \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{U_0}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4 \right) d\mathbf{r}^{3D} \right] \\ &\quad - \mu \delta \left( \int d\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (65)$$

$$F = -\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r})|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{U_0}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4 - \mu|\psi(\mathbf{r})|^2 = 0, \quad (66)$$

en donde  $\mu$  es el multiplicador de Lagrange y cuyo significado físico es el potencial químico.

La forma canónica de la ecuación de Euler-Lagrange es la siguiente

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (67)$$

Para nuestro caso,  $y = \psi^*$  e  $y' = \nabla\psi^*$ . La ecuación de Euler-Lagrange adopta la siguiente forma,

$$\frac{\partial F}{\partial \psi^*} - \nabla \left( \frac{\partial F}{\partial (\nabla\psi^*)} \right) = 0. \quad (68)$$

Vemos que el funcional  $F$ , no depende de  $y' = \nabla\psi^*$ , por lo que el segundo término de la ecuación (26) vale cero. Siendo así, la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{\partial F}{\partial \psi^*} = 0. \quad (69)$$

Efectuando la derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \psi^*} = \frac{\partial}{\partial \psi^*} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \psi^*(\mathbf{r}) \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \right. \\ \left. + \frac{U_0}{2} \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) - \mu \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \right) = 0, \quad (70) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \psi^*} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) + \frac{U_0}{2} 2\psi(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 - \mu \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (71)$$

podemos reescribir esta expresión como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) + U_0 |\psi(\mathbf{r})|^2 \psi(\mathbf{r}) = \mu \psi(\mathbf{r}). \quad (72)$$

Que es la ecuación de Gross-Pitaevskii independiente del tiempo [15]. Ésta es una ecuación de eigenvalores donde el valor propio es  $\mu$ , no la

energía por partícula. Para las partículas que no interactúan, todas en el mismo estado, el potencial químico es igual a la energía por partícula, pero para las partículas que interactúan no lo es.

## 5. Excitones-Polaritones.

Los excitones-polaritones son cuasipartículas híbridas de luz y materia que surgen del acoplamiento fuerte entre los modos de los excitones y de las microcavidades ópticas. Dado que a bajas densidades tienen la propiedad de comportarse como bosones, pueden sufrir condensación de Bose-Einstein a temperaturas relativamente altas. En esta sección se revisan los fundamentos de los excitones-polaritones y de su condensación, y se introducen los principios de interacción entre la luz y materia que los hacen posibles. También se discuten algunas de sus propiedades generales que nos permitirán seguir con el propósito del estudio del transistor polaritónico. Posteriormente, se presenta la ecuación de Gross-Pitaevskii, que describe la dinámica de los excitones-polaritones.

### 5.1. Microcavidades ópticas

Las microcavidades ópticas son espacios físicos en donde se puede lograr acoplar luz con materia y posibilitar la existencia de excitones-polaritones. Consisten en un conjunto de espejos que encierran una capa delgada de medio óptico. Estos espejos de alta calidad se pueden fabricar a partir de reflectores de Bragg distribuidos de maneras convenientes según se necesite. Generalmente, esta disposición consiste en capas alternadas de dos materiales con distintos índices de refracción. La interferencia entre la luz reflejada y transmitida por las distintas capas conduce a una región de muy alta reflectividad. La alta reflectancia de los reflectores o espejos de Bragg permiten microcavidades con factores de calidad relativamente altos, generalmente del orden de  $10^5$ - $10^6$  [10], esto da como resultado una vida útil prolongada de los fotones. Para la creación de polaritones inorgánicos es viable usar sistemas semiconductores constituidos de arseniuro de galio (GaAs), entre otros.

La disposición de los espejos en una microcavidad genera el confinamiento del campo eléctrico en la dirección perpendicular a los planos del espejo y, por lo tanto, a la cuantificación de la componente perpendicular del vector de onda del fotón, que se da como,

$$k_{\perp} = n_c \frac{2\pi}{\lambda_c}. \quad (73)$$

Mientras que el componente en la dirección paralela a los espejos  $k_{\parallel}$ , es definido como [6],



$$k_{\parallel} = n_c \frac{2\pi}{\lambda_c} \tan \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{\text{sen } \theta}{n_c} \right) \right], \quad (74)$$

donde  $n_c$  es el índice de refracción de la cavidad y  $\lambda_c$  es la longitud de onda del modo de la cavidad. Hay una correspondencia uno a uno entre el ángulo de incidencia y cada modo de resonancia con el número de onda en el plano  $k_{\parallel}$ .

Así que, para  $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$ ,

$$\begin{aligned} k_{\parallel} &= n_c \frac{2\pi}{\lambda_c} \tan \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{\text{sen } \theta}{n_c} \right) \right] = n_c \frac{2\pi}{\lambda_c} \frac{\text{sen} \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{\text{sen } \theta}{n_c} \right) \right]}{\cos \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{\text{sen } \theta}{n_c} \right) \right]} = \quad (75) \\ &= n_c \frac{2\pi}{\lambda_c} \frac{\text{sen} \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{\text{sen } \theta}{n_c} \right) \right]}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{\text{sen } \theta}{n_c} \right) \right]}} = n_c \frac{2\pi}{\lambda_c} \frac{\frac{\text{sen } \theta}{n_c}}{\sqrt{1 - (\text{sen } \theta)^2}} = \\ &= n_c \frac{2\pi}{\lambda_c} \frac{\theta}{n_c \sqrt{1 - \frac{1}{n_c} (1 - \cos^2 \theta)}} = n_c \frac{2\pi}{\lambda_c} \frac{\text{sen } \theta}{n_c \sqrt{1 - \frac{1}{n_c^2} + \frac{1}{n_c^2} \cos^2 \theta}}, \end{aligned}$$

para  $\theta \ll 1$ ,  $\cos \theta \simeq 1$  y  $\text{sen } \theta \simeq \theta$ .

Por lo que,

$$\begin{aligned} k_{\parallel} &= n_c \frac{2\pi}{\lambda_c} \frac{\text{sen } \theta}{n_c \sqrt{1 - \frac{1}{n_c^2} + \frac{1}{n_c^2} \cos^2 \theta}} = \quad (76) \\ &= n_c \frac{2\pi}{\lambda_c} \frac{\theta}{n_c \sqrt{1 - \frac{1}{n_c^2} + \frac{1}{n_c^2} \cos^2 \theta}}, n_c \frac{2\pi}{\lambda_c} \frac{\theta}{n_c}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$k_{\parallel} = \frac{2\pi}{\lambda_c} \theta. \quad (77)$$

Al descomponer el vector de onda de fotones en sus componentes perpendiculares y en el plano, la energía del modo de cavidad se puede expresar como,

$$E_{cav} = \frac{\hbar c}{n_c} \sqrt{k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2}. \quad (78)$$

Ahora, se obtiene el límite en el que  $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$ . La ecuación (78) se desarrolla a segundo orden en la serie de Taylor.

Los primeros dos términos son,

$$E_{cav} \approx \frac{\hbar c}{n_c} k_{\perp} + \frac{\hbar c}{2n_c} \frac{k_{\perp}}{k_{\perp}^2} k_{\parallel}^2 = \frac{\hbar c}{n_c} k_{\perp} \left( 1 + \frac{k_{\parallel}^2}{2k_{\perp}^2} \right). \quad (79)$$

Aquí

$$E_{cav}(k_{\parallel} = 0) = \frac{\hbar c}{n_c} k_{\perp}. \quad (80)$$

Esta expresión también puede escribirse como

$$E_{cav} \approx \frac{\hbar c}{n_c} k_{\perp} + \frac{\hbar c n_c}{\hbar c n_c} \frac{\hbar c}{2n_c} \frac{k_{\perp}}{k_{\perp}^2} k_{\parallel}^2 = \frac{\hbar^2 c}{n_c} k_{\perp} + \frac{\hbar k_{\parallel}^2}{\frac{2\hbar c k_{\perp} n_c^2}{n_c c^2}}, \quad (81)$$

$$E_{cav} \approx \frac{\hbar c}{n_c} k_{\perp} + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2 \left( \frac{\hbar c k_{\perp} / n_c}{c^2 / n_c^2} \right)} = \frac{\hbar c}{n_c} k_{\perp} + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2 \left( \frac{E_{cav}(k_{\parallel}=0)}{c^2 / n_c^2} \right)}, \quad (82)$$

aquí,

$$m_{cav} = \frac{E_{cav}(k_{\parallel} = 0)}{c^2 / n_c^2}, \quad (83)$$

por lo que la energía de un fotón en la cavidad se convierte en [6],

$$E_{cav} \approx E_{cav}(k_{\parallel} = 0) + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_{cav}}. \quad (84)$$

El primer término representa la energía en reposo de un fotón en modo de cavidad, mientras que el segundo término representa la contribución de energía cinética del movimiento en el plano. En consecuencia, el confinamiento dota a los fotones atrapados con una masa efectiva dada por (83). La masa típica es de  $10^{-4}m_{e-}$  a  $10^{-5}m_{e-}$ , donde  $m_{e-}$  es la masa del electrón [1] [6].

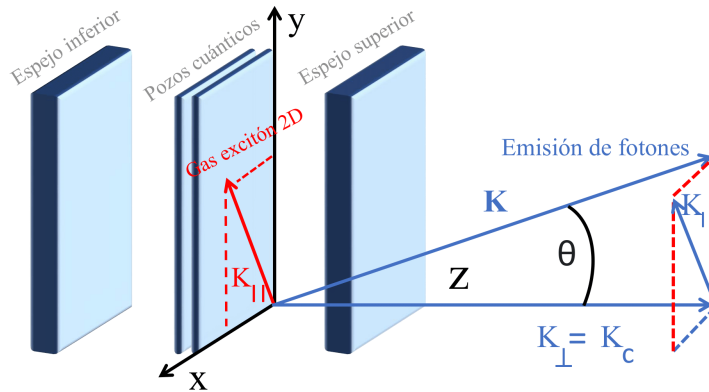


Figura 4: Dibujo esquemático de un sistema de microcavidad basado en un diseño plano de Fabry-Perot. Aquí, el momento del fotón de la cavidad se establece con relación al ángulo de emisión. La proyección muestra la fuerza de los componentes del momento en las direcciones respectivas correspondientes al ángulo  $\theta$ . La característica importante de estos sistemas es que los excitones con su momento en el plano  $k_{\parallel}$  solo pueden acoplarse a los fotones de la cavidad del momento de fotón total  $k$  cuando su proyección de momento en el plano  $k_{\parallel}$  coincide.

## 5.2. Excitones

El siguiente componente fundamental de esta descripción son los excitones. Cuando un electrón es excitado hasta la banda de valencia de un semiconductor deja un agujero, esto puede ser entendido como una región con exceso de carga positiva. Entonces, la interacción entre el electrón y agujero se puede modelar por medio de la fuerza de Coulomb, lo que da como resultado un par ligado; este par es denominado como excitón, y puede ser pensado como una cuasipartícula.

Para mejorar la interacción con los fotones, los excitones se limitan a dos dimensiones. Esto es así principalmente por dos motivos: en primer lugar, como se discutió anteriormente, los excitones sólo interactúan con el modo de luz en la proyección correcta; el otro es que los materiales bidimensionales tienen ciertas características ópticas favorables, por ejemplo, los metales de transición dicalcogénidos sólo tienen excitones

de banda directa, lo que directamente implica que no hay intercambio de momento cuando el electrón pasa de la capa de valencia a la de conducción. El confinamiento se logra en un pozo cuántico. Podemos pensar físicamente en este pozo cuántico como una capa delgada de GaAs como material semiconductor rodeada por capas con mayores intervalos de banda, lo que da como resultado un potencial de confinamiento. El pozo cuántico puede ser hecho de tal manera que sea lo suficientemente estrecho como para que solo se admita un modo transversal. La figura 5 es una representación esquemática de una cavidad óptica, constituida por un pozo cuántico.

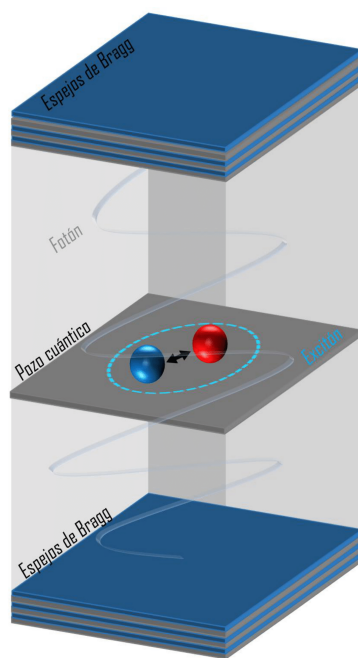


Figura 5: Representación de una cavidad óptica. Si el sistema es construido con pozos cuánticos, los excitones estarán significativamente confinados. Tal pozo cuántico de confinamiento es formado por una capa delgada de material semiconductor emparedado por capas de barrera que permiten la propagación en el plano de las excitaciones, es decir, en el plano de confinamiento; mientras que el par electrón-agujero tiene prohibido penetrar las capas de barrera circundantes. Se entiende que las propiedades del excitón se adaptarán y dependerán en gran medida del grosor del potencial de confinamiento. En resumen, al estar confinados en el plano del pozo cuántico, la superposición de las funciones de onda de los electrones y los huecos aumenta y, con ella, la fuerza del oscilador excitónico y la energía de enlace.

### 5.3. Excitones-Polaritones

A diferencia de la propagación en el vacío, si la luz entra en un medio polarizable, su propagación se verá afectada por la interacción con la materia. A continuación, se pueden describir dos escenarios. En primer lugar, el caso de acoplamiento débil, en el que el campo electromagnético y la excitación de la materia pueden considerarse independientes entre sí, es decir, conservan sus propiedades iniciales en presencia una de la otra. El otro caso es el del acoplamiento fuerte. Este ocurre cuando el fotón puede provocar una excitación de la materia en el momento que resuena con un oscilador electrónico. Mediante esta interacción surge el acoplamiento entre la materia y la luz. Este último escenario representa una buena aproximación de lo que ocurre en sistemas de interacción entre excitones y luz, dando origen a los excitones-polaritones.

Cuando se coloca un pozo cuántico en el antinodo de un modo de microcavidad, los excitones interactúan fuertemente con el modo óptico. Si el acoplamiento luz-materia  $\Omega$  es mayor que las escalas de disipación del sistema, la del fotón  $\kappa$  y la del excitón  $\gamma$ , entonces el sistema se encuentra en el régimen del acoplamiento fuerte; en tal caso se crea el estado luz-materia fuertemente correlacionado. Un fotón puede interactuar con los excitones muchas veces antes de salir de la cavidad. El efecto típico de esta mezcla cuántica es que conduce a dos nuevos estados propios, cada uno de los cuales es una combinación lineal de los estados de fotón y excitación. Esos nuevos estados son los excitones-polaritones [10]. El acoplamiento fuerte es posible debido al factor de alta calidad de las microcavidades semiconductoras, y la interacción óptica mejorada se logra al limitar los excitones a un pozo cuántico.

La descripción matemática del acoplamiento puede hacerse desde el planteamiento del Hamiltoniano de interacción radiación materia:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m_x} \hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c} + \delta \right) \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} + \Omega \sum_{\mathbf{k}} \left( \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}} + \hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} \right). \quad (85)$$

donde  $m_x$  y  $m_c$  son las masas del excitón y el fotón, y  $\mathbf{k}$  representa el momento, por lo que esta expresión representa un conjunto de partículas con momento  $\mathbf{k}$ . Además  $\Omega$  caracteriza la interacción entre la luz y la materia.

Si

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^x = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_x}, \quad \varepsilon_{\mathbf{k}}^c = \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m_x} + \delta \right). \quad (86)$$

Se obtiene

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}^x \hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}^c \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} + \Omega \sum_{\mathbf{k}} \left( \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}} + \hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} \right). \quad (87)$$

Este Hamiltoniano también puede escribirse como,

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} [\hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger] \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{k}}^x & \Omega \\ \Omega & \varepsilon_{\mathbf{k}}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{\mathbf{k}} \\ \hat{c}_{\mathbf{k}} \end{bmatrix}. \quad (88)$$

Esta expresión puede ser diagonalizada para obtener los estados energéticos del sistema como sigue,

$$\left| \hat{H} - EI \right| = \left| \begin{pmatrix} \varepsilon_{\mathbf{k}}^x & \Omega \\ \Omega & \varepsilon_{\mathbf{k}}^c \end{pmatrix} - E \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0. \quad (89)$$

Entonces,

$$\left| \begin{pmatrix} \varepsilon_{\mathbf{k}}^x - E & \Omega \\ \Omega & \varepsilon_{\mathbf{k}}^c - E \end{pmatrix} \right| = (\varepsilon_{\mathbf{k}}^x - E)(\varepsilon_{\mathbf{k}}^c - E) - \Omega^2 = 0, \quad (90)$$

resulta en,

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^x \varepsilon_{\mathbf{k}}^c - E \varepsilon_{\mathbf{k}}^x - E \varepsilon_{\mathbf{k}}^c + E^2 - \Omega^2 = 0, \quad (91)$$

al recomodar esta expresión de la manera siguiente,

$$E^2 - E(\varepsilon_{\mathbf{k}}^x + \varepsilon_{\mathbf{k}}^c) + (\varepsilon_{\mathbf{k}}^x \varepsilon_{\mathbf{k}}^c - \Omega^2) = 0, \quad (92)$$

podemos identificar que se trata de una ecuación cuadrática, cuya solución es,

$$\begin{aligned} E &= \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}^x + \varepsilon_{\mathbf{k}}^c \pm \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}}^x + \varepsilon_{\mathbf{k}}^c)^2 - 4(\varepsilon_{\mathbf{k}}^x \varepsilon_{\mathbf{k}}^c - \Omega^2)}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_{\mathbf{k}}^x + \varepsilon_{\mathbf{k}}^c \pm \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}}^x)^2 + 2\varepsilon_{\mathbf{k}}^x \varepsilon_{\mathbf{k}}^c + (\varepsilon_{\mathbf{k}}^c)^2 - 4\varepsilon_{\mathbf{k}}^x \varepsilon_{\mathbf{k}}^c + 4\Omega^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_{\mathbf{k}}^x + \varepsilon_{\mathbf{k}}^c \pm \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}}^x)^2 (\varepsilon_{\mathbf{k}}^c)^2 - 2\varepsilon_{\mathbf{k}}^x \varepsilon_{\mathbf{k}}^c + 4\Omega^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_{\mathbf{k}}^x + \varepsilon_{\mathbf{k}}^c \pm \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}}^c - \varepsilon_{\mathbf{k}}^x)^2 + 4\Omega^2} \right]. \end{aligned} \quad (93)$$

Finalmente,

$$E_{\mathbf{k}}^{UP,LP} = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_{\mathbf{k}}^x + \varepsilon_{\mathbf{k}}^c \pm \sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2} \right], \quad (94)$$

donde  $\delta_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}}^c - \varepsilon_{\mathbf{k}}^x$ , además,  $E_{\mathbf{k}}^{UP,LP}$  es identificada como la energía del polaritón superior e inferior.

La transformación que diagonaliza al Hamiltoniano es [8]

$$\hat{L}_{\mathbf{k}} = \mathcal{C}_{\mathbf{k}} \hat{x}_{\mathbf{k}} + \mathcal{S}_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}}, \quad (95)$$

$$\hat{U}_{\mathbf{k}} = -\mathcal{S}_{\mathbf{k}} \hat{x}_{\mathbf{k}} + \mathcal{C}_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}}, \quad (96)$$

donde  $\hat{L}_{\mathbf{k}}$  y  $\hat{U}_{\mathbf{k}}$  son los operadores de aniquilación de los polaritones inferior y superior, respectivamente y

$$\mathcal{C}_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\delta_{\mathbf{k}}^2}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2}} \right), \quad (97)$$

$$\mathcal{S}_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\delta_{\mathbf{k}}^2}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2}} \right), \quad (98)$$

son los coeficientes de Hopfield. Entonces el Hamiltoniano se transforma en

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^{LP} \hat{L}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{L}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^{UP} \hat{U}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{U}_{\mathbf{k}}. \quad (99)$$

Como se discutirá a continuación, debido a que los excitones-polaritones pueden ser pensados como bosones compuestos con una masa efectiva muy pequeña, estos pueden sufrir una condensación de Bose-Einstein a temperaturas relativamente altas.

## 5.4. Condensación de Excitones-Polaritones

Debido a que los excitones-polaritones son pensados como partículas cuasi-bosónicas que se excitan en microcavidades de pozos cuánticos semiconductores, se ha podido demostrar que es posible crear un condensado Bose-Einstein de estas quasipartículas [16]. El atractivo del sistema excitón-polaritón es que muchos de los mismos experimentos de la física atómica se pueden realizar en el sistema de semiconductores [10]. Desde una perspectiva practica, el condensado de Bose-Einstein de polaritones

en semiconductores inorgánicos tiene varias ventajas prácticas sobre los sistemas atómicos. Las temperaturas que se utilizan normalmente para formar el condensado de excitón-polaritón están en la vecindad de 10K, mucho más altas que las temperaturas requeridas para los condensados atómicos, en donde típicamente la temperatura de transición está cercano al cero absoluto  $\approx 0.001\text{k}$ . Mediante el uso de diferentes semiconductores debería ser posible aumentar estas temperaturas a la temperatura ambiente, abriendo la posibilidad de nuevos dispositivos que utilicen el efecto del condensado. Como se discutirá más adelante, los condensados de excitón-polaritón son prometedores en términos de nuevas tecnologías, ya que los efectos cuánticos pueden aparecer a nivel macroscópico.

Para obtener condensación en sistemas polaritónicos, los parámetros cruciales son la densidad polaritónica y la temperatura crítica de transición, debido a que por debajo de una temperatura crítica o por encima de una densidad crítica, puede ocurrir la condensación. Una de las particularidades de estos sistemas es que los condensados polaritónicos experimentan pérdidas y ganancias debido a la inestabilidad que tienen en las microcavidades, por lo que para la condensación también se debe considerar que son sistemas fuera de equilibrio.

La longitud de onda de De Broglie de una partícula en un gas es dado por

$$\lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}. \quad (100)$$

Cuando la temperatura de las partículas es lo suficientemente baja (por debajo de un valor crítico  $T_c$ ), la longitud de onda térmica de De Broglie se vuelve comparable a las distancias interatómicas. Luego, los paquetes de ondas de las partículas comienzan a superponerse y, bajo esta condición particular, ese encuentra el régimen de la indistinguibilidad. Entonces, por debajo de la temperatura crítica, las partículas bosónicas experimentan una transición hacia una fase en la que todas ocupan masivamente un solo estado cuántico, formando un condensado. La relación que conecta la densidad atómica a la que se produce la condensación con la longitud de onda de De Broglie es [\[12\]](#)

$$n\lambda_{dB}^3 \approx 2,616. \quad (101)$$



Entonces, sustituyendo esta expresión en (100) y despejando, se obtiene

$$k_B T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left( \frac{n}{2,616} \right)^{2/3}. \quad (102)$$

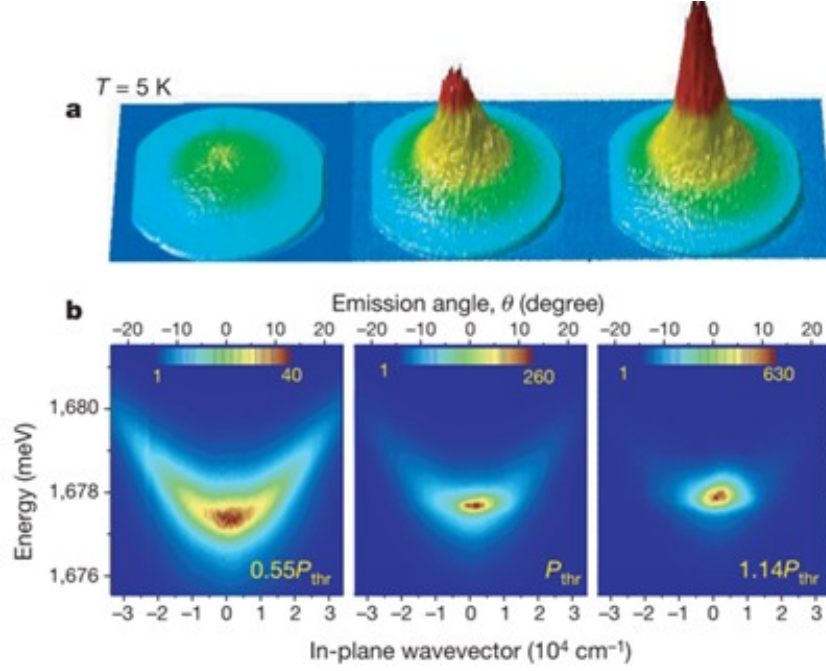


Figura 6: Fotoluminiscencia de un sistema de excitones-polaritones sometidos a condensación de Bose-Einstein. (a): intensidad de emisión de campo cercano que indica densidad de polaritón, (b) Dispersión del polaritón. Figura reproducida de Ref. [9].

## 5.5. Ecuación de Gross-Pitaevskii para polaritones

Ahora podemos obtener la ecuación de estado para polaritones a partir de la ecuación de Gross-Pitaevskii dependiente del tiempo [3] que se muestra a continuación:

$$i\partial_t \Psi_{LP}(\mathbf{r}, t) = \left[ E_{LP}^0 - \frac{\hbar}{2m_{LP}} \nabla^2 + V_{LP}(\mathbf{r}) \right] \Psi_{LP}(\mathbf{r}, t) + g_{LP} |\Psi_{LP}(\mathbf{r}, t)|^2 \Psi_{LP}(\mathbf{r}, t) - \frac{i\gamma_{LP}}{2} \Psi_{LP}(\mathbf{r}, t) + i\eta_{LP} E^{inc}(\mathbf{r}, t). \quad (103)$$

Con respecto a la ecuación de Gross-Pitaevskii (52), la ecuación (103) incluye términos adicionales para tener en cuenta la naturaleza forzada y disipativa del gas de polaritones, es decir, una tasa de pérdida proporcional a  $\gamma_{LP}$  y el bombeo coherente proporcional al campo incidente  $E^{inc}(\mathbf{r}, t)$ . En la ecuación (103),  $m_{LP} = \left( \frac{C_{\mathbf{k}}^2}{m_{exc}} + \frac{S_{\mathbf{k}}^2}{m_{cav}} \right)^{-1}$  es la masa de polaritón inferior, en donde  $m_{exc}$  y  $m_{cav}$  son las masas del excitón y la cavidad, respectivamente. Entonces, cuando  $k_{\parallel} = 0$ ,  $m_{LP}(k_{\parallel} \sim 0) \approx \frac{m_{cav}}{S_{\mathbf{k}}^2} \sim 10^{-4} m_{exc}$ .  $E_{LP}^0$  es la frecuencia de la parte inferior de la rama de polaritón inferior,  $g_{LP} = C_{\mathbf{k}}^2 C_0^2 g_{xx}$  es el potencial externo al que los polaritones están sujetos y que se asume como un potencial de contacto y, finalmente,  $\gamma_{LP} = C_{\mathbf{k}}^2 \gamma_{exc} + S_{\mathbf{k}}^2 \gamma_{cav}$  es el decaimiento de los polaritones, donde  $\gamma_{cav}$  es la tasa de desacoplamiento de un fotón de cavidad a espejos imperfectos y  $\gamma_{exc}$  es la tasa de desintegración no radiativa de un excitón [6]. Mientras que  $\eta_{LP}$  cuantifica el acoplamiento del polaritón a la radiación incidente. Para

$$E^{inc}(\mathbf{r}, t) = E_c^{inc} e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t}. \quad (104)$$

Si se propone la siguiente solución a la ecuación (103)

$$\Psi_{LP}(\mathbf{r}, t) = \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t}, \quad (105)$$

usando la expresión (105) en la ecuación (103) obtenemos

$$\begin{aligned} i\partial_t \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} &= \left[ E_{LP}^0 - \frac{\hbar}{2m_{LP}} \nabla^2 + V_{LP}(\mathbf{r}) \right] \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} \\ &+ g_{LP} |\Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t}|^2 \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} \\ &- \frac{i\gamma_{LP}}{2} \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} + i\eta_{LP} E_c^{inc} e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t}, \quad (106) \end{aligned}$$

aplicando la derivada

$$\begin{aligned} \omega_{inc} \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} &= \left[ E_{LP}^0 - \frac{\hbar}{2m_{LP}} \nabla^2 + V_{LP}(\mathbf{r}) \right] \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} \\ &+ g_{LP} |\Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t}|^2 \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} \\ &- \frac{i\gamma_{LP}}{2} \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} + i\eta_{LP} E_c^{inc} e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t}, \quad (107) \end{aligned}$$

ahora podemos simplificar en el primer término del lado derecho, efectuando el operador  $\nabla^2$  sobre la función de onda y para el segundo

término del lado derecho de la ecuación podemos desarrollar el módulo al cuadrado,

$$\begin{aligned} \omega_{inc} \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} &= \left[ E_{LP}^0 + \frac{\hbar}{2m_{LP}} k_{inc}^2 + V_{LP}(\mathbf{r}) \right] \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} \\ &+ g_{LP} |\Psi_{LP}^0|^2 |e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t}|^2 \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} \\ &- \frac{i\gamma_{LP}}{2} \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} + i\eta_{LP} E_c^{inc} e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t}, \quad (108) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{inc} \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} &= \left[ E_{LP}^0 + \frac{\hbar}{2m_{LP}} k_{inc}^2 + V_{LP}(\mathbf{r}) \right] \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} \\ &+ g_{LP} |\Psi_{LP}^0|^2 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} e^{-i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{+i\omega_{inc} t} \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} \\ &- \frac{i\gamma_{LP}}{2} \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} + i\eta_{LP} E_c^{inc} e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t}, \quad (109) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{inc} \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} &= \left[ E_{LP}^0 + \frac{\hbar}{2m_{LP}} k_{inc}^2 + V_{LP}(\mathbf{r}) \right] \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} \\ &+ g_{LP} |\Psi_{LP}^0|^2 \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} \\ &- \frac{i\gamma_{LP}}{2} \Psi_{LP}^0 e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t} + i\eta_{LP} E_c^{inc} e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t}, \quad (110) \end{aligned}$$

donde podemos eliminar el término,  $e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{inc} t}$

$$\begin{aligned} \omega_{inc} \Psi_{LP}^0 &= \left[ E_{LP}^0 + \frac{\hbar}{2m_{LP}} k_{inc}^2 + V_{LP}(\mathbf{r}) \right] \Psi_{LP}^0 + g_{LP} |\Psi_{LP}^0|^2 \Psi_{LP}^0 \\ &- \frac{i\gamma_{LP}}{2} \Psi_{LP}^0 + i\eta_{LP} E_c^{inc}, \quad (111) \end{aligned}$$

reacomodando obtenemos la forma de la ecuación de estado para polaritones [\[3\]](#)

$$\left[ \omega_{inc} - E_{LP}^0 - \frac{\hbar k_{inc}^2}{2m_{LP}} - g_{LP} |\Psi_{LP}^0|^2 + \frac{i\gamma_{LP}}{2} \right] \Psi_{LP}^0 = i\eta_{LP} E_0^{inc}. \quad (112)$$

## 6. Compuertas lógicas

La electrónica digital estudia los sistemas electrónicos en los que la información se encuentra codificada<sup>1</sup>. Dentro de esta disciplina se distinguen dos estados lógicos determinados por el nivel de tensión en el que se encuentra el circuito, estos son: el estado alto y el estado bajo, que típicamente corresponden a una señal eléctrica de 0V y 5V, respectivamente. Esta correspondencia entre el estado lógico y el nivel de voltaje es conocida como lógica positiva; mientras que para una asignación de 0V para el estado alto y 5V para el estado bajo, se denomina lógica negativa. En estas notas se emplea la lógica positiva.

Las compuertas lógicas en los circuitos, son dispositivos que operan por medio de estados lógicos (ver figura 7). Estas compuertas están constituidas por transistores que se encuentran dispuestos de una manera conveniente para obtener un procesamiento específico de la señal de entrada, con el fin de obtener funcionalidades requeridas en el circuito 7. Cada compuerta lógica tiene asociada una tabla de verdad, por medio de la cual se describe su funcionamiento. Además, todas las compuertas lógicas tienen asociado un símbolo con el cual se les representa. Los símbolos son usados en diagramas que representan la interconexión entre las compuertas. El uso de los diagramas facilita la comprensión del resultado de las nuevas funcionalidades que resultan de estas interconexiones.

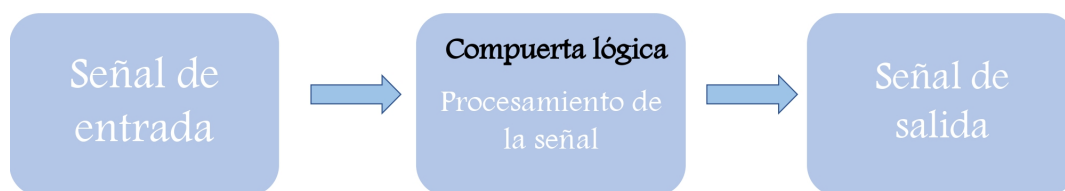


Figura 7: Esquema del funcionamiento de una compuerta lógica.

### 6.1. Álgebra de Boole

Las compuertas lógicas obedecen el álgebra de Boole, usada como un método para simplificar el funcionamiento de los circuitos lógicos a

---

<sup>1</sup>En la siguiente sección se mostrará que es posible extrapolar algunas de las funcionalidades electrónicas aquí expuestas, para el caso de las compuertas lógicas ópticas.

través de operaciones de negación, suma y multiplicación. El álgebra de Boole es un área de las matemáticas que se ocupa de las operaciones con valores lógicos por medio de la implementación de variables binarias [7]. Se entienden a las variables binarias booleanas como símbolos para representar los dos estados lógicos posibles 0 y 1. Entonces, de forma general el uso del álgebra de Boole en los circuitos lógicos, obliga a considerar dos tipos de elementos, operaciones y variables.

- Variables:
  - Sólo es posible tomar un valor entre dos opciones excluyentes 0 y 1. El estado de los elementos lógicos del circuito corresponde a uno de las dos opciones excluyentes.
- Operaciones:
  - Suma: el resultado de la suma es 1 si uno o más de los valores de los sumandos vale 1. Un ejemplo de esta suma lógica es la compuerta OR.
  - Producto: el valor obtenido del producto de dos variables es 1 sólo si ambas variables valen 1; de otro modo, el resultado siempre es 0. El funcionamiento de la compuerta AND está regido estrictamente por esta operación.
  - Negación: de esta operación se obtiene como resultado un valor contrario al dado en la entrada. Por lo que si una variable tiene un valor de 0, su negado es 1. La compuerta NOT es el ejemplo más simple de esta operación.

## 6.2. Compuertas lógicas

Las compuertas lógicas pueden ser utilizadas en aplicaciones electrónicas. Cada compuerta tiene asociado un símbolo. A continuación se discuten las compuertas lógicas que en la sección siguiente se abordarán bajo un desarrollo totalmente óptico de las mismas.

### 6.2.1. Compuerta NOT

El funcionamiento de la compuerta NOT corresponde a una función de negación. Por lo que si la señal de entrada  $a$  es 0, por medio de la inversión lógica de la señal, en la señal de salida se obtendrá un 1 (ver Fig. 8).

## NOT

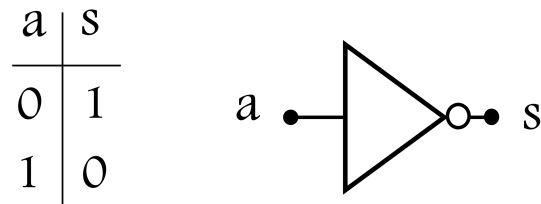


Figura 8: Compuerta NOT.

### 6.2.2. Compuerta OR

La funcionalidad de esta compuerta proviene de la suma booleana antes mencionada. Por lo que si la entrada de una de las dos señales es 1, la señal de salida también será 1, idénticamente para el caso en que ambas entradas se encuentren en el estado 1. Sólo en el caso en que ambas entradas sean 0, la salida también corresponderá al estado 0.

## OR

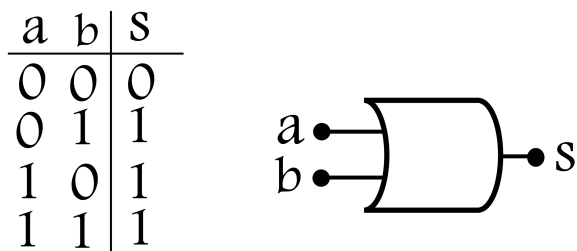


Figura 9: Compuerta OR

### 6.2.3. Compuerta AND

La funcionalidad de esta compuerta obedece a la multiplicación booleana, esto es, cuando todas las variables lógicas son 1, la salida también corresponde al estado 1. Si alguna de las 2 variables de entrada o incluso ambas se encuentran en el estado 0, entonces el estado de la salida será 0.

## AND

| a | b | S |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

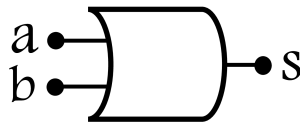


Figura 10: Compuerta AND

### 6.2.4. Compuerta NOR

Al agregar una compuerta NOT a las compuertas anteriormente descritas, las salidas se invierten para cada operación. Esto origina nuevas compuertas llamadas NAND y NOR. Así que la compuerta NOR tiene la función inversa de la compuerta OR.

## NOR

| a | b | S |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

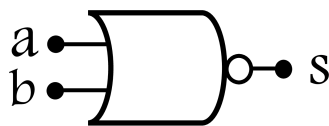


Figura 11: compuerta NOR.

Un conjunto de compuertas lógicas es completo cuando por medio de

este es posible la implementación de cualquier función lógica. Uno de los conjuntos de compuertas lógicas completo más común lo conforman las compuertas AND, OR y NOT.

La compuerta NOR es una compuerta universal, debido a que mediante una combinación de varias compuertas NOR es posible reproducir el funcionamiento de cualquier compuerta lógica. Por ejemplo: Para obtención del funcionamiento de la compuerta NOT por medio de la compuerta NOR, basta con unir las entradas de una compuerta NOR. Debido a que la compuerta NOR es equivalente a una compuerta OR que conduce a la compuerta NOT, así que al unir las entradas genera que la salida de la parte OR de la compuerta NOR sea la misma que la entrada, eliminando así su función y dejando sólo a la de la compuerta NOT. Para obtener una compuerta OR por medio de la compuerta NOR se invierte la salida de una compuerta NOR, ya que por definición la compuerta NOR es la negación de la compuerta OR. Con el fin de obtener el funcionamiento de la compuerta AND a partir de la NOR, simplemente se invierten las entradas de la NOR.

En la siguiente sección se muestra que es posible obtener dos conjuntos de compuertas completamente ópticas en una versión totalmente óptica. El primer conjunto completo está constituido de las compuertas AND, OR y NOT; mientras que el segundo conjunto está conformado por la compuerta NOR. Cada uno de los conjuntos de compuertas mencionadas, dota a la lógica completamente óptica de un conjunto de compuertas completo, mediante el cual es posible realizar cualquier función lógica.



## 7. Lógica totalmente óptica

En particular, como se ha mencionado en las secciones anteriores, la capacidad de cascabilidad es difícil de obtener en sistemas ópticos y está asegurada solo si la salida de una etapa está en la forma correcta para impulsar la entrada de la siguiente etapa. Los excitones-polaritones, han demostrado recientemente enormes no linealidades y propiedades de propagación únicas [1]. En esta sección se discutirá acerca de los comportamientos que los excitones-polaritones son capaces de exhibir. Permiten modelar un conjunto de excitones polaritones como un ente macroscópico que es pensado como un fluido de polaritones. A continuación se mostrará que si este fluido polaritónico se mueven en el plano de una microcavidad óptica, puede operar como entrada y salida de un transistor totalmente óptico; obteniendo así una amplificación de señal de hasta 19 veces y demostrando que este sistema tiene la capacidad de cascabilidad. Además, se exhibe el funcionamiento de una puerta AND/OR, que valida la conectividad de múltiples transistores en el plano de la microcavidad. Posteriormente, se discutirá acerca de una implementación mediante fluidos polaritónicos para una puerta lógica NOR.

### 7.1. Transistor polaritónico

Un transistor es un dispositivo típicamente semiconductor que se utiliza para amplificar o cambiar señales electrónicas. Una de las particularidades de los transistores es que son capaces de controlar la señal de entrada (típicamente una señal eléctrica) que le es suministrada. Esta funcionalidad está fundamentada en que la potencia controlada (salida) puede ser mayor que la potencia controladora (entrada), es decir, un transistor puede amplificar una señal. Esta propiedad es comúnmente denominada como ganancia, y mediante esta ganancia el dispositivo puede funcionar como un amplificador. Alternativamente, el transistor se puede usar para encender o apagar la corriente en un circuito como un interruptor controlado eléctricamente, esto se puede lograr mediante el control de la señal de entrada. Es debido a esta funcionalidad del transistor que también se le denomina como *switch* o conmutador.

Por medio de la funcionalidad de *switch* que tiene el transistor, se puede obtener interconexiones en los dispositivos eléctricos. Los transistores

se usan comúnmente en los circuitos como interruptores electrónicos que pueden estar en un estado "encendido" o "apagado", por ejemplo, para realizar las funcionalidades que las puertas lógicas ofrecen. Uno de los parámetros importantes en este tipo de sistemas es la velocidad de conmutación, caracterizada por los tiempos de entrada y salida. La conmutación permite la entrega de la señal desde el origen hasta el destino requerido. Los transistores son parte fundamental de los circuitos integrados y, por este motivo es importante mejorar las funcionalidades de los transistores electrónicos, una propuesta para realizar este cometido es por medio de los beneficios que ofrecería un transistor polaritónico totalmente óptico.

Debido a que los excitones-polaritones heredan una masa reducida, se pueden generar con estos tiempos de conmutación rápidos, mientras que su componente electrónico proporciona fuertes efectos no lineales en umbrales de potencia relativamente bajos. Gracias a lo anterior, la observación de una fase condensada fuera de equilibrio de polaritones allanó el camino para el estudio de nuevos fenómenos cuánticos [17], lo que podría conducir a operaciones y comunicaciones prácticamente sin pérdidas hasta la temperatura ambiente en el caso de los excitones-polaritones orgánicos [11].

Un sistema que se ha empleado para realizar este tipo de lógica totalmente óptica fue propuesto por Ballarini, et al., en la Ref. [1], está constituido por una configuración experimental representada en la Fig. [12]. Dicha configuración está compuesta por un rayo láser que, de modo único incide en una microcavidad de GaAs/AlAs, constituida por reflectores de Bragg y de pozos cuánticos incrustados en el plano de la microcavidad. Debido a la vida útil finita del polaritón en la microcavidad, este proceso se puede observar a través de la emisión de fotones.

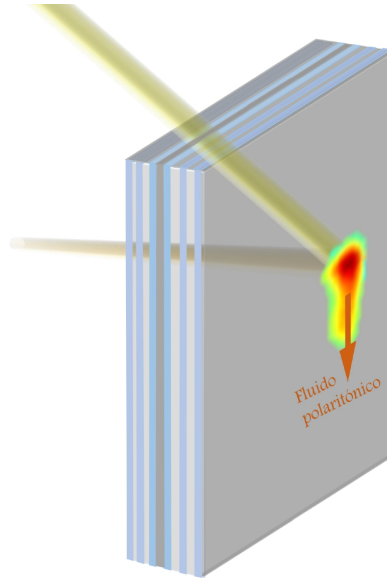


Figura 12: Un rayo láser se dirige con un ángulo de incidencia sobre la muestra de la microcavidad. El rayo láser se refleja parcialmente desde los espejos de Bragg frontales, lo que sólo permite la penetración de aquellas frecuencias que coinciden con la dispersión de los polaritones; específicamente, el ángulo de incidencia del rayo láser con respecto a la dirección perpendicular al plano de la microcavidad corresponde también al momento en el plano de los polaritones creados resonantemente, que se propagan con una velocidad dada en el plano de la microcavidad. Así que los polaritones se crean dentro del plano de la microcavidad en donde también se propagan, esta propagación es descrita por una dinámica similar a la de un fluido. Debido a esta dinámica tan particular es que el condensado de excitones-polaritones es pensado como un "fluido de luz". El acoplamiento uno a uno con los fotones externos permite la observación de la propagación del polaritón a través de la intensidad emitida desde la parte posterior de la muestra.

El comportamiento no lineal que exhiben los polaritones se puede aprovechar para obtener dos comportamientos diferentes. Al aumentar la densidad de polaritones, las interacciones entre ellos incrementan la energía aumentando la energía de resonancia del polaritón (*blue shift*). Si el láser de bombeo está sintonizado con la energía de los polaritones, al aumentar su intensidad, el aumento de polaritones es lineal. Sin embargo, si el láser de bombeo está desintonizado ligeramente por encima de la resonancia del polaritón, ocurren dos casos:

- Si la densidad de polaritones es baja, la energía de resonancia de los polaritones no alcanza a llegar a la del bombeo. Entonces, el láser permanece fuera de resonancia y denominamos a este régimen

como “apagado”.

- Si la densidad de polaritones cruza cierto umbral, la energía de resonancia de los polaritones aumenta hasta coincidir con el bombeo. Entonces, se presenta en un aumento dramático de la población del estado bombeado y denominamos a esto como “prendido”.

Este comportamiento no lineal es representado en la Fig. 13

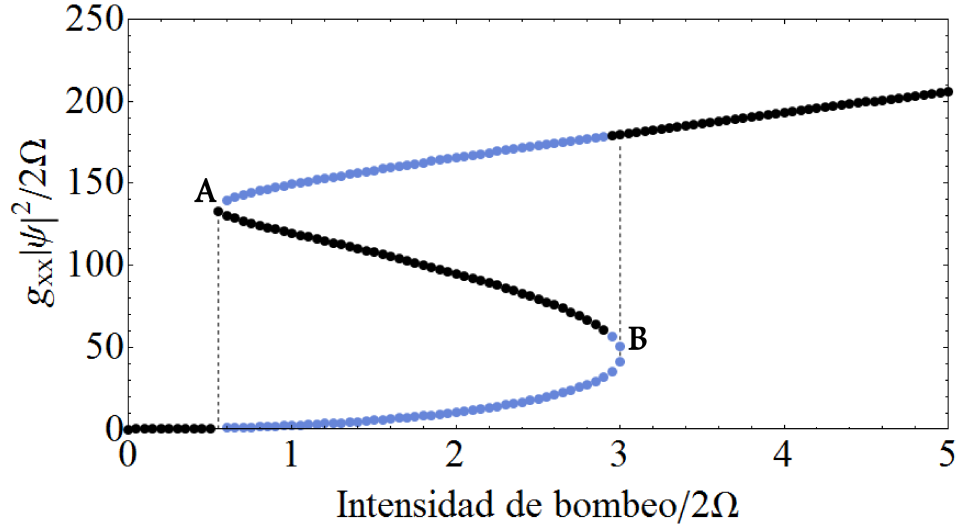


Figura 13: Densidad de polaritones  $g_{xx}|\psi|^2/2\Omega$  en función de la intensidad del bombeo para un láser desintonizado aproximadamente en  $\approx 10^{-3}\Omega$  de la resonancia. La región AB de la curva, muestra la dependencia explícita de la densidad en función de la potencia del estado del bombeo. La línea discontinua de la derecha (izquierda) muestra la transición de los regímenes de densidad de polaritón baja a alta al aumentar (disminuir) la potencia del bombeo.

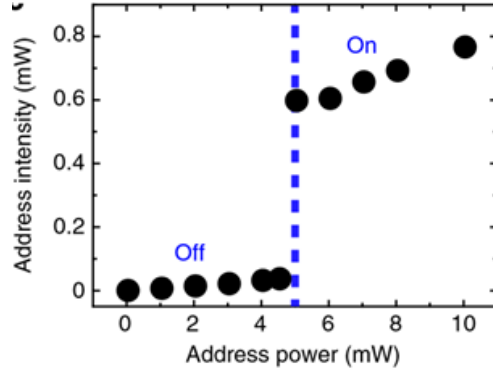


Figura 14: En el lado izquierdo de la figura se muestra una señal de intensidad mínima, que funciona como estado de apagado en el sistema. Mientras que del lado derecho se aprecia un cambio abrupto en la intensidad en la señal, esto es aprovechado para obtener el estado de encendido en el sistema. Con este mecanismo se obtiene la funcionalidad de *switch* que se necesita para realizar operaciones lógicas en sistemas totalmente ópticos. Fig. tomada de la Ref. [1].

Entonces, el primer paso en el funcionamiento del transistor óptico, consiste en que antes de entrar a la muestra, el rayo láser se divide en dos trayectorias que inciden con diferentes ángulos en el plano de la microcavidad para excitar resonantemente dos estados de la rama inferior del polaritón, aunque en el espacio físico incidan sobre el mismo punto. Estos dos nuevos láseres tienen la misma energía, pero al haber entrado con diferente ángulo, su momento cambia, por lo que uno de ellos se coloca en resonancia con la energía de los polaritones, y el otro queda desintonizado por arriba de aquélla. Esto permite crear los dos estados de Control  $E_C$  y Dirección  $E_A$ , respectivamente.

Mediante la inyección óptica externa, el aumento en la densidad de polaritones del estado de Control permite activar el estado de Dirección, es decir, el umbral de potencia para la absorción no lineal de un estado de polaritones (Dirección) se ajusta mediante la inyección de una pequeña población de polaritones (Control). En principio, el transistor debe usar sólo una pequeña densidad de polaritones en el estado de control para encender una densidad de polaritones mucho más alta en el estado de Dirección, es decir, tiene una alta ganancia.

Debido a la ligera desafinación del estado de Dirección con respecto al rayo láser, la población de polaritones en este estado sigue el comportamiento no lineal que se muestra en la Fig. [14] donde la intensidad de emisión del estado de la Dirección se representa como una función de la potencia del láser de bombeo. Una vez que la señal de dirección es activada por el control externo, se puede utilizar, a su vez, como control

interno para el siguiente transistor en serie, en una configuración en cascada interconectada a través de la propagación del polaritón en el plano de la microcavidad. Esta última propiedad, la de cascabilidad, es lo que permite la construcción de una lógica totalmente óptica ver Fig 15.

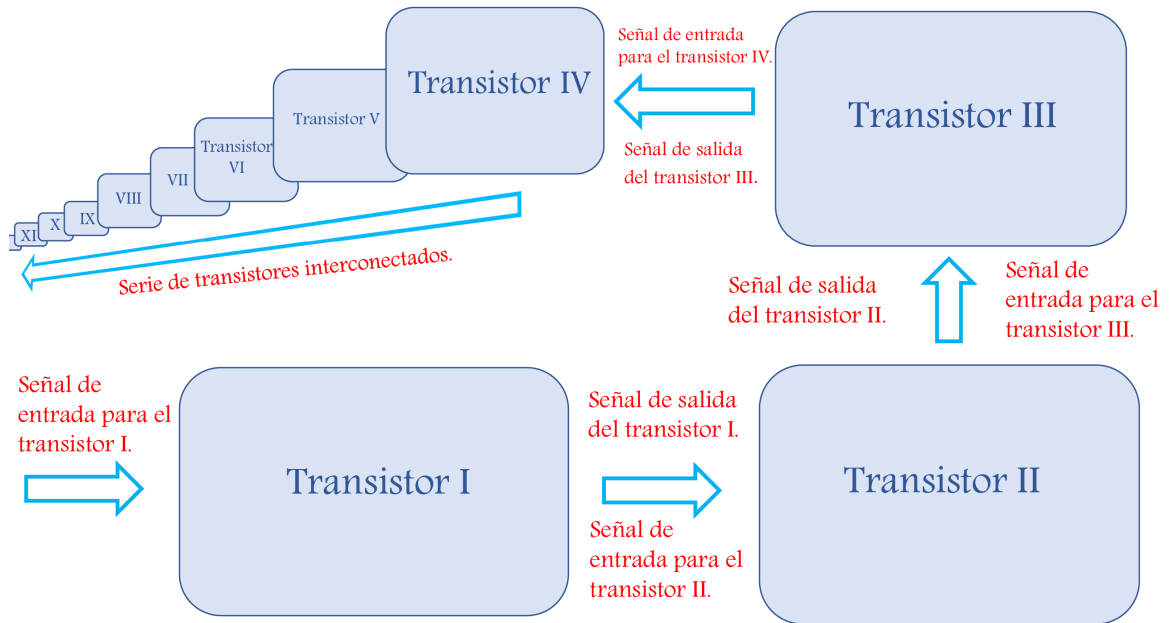


Figura 15: La señal de salida puede servir como señal de entrada para el siguiente transistor. Teóricamente este proceso se puede reproducir muchas veces.

## 7.2. Compuertas AND, OR y NOR.

La funcionalidad del transistor descrito en la subsección anterior, puede ser ampliada mediante la implementación de las compuertas AND y OR, donde se utilizan dos fluidos de excitones-polaritones propagantes en el plano, para funcionar como entradas de las compuertas. A su vez, esto permite tener un control del nivel de salida; obteniéndose así la implementación de una lógica totalmente óptica. Por otra parte, la operatividad del transistor polaritónico también ha motivado el esfuerzo de generar una implementación del conjunto completo de compuertas lógicas booleanas. Hasta ahora, el obstáculo principal para esta implementación es la ausencia de un mecanismo que sea capaz de desconectar una señal óptica por medio de otra señal óptica. Esta función de des-

conexión entre señales es conocida como negación; requisito esencial en el funcionamiento de una de las compuertas del conjunto completo de compuertas booleanas: la compuerta NOR. En este apartado también se ahonda en la propuesta ofrecida en [2], para la implementación de las compuertas NOT y NOR creadas a base de fluidos polaritónicos en una microcavidad semiconductor orgánica.

### 7.2.1. Compuertas AND y OR

Para la realización de las compuertas AND y OR es necesaria la implementación de un segundo haz de Dirección para generar cascabilidad en el sistema anteriormente descrito (sección 7.1), es decir, se requieren tres haces. Para obtener la cascabilidad en el sistema, una condición que se debe satisfacer es que uno de los transistores debe estar espacialmente separado del otro, obteniendo así una configuración en serie. Como primer paso, la entrada del primer transistor controla la salida del segundo, tal como se muestra esquemáticamente en las figuras fig:16 (a) y (b). Para esta configuración, el primer haz de dirección (A) y el segundo (B), se encuentran por debajo del umbral de activación. Como segundo paso, se añade un rayo de Control (C), para lograr modular la densidad de población de los polaritones. El tercer paso consiste en que una vez la densidad de C aumenta, el fluido de polaritón se propaga desde A hasta B, en donde a su vez se propaga en la dirección perpendicular (ver Fig. 16c y 16d). Debido a que la disposición experimental se encuentra en serie, cuando la densidad de Control C se mantiene por debajo del umbral, tanto en A como en B se interrumpe la creación del fluido de luz.

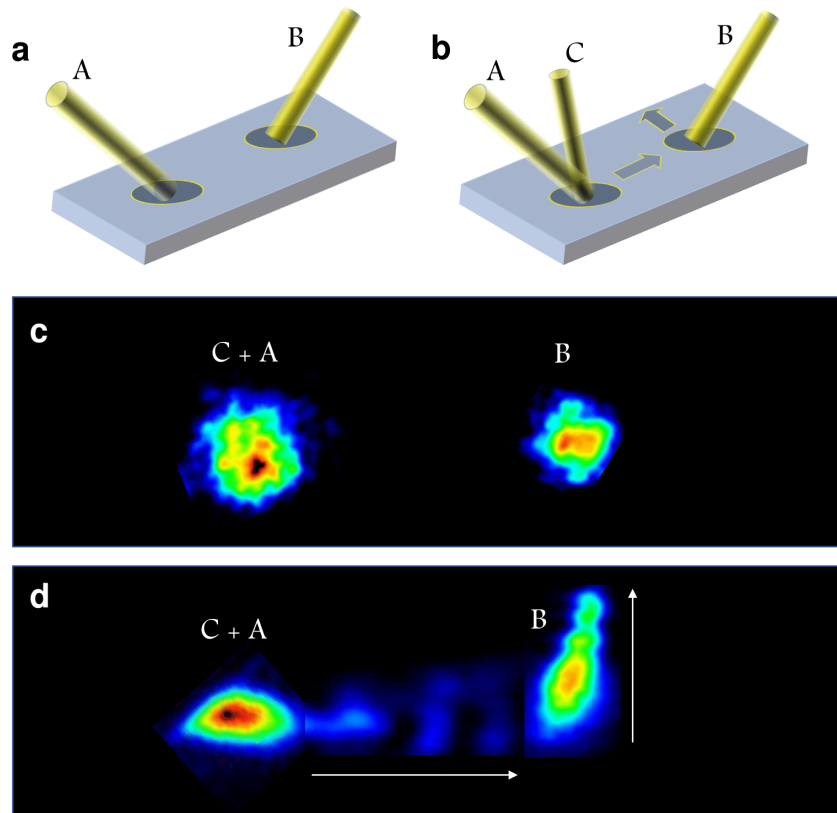


Figura 16: (a) Esquema de la configuración experimental con dos haces de dirección enfocados en puntos separados de la muestra con diferentes ángulos de incidencia. (b) Esquema de la propagación del polaritón cuando el Control C está enfocado sobre la Dirección A, con las flechas se indican la dirección de propagación de los respectivos estados del polaritón. Fig. tomada de Ref. [1].

Más de dos señales de Control pueden contribuir a la activación de la señal de Dirección, generando así la base para el funcionamiento del transistor como una compuerta lógica. En el esquema del sistema representado por la Fig. [17]. Tanto A como B están separados por una distancia dada, mientras que C se coloca cerca del punto de intersección entre A y B. De hecho, el transistor C funciona como una compuerta AND si se alcanza el umbral cuando tanto A como B estén encendidos (columna derecha superior de la Fig. [17]), mientras que funciona como una compuerta OR si solo se requieren A o B para la activación de C (columna izquierda superior de la Fig. [17]). Estos dos casos se pueden obtener si para la compuerta AND se reduce la potencia de dirección de C en sólo un 10% con respecto al caso de la compuerta OR. Debido a que de esta forma se está reduciendo ligeramente la ganancia en la compuerta AND. Esto aprovecha el comportamiento no lineal del sistema



constituido por el fluido polaritónico.

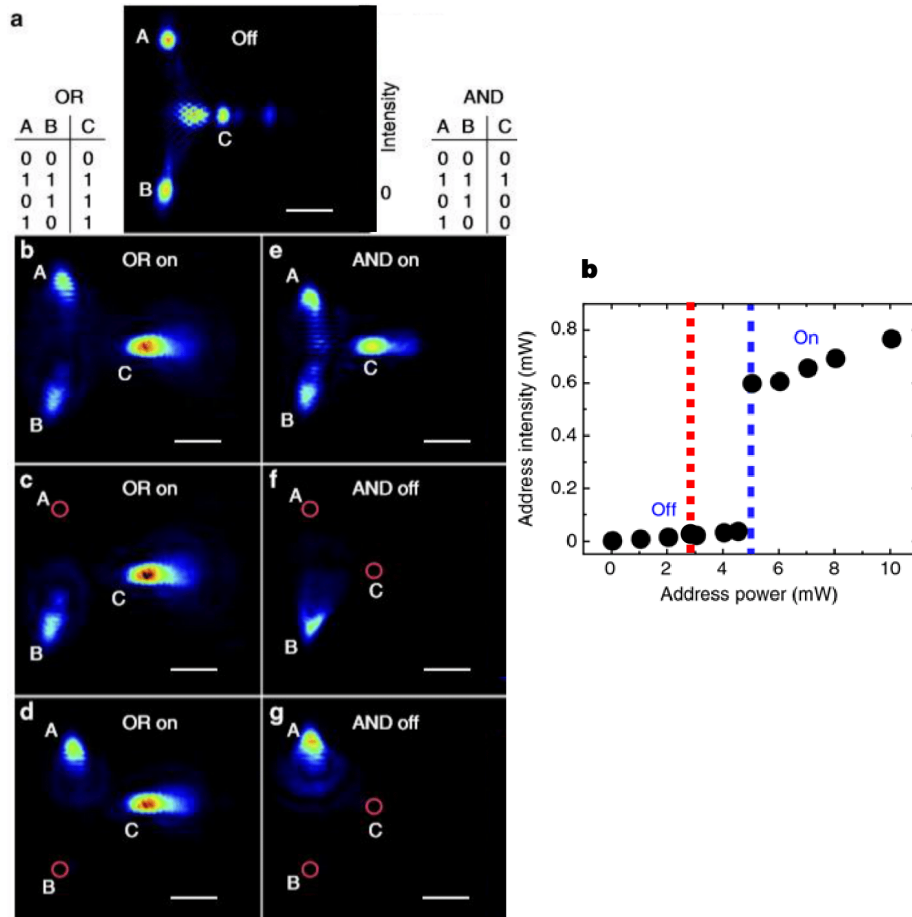


Figura 17: **a** Por medio de las propiedades fuertemente no lineales exhibidas en los fluidos polaritónicos es posible construir, mediante su implementación en microcavidades, una dinámica que corresponde al funcionamiento de las compuertas lógicas AND y OR. Imagen tomada de la Ref. [1]. Para cada una de las dos compuertas, los transistores A y B tienen señales de Dirección y de Control externas. Por otra parte, para el transistor C sólo existe una señal externa de Control, debido a que la salida proveniente de los transistores A y/o B sirve de señal de Dirección. **b** Las intensidades de salida de los transistores A y B pueden ser utilizadas como señales de dirección para el transistor C. En esta figura el estado de encendido se encuentra representado por la línea punteada azul. Mientras que por debajo de ese umbral, las intensidades de salida de A y B no son suficientes para funcionar como una nueva entrada para C; es así como se construye el estado de apagado. Un ejemplo para el estado de apagado es representado con la línea roja punteada.

Las compuertas lógicas AND y OR son representadas en el esquema

de tres transistores en la Fig. 17 en donde el transistor C se desempeña como compuerta lógica AND y OR, según sea el caso. Cuando A, B y C están por debajo del umbral de excitación, como en (b), las intensidades de salida (línea punteada roja) no son suficientes para funcionar como una nueva entrada para otro transistor. Ver Fig. 17b.

La compuerta OR se describe en los recuadros b, c y d. Para esta compuerta es suficiente con que A o B permanezcan por encima del umbral de excitación para que se logre generar una salida que funcione de entrada para el transistor en C; los casos en donde A y B están encendidos, de manera simultánea, se representa en la figura b, mientras que para los 2 últimos casos en donde sólo B y sólo A están encendidos están representados por los recuadros c y d, respectivamente. La puerta AND se obtiene bajando un 10% la potencia de Dirección de C, y se describe en los recuadros e, f y g. Para esta compuerta AND se requiere que tanto A como B estén encendidos, una vez satisfecha esta condición, C se activa. Los círculos rojos en los recuadros indican que en esos puntos en el sistema se encuentran en el estado de apagado.

### 7.2.2. Compuertas NOT y NOR

Para la realización de una compuerta lógica NOR se introduce el concepto de condensación dinámica de excitón-polaritón (*non-ground-state dynamic*) sin estado fundamental en una microcavidad semiconductor orgánica bajo excitación pulsada no resonante, propuesta en [2]. La introducción de este concepto permite la implementación de la funcionalidad de negación. Debido a que para cualquier señal de entrada insertada en momentos opuestos en el plano de la microcavidad, la condensación dinámica en estado no fundamental reemplaza la condensación espontánea del estado fundamental; esto logra generar una señal de salida en la compuerta NOT y NOR.

Con el fin de obtener la formación de condensación dinámica de excitón-polaritón en el estado no fundamental, se utiliza una microcavidad de polímero semiconductor. El acoplamiento del modo de la cavidad (2,65 eV) y dos subniveles del primer estado singlete<sup>2</sup> excitado ( $S_{10}$  a 2,72 eV

---

<sup>2</sup>En química cuántica, se dice comúnmente que un átomo o molécula se encuentra en “estado de espín electrónico singlete” si todos los espines de todos sus electrones se encuentran apareados. Es decir, el estado singlete es el nivel energético para el cual la suma total de sus espines electrónicos es cero.

y  $S_{11}$  a 2,91 eV) dan como resultado tres ramas de excitón-polaritón, que se muestran en la Fig. 18. Se configura un pulso de Control A, para inyectar resonantemente excitones-polaritones con momentos no nulos en el plano, esto con el fin de estimular la condensación dinámica de excitones-polaritones en estado no fundamental.

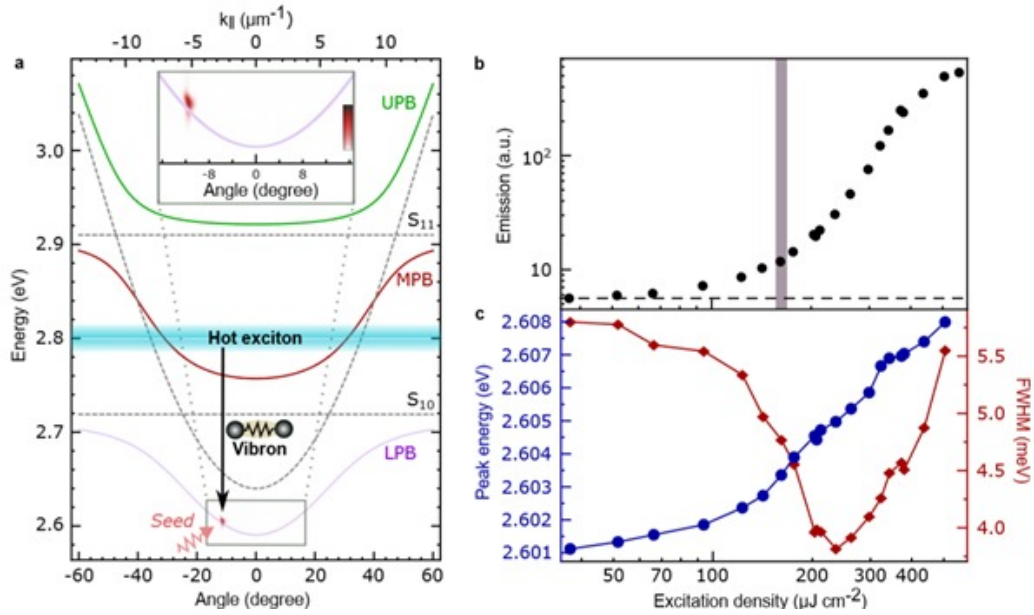


Figura 18: **a**) Debido al acoplamiento entre el modo de la cavidad y los dos subniveles del primer estado singlete excitado del semiconductor orgánico (representado con las líneas discontinuas horizontales en  $S_{10}$  y  $S_{11}$ ), se obtienen tres ramas del excitón-polaritón. La línea verde corresponde a la rama superior, mientras que las líneas de color rojo y violeta pertenecen a las ramas media e inferior, respectivamente. Se implementa un bombeo óptico que se sintoniza a 2.8 eV inyectando excitones “calientes” representados con un área sombreada en azul. El rayo Control inyecta algunos excitones-polaritones de manera resonante a  $k_{||} \approx -2,55\mu\text{m}^{-1}$ . La desintonización excitón-cavidad se elige para alinear el estado excitón-polaritón bombeado en 200 meV por debajo de los excitones bombeados. La relajación de energía del reservorio de excitones calientes ocurre con la emisión de un solo vibrón (flecha vertical sólida negra) y es estimulada por el haz de Control óptico incidente representada con una flecha roja. **b**), dependencia de la densidad de excitación de la bomba no resonante de la intensidad de la emisión resonante al pulso de Control. La intensidad de transmisión del Control es denotada con la línea horizontal discontinua, mientras que la densidad de excitación es representada por el área gris. **c**), FWHM correspondiente y la energía de emisión en el máximo del espectro de emisión. En el umbral caracterizado en **c**, se observa un colapso del FWHM y un cambio de energía al azul, esto denota la formación de un condensado de excitón-polaritón resonante. Imagen reproducida de [2].

Para obtener la funcionalidad de la compuerta NOT, como primer paso se sintoniza la energía del bombeo óptico no resonante con la energía de un vibrón molecular<sup>3</sup> por encima de la energía del pulso de semilla para permitir una relajación de energía mediada por vibrón de un desde el depósito de excitón caliente. En ausencia del pulso de semilla el bombeo induce la condensación de excitón-polaritón en el estado fundamental por relajación. La figura 18 (a) muestra la intensidad de emisión de un condensado de excitón-polaritón en el estado fundamental con incidencia normal,  $k_{\parallel} = 0$ . Además, al aumentar la potencia del haz de control, se observa un umbral, representado con un área sombreada en gris. Por encima de este umbral, la intensidad de emisión disminuye monótonamente. El segundo paso es añadir un pulso de Control para que la relajación de excitón-polaritón caiga al estado de polaritón no basal. La dependencia de la intensidad de emisión con respecto a el haz de control, ilustra la funcionalidad de la puerta NOT: el bombeo carga el transistor y el rayo semilla actúa como la entrada de control que cambia la salida entre los estados “1” y “0”, ver Fig. 19a.

Con respecto al sistema anteriormente descrito, para configurar una compuerta NOR, primeramente se implementa un segundo haz de Control (B); el cual inyecta excitones-polaritones resonantes con una potencia igual a la del haz de Control A. El haz de Control B tiene un momento opuesto en el plano al de A, es decir,  $k_B = -k_A$ . Esto se muestra de forma esquemática en la Fig. 19b, en donde además se muestra la variabilidad de la intensidad de emisión del condensado de excitón-polaritón en el estado fundamental respecto a la energía de los haces de siembra. El segundo paso consiste en coordinar la operabilidad experimental del sistema para permitir a las dos entradas de los haces semilla tener la función de dos entradas de control de una compuerta NOR.

---

<sup>3</sup>En estado sólido un vibrón es entendido como un cuanto de vibración intramolecular.

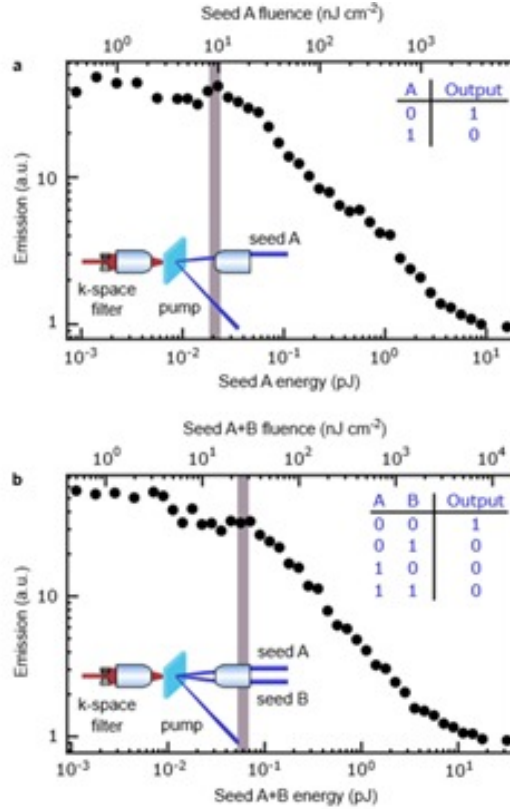


Figura 19: Se observa que al aumentar la potencia del haz semilla, se obtiene un umbral (área gris), por encima del cual la intensidad de emisión disminuye. Las tablas de la esquina superior derecha en a y b son las tablas de verdad correspondientes a las compuertas NOT y NOR, respectivamente.

Típicamente, en los sistemas ópticos las señales pierden calidad, debido a su propagación por el sistema. Es por esto que la restauración de la energía de las señales de salida es una importante funcionalidad, listada en los requisitos para la realización de una lógica totalmente óptica. Es necesario que la señal de salida funcione como una señal de entrada para la siguiente etapa. Con el fin de lograr la restauración de la señal para la compuerta NOR, ésta se conecta en cascada y se re-acondiciona la señal, mediante una etapa de amplificación por medio de un bombeo óptico idéntico a la de la compuerta NOR. El haz de bombeo tiene la funcionalidad de perilla de ajuste mediante el desvío de la energía del fotón de la señal de salida hacia el haz de las semillas. Esta nueva salida puede ser utilizada como una señal semilla para la siguiente etapa compuesta por otras compuertas NOR, debido a que por medio de la amplificación de la señal de salida, es posible igualar la energía a la de las señales de

entrada.

En la Figura 20a se observa el espectro de emisión de salida de la compuerta NOR, a la vez que en la figura 20b se representa la emisión del condensado re-acondicionado (en rojo) y el condensado en estado no fundamental (en verde). Mediante esta compuerta NOR con la señal de salida regenerada, es posible obtener una disposición de múltiples compuertas interconectadas.

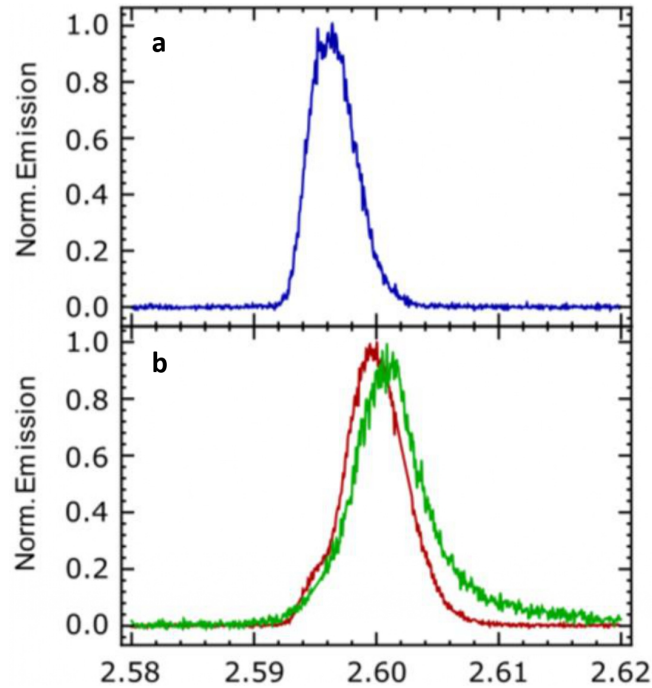


Figura 20: (a) Espectro de emisión de la salida de la puerta NOR sin regeneración.(b) Espectro de emisión tanto del estado fundamental amplificado (espectro regenerado de salida), como del condensado en estado no fundamental (espectro de entrada). Después de la regeneración de la señal se exhibe una buena compatibilidad entre el espectro de entrada y salida.

La obtención de una puerta NOR polaritónica, proporciona el bloque de construcción básico para una plataforma completa de circuitos lógicos totalmente ópticos, operativa a temperatura ambiente y alta velocidad. La futura ampliación a circuitos lógicos complejos aprovechará favorablemente las arquitecturas planas de microcavidades fotónicas que están fácilmente disponibles [2].

## 8. Conclusiones

La realización de las compuertas NOT, OR, AND y NOR en plataformas de excitones-polarites, proporcionan un bloque de construcción básico para la creación de dispositivos compuestos de circuitos lógicos totalmente ópticos. La futura ampliación a circuitos lógicos complejos podría aprovechar las arquitecturas de las microcavidades fotónicas que están fácilmente disponibles. Debido a las constantes mejoras en el uso de los fluidos polaritónicos, los transistores polaritónicos son hoy en día una propuesta teóricamente sólida para la creación de una lógica totalmente óptica. Sin embargo, para avanzar más con esta tecnología polaritónica hacia circuitos completos, es vital controlar los mecanismos detrás de la dinámica del fluido polaritónico para desarrollar técnicas de fabricación robustas y escalables. Una dirección futura es pensar en cómo integrar estos componentes fundamentales para construir compuertas lógicas más sofisticadas e, incluso, pensar en la posibilidad de crear compuertas lógicas cuánticas.



# A. Apéndice: Ecuación de Gross-Pitaevskii con espín

La condensación de Bose-Einstein para un gas ideal de bosones idénticos se introdujo en la sección 3, mientras que en la sección 4 se estudió este sistema cuando los bosones son considerados sin spin. Para este caso, el formalismo de la función de onda es simple y la introducción de los operadores de creación aniquilación no conducen a una simplificación importante en los cálculos. Ese procedimiento nos llevó a la primera versión de la ecuación de Gross-Pitaevskii (72). Utilizando la notación de Dirac y la implementación de algunos operadores, aquí se tratará el caso más general de la ecuación de Gross-Pitaevskii, para el caso en el que las partículas tienen spin.

## A.1. Notación

El operador Hamiltoniano considerado está constituido por una suma de operadores: para la energía cinética  $\hat{H}_0$ , energía potencial  $\hat{V}_{ext}$ , y la energía de interacción  $\hat{W}_{int}$ , por lo que

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_{ext} + \hat{W}_{int}. \quad (113)$$

Aquí,  $\hat{H}_0$  es la suma de los operadores de energía cinética individuales asociadas a cada una de las partículas  $q$ ,

$$\hat{H}_0 = \sum_q K_0(q), \quad (114)$$

donde  $K_0(q) = \frac{\mathbf{P}_q^2}{2m}$  y  $\mathbf{P}$  es el momento de la partícula  $q$ . Por otra parte,  $\hat{V}_{ext}$  es la suma de los operadores potenciales externos  $V_1(\mathbf{R}_q)$  y cada uno depende del operador posición  $\mathbf{R}$ , por lo que

$$\hat{V}_{ext} = \sum_{q=1}^N V_1(\mathbf{R}_q). \quad (115)$$

El último término  $\hat{W}_{int}$ , es la suma de la energía de interacción asociada a los pares de partículas  $(q, q')$ , entonces

$$\hat{W}_{int} = \frac{1}{2} \sum_{q \neq q' \neq 1}^N W_2(\mathbf{R}_q, \mathbf{R}_{q'}). \quad (116)$$

Se elige un estado cuántico normalizado  $|\theta\rangle$  ( $\langle\theta|\theta\rangle = 1$ ). Los kets considerados para las  $N$  partículas, están definidos por la familia de todos los kets que pueden ser representados como

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} [a_\theta^\dagger]^N |0\rangle. \quad (117)$$

## A.2. Generalización de la Ecuación de Gross-Pitaevskii

Se considera una base  $\{|\theta_k\rangle\}$  del espacio de estados, con el primer vector  $|\theta_1\rangle = |\theta\rangle$ . Este ket es un estado de Fock cuyo único número de ocupación distinto de cero es el primero:

$$|\tilde{\Psi}\rangle = |n_1 = N, n_2 = 0, n_3 = 0\rangle. \quad (118)$$

Este ket es relevante porque un conjunto de bosones que ocupan el mismo estado se denomina “ condensado de Bose-Einstein”. Como parámetro para el método variacional, se considera a  $|\theta\rangle$ , con el fin de minimizar la energía media

$$\tilde{E} = \langle\tilde{\Psi}|\hat{H}|\tilde{\Psi}\rangle. \quad (119)$$

Para calcular el valor de la energía promedio, se usa una base  $\{|\theta_k\rangle\}$  del espacio de estados, para el cual, el primer vector es  $|\theta_1\rangle = |\theta\rangle$ . Usando la relación  $\hat{F} = \sum_{k,l} \langle u_k | \hat{f} | u_l \rangle a_k^\dagger a_l$ , el valor promedio de  $\hat{H}_0$  puede ser descrito como

$$\langle\hat{H}_0\rangle = \sum_{k,l} \langle\theta_k|k_0|\theta_l\rangle \langle\tilde{\Psi}|a_k^\dagger a_l|\tilde{\Psi}\rangle. \quad (120)$$

Debido a que  $|\tilde{\Psi}\rangle$  es un estado de Fock cuya única población distinta de cero es la del estado 1, entonces el ket  $a_k^\dagger a_l |\tilde{\Psi}\rangle$  es distinto de cero cuando  $l = 1$ ; por lo que es ortogonal a  $|\tilde{\Psi}\rangle$ , si  $k \neq 1$ , por lo que el término no nulo que se queda en la suma aparece cuando  $k = l = 1$ . Además, debido a que el operador  $a_1^\dagger a_l$ , multiplica el ket por la cantidad de partículas  $N$ , se obtiene

$$\langle\hat{H}_0\rangle = N \langle\theta_1|K_0|\theta_1\rangle. \quad (121)$$

El valor promedio de la energía potencial también puede ser descrita como

$$\langle \hat{V}_{ext} \rangle = \sum_{k,l} \langle \theta_k | \hat{V}_{ext} | \theta_l \rangle \langle \tilde{\Psi} | a_k^\dagger a_l | \tilde{\Psi} \rangle. \quad (122)$$

Aquí, nuevamente  $|\tilde{\Psi}\rangle$  es un estado de Fock. Por lo que al igual que para  $\langle \hat{H}_0 \rangle$ , podemos escribir a  $\langle \hat{V}_{ext} \rangle$ , como

$$\langle \hat{V}_{ext} \rangle = N \langle \theta_1 | V_1 | \theta_1 \rangle. \quad (123)$$

Es posible expresar el valor medio de la energía de interacción como

$$\langle \hat{W}_2 \rangle = \langle \mathbf{R}_1 : \theta_k; \mathbf{R}_2 : \theta_1 | W_2(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) | \mathbf{R}_1 : \theta_m; \mathbf{R}_2 : \theta_n \rangle \langle \tilde{\Psi} | a_k^\dagger a_l^\dagger a_n a_m | \tilde{\Psi} \rangle.$$

Para que el segundo elemento de la matriz sea distinto de cero, los subíndices m y n deben ser iguales a 1, al igual que k y l, esto debido a que si son distintos de 1, el operador solamente producirá un estado de Fock ortogonal a  $|\tilde{\Psi}\rangle$ . Una vez que n,m,k y l son iguales a 1, el operador multiplica al ket  $|\tilde{\Psi}\rangle$  por  $N(N-1)/2$ . Entonces

$$\langle \hat{W}_2 \rangle = \frac{N(N-1)}{2} \sum_{k,l,m,n} \langle \mathbf{R}_1 : \theta_k; \mathbf{R}_2 : \theta_1 | W_2(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) | \mathbf{R}_1 : \theta_m; \mathbf{R}_2 : \theta_n \rangle.$$

Así que la energía de la interacción promedio es el producto del número de pares  $N(N-1)/N$  que se pueden formar con partículas y la energía de interacción promedio para un par de partículas dado. Por tanto

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= N \langle \theta_1 | K_0 | \theta_1 \rangle + N \langle \theta_1 | V_1 | \theta_1 \rangle + \\ &\frac{N(N-1)}{2} \langle \mathbf{R}_1 : \theta_k; \mathbf{R}_2 : \theta_1 | W_2(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) | \mathbf{R}_1 : \theta_m; \mathbf{R}_2 : \theta_n \rangle, \end{aligned} \quad (124)$$

$$\tilde{E} = N \langle \theta_1 | [K_0 + V_1] | \theta_1 \rangle \langle \mathbf{R}_1 : \theta_k; \mathbf{R}_2 : \theta_1 | W_2(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) | \mathbf{R}_1 : \theta_m; \mathbf{R}_2 : \theta_n \rangle. \quad (125)$$

Para la minimización de la energía, se considera una variación sobre

$$|\theta\rangle \rightarrow |\theta\rangle + e^{i\chi} |\delta\alpha\rangle, \quad (126)$$

aquí  $|\delta\alpha\rangle$ , es un ket infinitesimal arbitrario del espacio de estado, mientras que  $\chi$  es un número real cualquiera.

Substituyendo (107) en (105) para obtener la variación  $d\tilde{E}$  de la energía, se obtiene la suma de dos términos: uno proviene de la variación del ket  $|\theta\rangle$ , y es proporcional a  $e^{i\chi}$ , mientras que el segundo término proviene de la variación del bra  $\langle\theta|$ , y es proporcional a  $e^{-i\chi}$ , por lo que se obtiene [4]:

$$\delta\tilde{E} = \delta c_1 e^{i\chi} + \delta c_2 e^{-i\chi}. \quad (127)$$

Se impone que la variación sea cero, debido a que sólo varía  $\langle\theta|$  o  $|\theta\rangle$ . Al variar sólo a  $\langle\theta|$

$$0 = N\langle\delta\alpha|[K_0 + V_1 - \mu]|\theta\rangle + \quad (128)$$

$$\frac{N(N-1)}{2} [\langle\mathbf{R}_1 : \delta\alpha; \mathbf{R}_2 : \theta_1 | W_2(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) | \mathbf{R}_1 : \theta_m; \mathbf{R}_2 : \theta_n \rangle +$$

$$\langle\mathbf{R}_1 : \theta_1; \mathbf{R}_2 : \delta\alpha | W_2(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) | \mathbf{R}_1 : \theta_m; \mathbf{R}_2 : \theta_n \rangle].$$

Debido a que el operador  $W(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$  es simétrico

$$0 = N\langle\delta\alpha|[K_0 + V_1 - \mu]|\theta\rangle + N(N-1)\langle\mathbf{R}_1 : \delta\alpha; \mathbf{R}_2 : \theta_1 | W_2(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) | \mathbf{R}_1 : \theta; \mathbf{R}_2 : \theta \rangle.$$

Se introduce el operador  $V_{GP}^\theta$  [4], definido como un operador de una partícula con elementos de la matriz en una base arbitraria  $|u_i\rangle$  dados por:

$$\langle V | V_{GP}^\theta | V' \rangle = (N-1)\langle\mathbf{R}_1 : V; \mathbf{R}_2 : \theta_1 | W_2(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) | \mathbf{R}_1 : V'; \mathbf{R}_2 : \theta \rangle. \quad (129)$$

Substituyendo la expresión anterior en (110). Se obtiene

$$0 = N\langle\delta\alpha|[K_0 + V_1 - \mu]|\theta\rangle + \langle V | V_{GP}^\theta | V' \rangle, \quad (130)$$

$$0 = N\langle\delta\alpha|[K_0 + V_1 + V_{GP}^\theta]|\theta\rangle, \quad (131)$$

$\langle\delta\alpha|$  y  $|\theta\rangle$  deben seguir obedeciendo la condición de ortogonalidad  $\langle\delta\alpha|\theta\rangle = 0$ . Así que el ket que resulta de  $[K_0 + V_1 + V_{GP}^\theta]$  sobre  $|\theta\rangle$ , debe tener componentes cero en todos los vectores que sean ortogonales a  $|\theta\rangle$ .

Así,

$$[K_0 + V_1 + V_{GP}^\theta]|\theta\rangle = \mu|\theta\rangle. \quad (132)$$

Un valor óptimo  $|\varphi\rangle$  de  $|\theta\rangle$  es la solución a la ecuación de Gross-Pitaevskii

$$[K_0 + V_1 + V_{GP}^\varphi]|\theta\rangle = \mu|\varphi\rangle. \quad (133)$$

Esta es una generalización de la ecuación (72). Es importante resaltar que para cada partícula, el operador  $V_{GP}^\theta$  representa el campo medio creado por todas las demás partículas en el mismo estado  $|\varphi\rangle$ .

## B. Apéndice: Códigos

### B.1. Cálculo de la densidad del condensado y la distribución de Bose-Einstein (Python)

Esta gráfica corresponde a la Fig. 3.

$$f(T) = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

La ecuación indica que la fracción de partículas se aproxima al 100% cuando  $T \rightarrow 0$ .

En la gráfica se muestra este comportamiento.

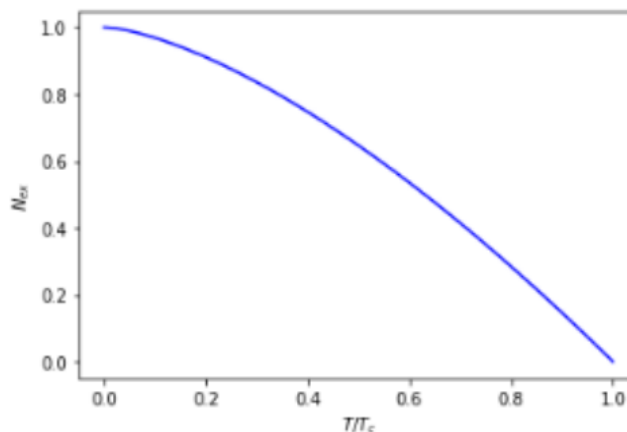
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(T):
    return 1-(T/Tc)**(3/2)

Tc = 2.7
T = np.linspace(0,2.7,10**4)

plt.text(0.1,0.5, color = 'b')
plt.xlabel(r"$T/T_c$")
plt.ylabel(r"$N_{ex}$")
plt.plot(T/Tc,f(T), "b")
```

[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fceccc38c10>]



Este código corresponde a la Fig. 2, que muestra la gráfica del comportamiento de la función de distribución de Bose y de Boltzmann en términos de la fugacidad.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Distribución de Bose-Einstein:
# Se define la función de distribución para una fugacidad de 0.25, 0.5 y 1:

def h(x):
    return 1/((1**-1) *(np.exp(x)) - 1 )

def g(x):
    return 1/((0.5**-1) *(np.exp(x)) - 1 )

def i(x):
    return 1/((0.25**-1) *(np.exp(x)) - 1 )

# Distribución de Boltzmann:
# A altas temperaturas, los efectos de la estadística cuántica se vuelven
# insignificantes y la función de distribución viene dada aproximadamente por la
# distribución de Boltzmann.
# Se define la función para una fugacidad de 0.25, 0.5 y 1.

def j(x):
    return (1)*(np.exp(-x))

def k(x):
    return (0.5)*(np.exp(-x))

def l(x):
    return (0.25)*(np.exp(-x))

v = [0,2,0,4]

x = np.linspace(0,2,100000)

# para imprimir la distribución de Bose

plt.plot(x,h(x), "b") # b = blue
plt.plot(x,g(x), "g") # g = green
plt.plot(x,i(x), "r") # r = red

# para imprimir la distribución de Boltzmann

plt.plot(x,j(x), "b--")
plt.plot(x,k(x), "g--")
plt.plot(x,l(x), "r--")

plt.xlabel('ε/kT')
plt.ylabel('f')

plt.title('Función de distribución en términos de la fugacidad. ')

plt.text(0.55,1.5, 'ζ=1', color='b')
plt.text(0.1,1.0, 'ζ=0.5', color='g' )
plt.text(0.01,0.55, 'ζ=0.25', color='r')

plt.axis(v)
```

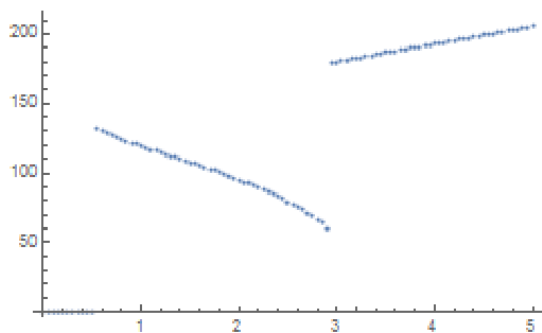
## B.2. No linealidad presentada en la ecuación de Gross-Pitaevskii. Fig. 13 (Mathematica)

```

(*Se dividen todas las escalas de energía entre 2Ω*)
(* Energía de los polaritones *)
ELP0[x_] := 0.5*(x - Sqrt[x^2 + 1]);
                                     [raíz cuadrada]
EUP0[x_] := 0.5*(x + Sqrt[x^2 + 1]);
                                     [raíz cuadrada]
(* Coeficientes de Hopfield *)
CH02[x_] := 0.5*(1 + x/Sqrt[x^2 + 1]);
                                     [raíz cuadrada]
SH02[x_] := 0.5*(1 - x/Sqrt[x^2 + 1]);
                                     [raíz cuadrada]
(* Ω=0.4 meV. Valor del acoplamiento en eV *)
Ω = 8×10-3;
(* Velocidad de la luz en cm *)
cc = 2.99×1010;
(* Constante de Planck en eV*s *)
hh = 6.582×10-16;
(* gxx=3 micro eV * microm^2. Valor de la interacción en ev/cm2 transformada a eV *)
gxx = (3 / (2*Ω)) * (1×10-6) * (1×10-3) * (1 / (hh*cc) ^2)
(* γ=0.4 meV. Valor del decaimiento en ev *)
γ = 0.4 * (8×10-3) / (2*Ω)
(* Valor del bombeo *)
epu = 1.7;
(* Desintonización *)
δ = -1;
(* Ecuaciones a resolver *)
fRe[ψx_, ψy_, x_, epu_] := (epu - ELP0[x] - CH02[x] + CH02[x] * gxx * (ψx^2 + ψy^2)) * ψx - γ * ψy;
fIm[ψx_, ψy_, x_, epu_, A_] := (epu - ELP0[x] - CH02[x] + CH02[x] * gxx * (ψx^2 + ψy^2)) * ψy + γ * ψx - A;
(* Valores de la amplitud de bombeo *)
Ai = 0.0;
Af = 5.0;
dA = 0.05;
nA = IntegerPart[Abs[Af - Ai] / dA]
      [parte entera   [valor absoluto]
(* Unidades de la amplitud de bombeo cm-2 *)
au = (1 / (2*Ω)) * (1 / (hh*cc) ^2);
(* Tabla y gráfica *)
AA = Table[{Ai + (k - 1) * dA, {ψx, ψy} /. NSolve[{{fRe[ψx, ψy, δ, epu] == 0, fIm[ψx, ψy, δ, epu,
      [tabla                                     [resolvidor numérico]
      Ai + (k - 1) * dA * au] == 0}, {ψx, ψy}, Reals][[1]]], {k, 1, nA + 1}}];
      [números reales]
ListPlot[Table[{Ai + (k - 1) * dA, gxx * (AA[[k, 2, 1]]^2 + AA[[k, 2, 2]]^2)}, {k, 1, nA + 1}]]
[representa... [tabla]
0.00484109
0.2
100

```





```
(* Se ven cuántas soluciones hay y se separa (a mano) de acuerdo con eso. *)
Table[{Ai + (k - 1) * dA, Dimensions[NSolve[{fRe[ψx, ψy, δ, epu] == 0, fIm[ψx, ψy, δ, epu, Ai +
[tabla
[dimensiones [resolvidor numérico
(k - 1) * dA * au] == 0}, {ψx, ψy}, Reals]]], {k, 1, nA + 1}]
[números reales

A3 = Table[{Ai + (k - 1) * dA, {ψx, ψy} /. NSolve[{fRe[ψx, ψy, δ, epu] == 0, fIm[ψx, ψy, δ, epu, Ai
[tabla
[resolvidor numérico
+ (k - 1) * dA * au] == 0}, {ψx, ψy}, Reals][[3]]], {k, 13, 69}}];
[números reales

A2 = Table[{Ai + (k - 1) * dA, {ψx, ψy} /. NSolve[{fRe[ψx, ψy, δ, epu] == 0, fIm[ψx, ψy, δ, epu, Ai +
[tabla
[resolvidor numérico
(k - 1) * dA * au] == 0}, {ψx, ψy}, Reals][[2]]], {k, 13, 69}}];
[números reales

A1 = Table[{Ai + (k - 1) * dA, {ψx, ψy} /. NSolve[{fRe[ψx, ψy, δ, epu] == 0, fIm[ψx, ψy, δ, epu, Ai +
[tabla
[resolvidor numérico
(k - 1) * dA * au] == 0}, {ψx, ψy}, Reals][[1]]], {k, 1, nA + 1}}];
[números reales

(* Se grafica *)
imgSize = 1000; imagePadding2 = {{120, 50}, {100, 50}};
Show[Graphics[{AbsolutePointSize[10.0], Dashed, Black, Line[{{0.55, 0}, {0.55, 130}}]}],
[mues- gráfico [tamaño absoluto de punto [rayado [negro [línea
{Graphics[{AbsolutePointSize[10.0], Dashed, Black, Line[{{3, 40}, {3, 175}}]}],
[gráfico [tamaño absoluto de punto [rayado [negro [línea
{ListPlot[Table[{A3[[k, 1]], gxx * (A3[[k, 2, 1]]^2 + A3[[k, 2, 2]]^2)}, {k, 1,
[representa... [tabla
Dimensions[A3][[1]]], PlotStyle -> {AbsolutePointSize[10.0], Red}], ListPlot[Table[{A2[[k, 1]],
gxx * (A2[[k, 2, 1]]^2 + A2[[k, 2, 2]]^2)}, {k, 1, Dimensions[A2][[1]]}], PlotStyle -> {AbsolutePointSize[10.0], Blue}],
[dimensiones [estilo de repre... [tamaño absoluto de punto [azul
ListPlot[Table[{A1[[k, 1]], gxx * (A1[[k, 2, 1]]^2 + A1[[k, 2, 2]]^2)}, {k, 1, nA + 1}],
[representa... [tabla
PlotStyle -> {AbsolutePointSize[10.0], Black}], PlotRange -> {{Ai, Af}, {0, 250}}, AspectRatio -> 1/2,
[estilo de repre... [tamaño absoluto de punto [negro [rango de representación [cociente de aspecto
AxesOrigin -> {0, 0}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times New Roman", 30}, LabelStyle -> {FontFamily -> "Times New Roman", 30},
[origen de ejes [estilo base [familia de tipo de letra [estilo de etiqueta [familia de tipo de letra
FrameLabel -> {Style[" Intensidad de bombeo/2Ω ", FontSize -> 40], Style[" gxx |ψ|^2/2Ω ", FontSize -> 40]},
[etiqueta de marco [estilo [tamaño de tipo de ... [estilo [tamaño de tipo de letra
```

```

FrameTicks → {{All, All}, {All, All}}, FrameTicksStyle → {{Directive[FontOpacity → 1, FontSize → 40],
[marcas del marco [todo [todo [todo [todo [estilo de marcas del marco [directiva [opacidad de tipo de l... [tamaño de tipo de letra
Directive[FontOpacity → 0, FontSize → 0]}, {Directive[FontOpacity → 1, FontSize → 40],
[directiva [opacidad de tipo de ... [tamaño de tipo de le... [directiva [opacidad de tipo de ... [tamaño de tipo de letra
Directive[FontOpacity → 0, FontSize → 0]}}, Frame → True, RotateLabel → True, FrameStyle → Directive[Black, Thick]
[directiva [opacidad de tipo de ... [tamaño de tipo de le... [marco [verd... [rota etiqueta [verd... [estilo de marco [directiva [negro [grosso
LabelStyle → Directive[40], ImageSize → imgSize, ImagePadding → imagePadding2]
[estilo de etiqueta [directiva [tamaño de imagen [relleno de imagen

```

## Referencias

- [1] Dario Ballarini, Milena De Giorgi, Emiliano Cancellieri, Romuald Houdré, Elisabeth Giacobino, Roberto Cingolani, Alberto Bramati, Giuseppe Gigli, and Daniele Sanvitto. All-optical polariton transistor. *Nature communications*, 4(1):1–8, 2013.
- [2] Anton V Baranikov, Anton V Zasedatelev, Darius Urbonas, Fabio Scafirimuto, Ullrich Scherf, Thilo Stöferle, Rainer F Mahrt, and Pavlos G Lagoudakis. All-optical cascable universal logic gate with sub-picosecond operation. *arXiv preprint arXiv:2005.04802*, 2020.
- [3] Iacopo Carusotto and Cristiano Ciuti. Quantum fluids of light. *Rev. Mod. Phys.*, 85:299–366, Feb 2013.
- [4] C Cohen-Tannoudji, B Diu, and F Laloe. Quantum mechanics. vol. 3. rev. 2008.
- [5] National Research Council et al. *Harnessing light: optical science and engineering for the 21st century*. National Academies Press, 1998.
- [6] Hui Deng, Hartmut Haug, and Yoshihisa Yamamoto. Exciton-polariton bose-einstein condensation. *Reviews of modern physics*, 82(2):1489, 2010.
- [7] Jean-Pierre Deschamps, Elena Valderrama, and Lluís Terés. *Digital systems: From logic gates to processors*. Springer, 2016.
- [8] JJ Hopfield. Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant of crystals. *Physical Review*, 112(5):1555, 1958.
- [9] Jacek Kasprzak, Murielle Richard, S Kundermann, A Baas, P Jeambrun, Jonathan Mark James Keeling, FM Marchetti, MH Szymańska, R André, JL Staehli, et al. Bose-einstein condensation of exciton polaritons. *Nature*, 443(7110):409–414, 2006.
- [10] Alexey V. Kavokin, Jeremy J. Baumberg, Guillaume Malpuech, and Fabrice P. Laussy. *Microcavities*. Series on Semiconductor Science and Technology. Oxford University Press, 2017.
- [11] Jonathan Keeling and Stéphane Kéna-Cohen. Bose–einstein condensation of exciton-polaritons in organic microcavities. *Annual review of physical chemistry*, 71:435–459, 2020.

- [12] Konstantinos Lagoudakis. *The physics of exciton-polariton condensates*. EPFL Press, 2019.
- [13] D.A.B. Miller. Physical reasons for optical interconnection. *Int. J. Optoelectron*, 11:155–168, 1997.
- [14] David A. B. Miller. Device requirements for optical interconnects to cmos silicon chips. In *Integrated Photonics Research, Silicon and Nanophotonics and Photonics in Switching*, page PMB3. Optical Society of America, 2010.
- [15] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2 edition, 2008.
- [16] David Snoke and Peter Littlewood. Polariton condensates. *Physics Today*, 63(8):42–47, 2010.
- [17] David W Snoke and Jonathan Keeling. The new era of polariton condensates. *Phys. Today*, 70(10):54–60, 2017.

# ¿QUÉ SON LAS MICROCAVIDADES ÓPTICAS?

## Estructura

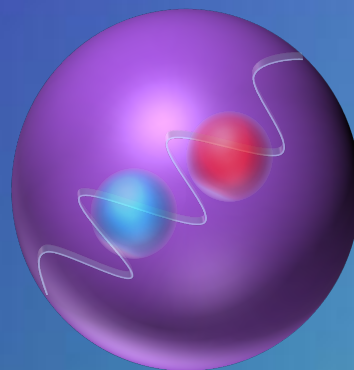
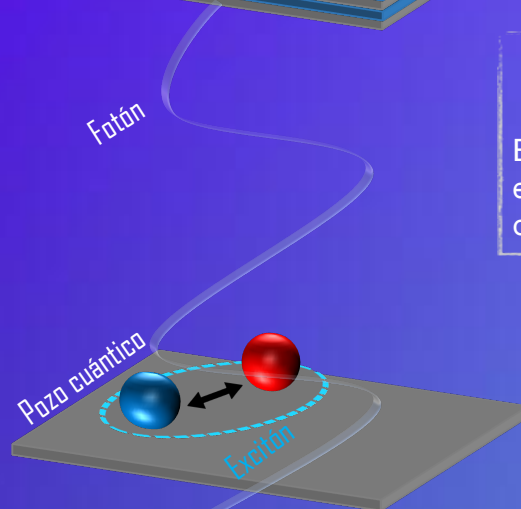
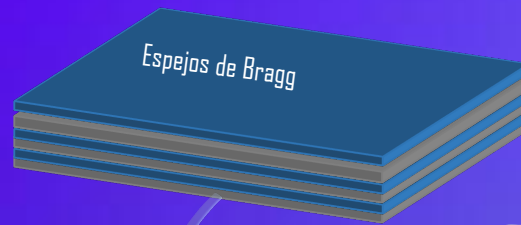
Una **microcavidad óptica** es una estructura formada por caras reflectantes en ambos lados de un medio óptico como los espejos de Bragg.

Aunque el principio operacional de una microcavidad es básicamente el mismo que el de una cavidad óptica convencional; la diferencia fundamental en las microcavidades son los efectos que surgen debidos a las pequeñas dimensiones del sistema, tales como los efectos no lineales en excitones-polaritones.

## Usos

Las **microcavidades ópticas** confinan la luz a pequeños volúmenes mediante recirculación resonante. Los dispositivos basados en microcavidades ópticas ya son indispensables para una amplia gama de aplicaciones y estudios.

Por ejemplo, al colocar un semiconductor dentro de ellas se pueden acoplar fuertemente luz y materia y crear estados cuánticos híbridos como los excitones-polaritones.



Excitón-polaritón

Departamento de Física

Área de Física Teórica

## Pozo cuántico

El pozo cuántico confina en dos dimensiones a las cuasipartículas.

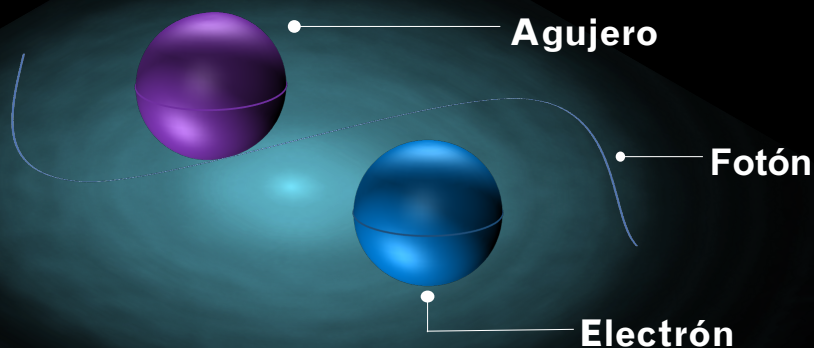
## Espejos de Bragg

Un espejo o reflector de Bragg es una estructura de espejo que consiste en una secuencia alterna de capas de dos materiales ópticos diferentes, tales como ZnSe o SiO<sub>2</sub>.

La alta reflectancia de los espejos de Bragg permiten microcavidades con factores de calidad relativamente altos, generalmente del orden de  $10^5$ - $10^6$  que garantizan fotones con tiempos de vida muy largos.



# ¿Qué son los excitones-polaritones?



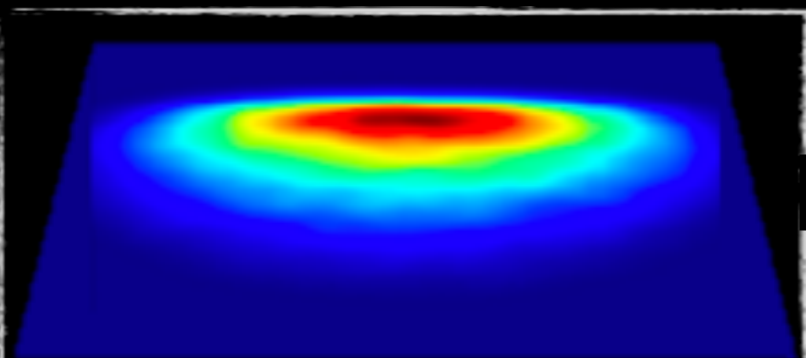
## Acoplamiento fuerte

A diferencia de la propagación en el vacío, si la luz entra en un medio polarizable, se verá afectada por la interacción con la materia. Si el acoplamiento es fuerte el fotón se hibridiza con las excitaciones materiales para crear un estado cuántico híbrido: el polaritón.

Los excitones-polaritones son polaritones que surgen del acoplamiento fuerte entre la luz y las excitaciones de un semiconductor dentro de una microcavidad [1].

## Condensación

Una aplicación práctica puede realizarse debido a que los excitones polaritones a bajas densidades pueden ser pensados como bosones compuestos de una masa efectiva muy pequeña, de modo que estos pueden sufrir una condensación de Bose-Einstein a temperaturas relativamente altas. Evidencias de condensados en estado sólido se han obtenido recientemente [2].



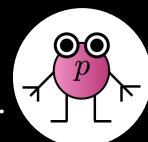
**Distribución de momentos que confirma la condensación 2D de Bose-Einstein de excitones-polaritones.**

Encuentra más información en:

[1] I Carusotto et al., Quantum Fluids of Light. Rev.Mod.Phys.85,299(2013).

[2] J. Kasprzak et al., Nature 443, 409 (2006).

Autor: J. G. Huerta Escobar.  
Grupo del Dr. Bastarrachea-Magnani.



Ciudad de México, 26 de Mayo de 2021

A quien corresponda

Tenemos el gusto de informarle que el trabajo con clave única: **LXIV-003135** y cuyo título es: **Revisión crítica de transistores polaritónicos**, de los autores:

- Bastarrachea Magnani Miguel Angel  
Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa
- Escobar Huerta Jesús Gerardo \*
- Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa

\* *Presentador*

Fue aceptado para su presentación tipo **póster** en la sesión de **Información Cuántica** el día **04 de octubre en Línea (online)** dentro del programa del LXIV Congreso Nacional de Física

ATENTAMENTE

Comité Científico  
Sociedad Mexicana de Física