



COMPUERTAS LÓGICAS CUÁNTICAS EN FLUIDOS POLARITÓNICOS

Autor:

Pedro Josué García Lucio

Asesor:

Dr. Miguel Angel Bastarrachea Magnani

PROYECTO TERMINAL I: INVESTIGACIÓN TEÓRICA
CLAVE 2111107. TRIMESTRE 22-I.

Licenciatura en Física
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
23 de mayo 2022

Índice

1. Introducción	2
2. Cómputo cuántico	3
2.1. Compuertas lógicas para un sólo qubit	4
2.1.1. Compuerta identidad:	5
2.1.2. Compuertas de Pauli (X,Y,Z):	5
2.1.3. Compuerta Z cuántica:	5
2.1.4. Compuerta NOT cuántica:	6
2.1.5. Compuerta Y cuántica:	7
2.1.6. Compuerta Hadamard:	7
2.2. Múltiples qubits y estados entrelazados	9
2.2.1. Representación de estados Multi-Qubit	9
2.2.2. Compuertas lógicas de un sólo Qubit en vectores estado Multi-Qubit	10
2.3. Compuertas Multi-Qubits	11
2.3.1. Compuerta CNOT	12
2.3.2. Estados entrelazados	13
3. Condensado de Bose-Einstein	15
3.1. Condensación de Bose-Einstein en nubes atómicas	15
3.2. Distribución de Bose	16
4. Ecuación de Gross-Pitaevskii	19
4.1. EGP dependiente del tiempo	21
4.2. EGP y condensados de Bose-Einstein	22
4.3. Resultados particulares	23
5. Microcavidades ópticas	24
6. Excitones	27
6.1. Excitones-polaritones	28
6.2. Interacciones polaritónicas	30
6.3. Condensado de excitones-polaritones	31
6.3.1. Excitación resonante	31
6.3.2. Excitación no resonante	32
7. Micropilares	33
7.1. Realización de qubits en micropilares	35
7.2. Hamiltoniano	36
8. Conclusiones	39

1. Introducción

El propósito de este trabajo es revisar algunos conceptos básicos de la computación cuántica, así como explicar qué son y cómo se crean los condensados de excitones-polaritones, las cuasipartículas híbridas luz-materia que se crean al hacer interactuar fuertemente la luz con un material semiconductor. Se explorará el uso de excitones-polaritones para la creación de qubits y compuertas lógicas cuánticas.

El estudio de partículas híbridas de luz-materia como los excitones-polaritones, que resultan del acoplamiento fuerte entre sistemas fotónicos e interacciones electrón-agujero de un sistema de materia condensada, se ha incrementado en las últimas décadas. Ahora no sólo es posible demostrar su existencia, sino también desarrollar formas de aprovechar sus propiedades para construir dispositivos ópticos, circuitos de súper fluidos fotónicos, láser de bajo umbral y gran variedad de transistores ópticos [1].

Estos sistemas excitón-polaritón se han probado como un recurso viable capaces de generar correlaciones al nivel cuántico, teóricamente capaces de entrelazarse [2]. Sin embargo, la mayoría de las investigaciones en las últimas décadas en excitones-polaritones se ha enfocado en aplicaciones físicas semi-clásicas, es decir, aquellas en las que la cuantización del número de partículas de acuerdo a la teoría cuántica no es en sí mismo aparente [3]. Se especula que los excitones-polaritones pueden ser usados como simuladores cuánticos o computadoras cuánticas. Sin embargo, primero se deben superar varios retos. El primero es encontrar una base (que más adelante se explicará con más detalle) compatible con los excitones-polaritones para codificar información. Aún si se lograra desarrollar esta base, el siguiente paso a resolver, es la creación de compuertas lógicas cuánticas operables en un tiempo de escala mayor a la disipación y tasa de desfase de los excitones-polaritones, donde la tasa de desfase es la cantidad de excitones-polaritones desacoplados por unidad de tiempo, por lo tanto, es esencial que las compuertas se puedan conectar de manera arbitraria y producir circuitos escalables [4].

En éste proyecto terminal se realizará una revisión crítica de los condensados de excitón-polaritón en conjuntos de micro-pilares como plataforma [5]. Se estudiarán las compuertas cuánticas más generales, y como el uso de cuasi-partículas excitón-polaritón en compuertas de un sólo qubit son controlables por parámetros láser. Esto con la intención de estudiar la construcción de un arreglo universal de compuertas lógicas cuánticas que parte del uso de del tunelamiento cuántico entre micro-pilares cuánticos para realizar compuertas SWAP y square-root-SWAP (sSWAP) que permitan la movilidad de qubits entre micro-pilares [3], y operaciones cuánticas universales que establezcan una arquitectura escalable de circuitos cuánticos.

2. Cómputo cuántico

En las computadoras construidas por medio de circuitos eléctricos y compuertas lógicas clásicas el concepto fundamental es el bit, que es la unidad fundamental de información. Un bit clásico puede tomar un estado de dos posibilidades, 0 ó 1. El análogo en el cómputo cuántico e información cuántica es el *qubit ó bit cuántico*. El qubit tiene dos estados posibles al ser observado (hacer una medición), que son $|1\rangle$ y $|0\rangle$, correspondientes a los estados 0 y 1 del bit clásico [6]. La diferencia entre los bits y los qubits es que el qubit puede encontrarse en otro estado diferente a $|0\rangle$ y $|1\rangle$. También es posible encontrarlo en una superposición, una combinación lineal:

$$|\psi\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle \quad (2.1)$$

Los números α y β son números complejos que deben de cumplir con una normalización para satisfacer la unicidad, más adelante se detallará esta normalización. Visto de otra manera un qubit es un vector 2-D en un espacio vectorial complejo. A los estados especiales $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son conocidos como los *los estados de la base computacional*, cuya característica es que forman una base ortogonal en este espacio vectorial, lo que significa que $\langle 0|0\rangle = 1$, $\langle 0|1\rangle = 0$, $\langle 1|0\rangle = 0$, $\langle 1|1\rangle = 1$.

Al medir un qubit podemos obtener el resultado 0, con probabilidad $|\alpha|^2$ ó el resultado 1, con probabilidad $|\beta|^2$ [6]. Como las amplitudes están relacionadas con probabilidades, naturalmente la suma de las probabilidades deben de dar como resultado la unidad, asegurar que el vector estado se encuentre normalizado apropiadamente. Específicamente la magnitud del vector estado debe ser uno $\langle \psi|\psi\rangle = 1$. Por lo que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, y esto explica el término de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lo poco intuitiva que puede ser la mecánica cuántica y su falta de correspondencia con el mundo macroscópico hace difícil visualizar el comportamiento de los sistemas cuánticos, sin embargo, se ha comprobado experimentalmente que los estados cuánticos tienen consecuencias reales. Existen maneras de manipular los estados cuánticos para obtener resultados de las mediciones que presenten una dependencia de las distintas propiedades del estado.

Un ejemplo de la superposición cuántica de un qubit es el siguiente estado, llamado $|+\rangle$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \quad (2.2)$$

Cuando ejecutamos una medición sobre el estado, obtenemos un cincuenta por ciento $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2$ de probabilidad de obtener el estado (1) y el otro cincuenta por ciento de encontrarlo en el estado (0) [6].

Existen diversos sistemas físicos para formar un qubit, como por ejemplo: El alineamiento del spin nuclear dentro de un campo magnético uniforme [7]; dos distintas polarizaciones de un fotón [8]; dos estados de un electrón orbitando un átomo donde electrón se puede encontrar en el estado base y estado excitado [9]. Es posible mover el electrón del estado

base al excitado haciendo incidir luz con la energía y frecuencia adecuada, de igual forma puede regresar al estado base emitiendo un fotón. El fenómeno de interés ocurre cuando el tiempo de exposición a la luz es reducida, un electrón inicialmente en el estado base puede quedarse a mitad de camino entre el estado base $|0\rangle$ y el excitado $|1\rangle$, el estado en superposición denotado como $|+\rangle$, con ello podemos preparar experimentalmente el qubit en el estado de superposición.

Una manera de representar un qubit de forma geométrica es reescribiendo la ecuación $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + e^{i\phi}\beta |1\rangle$, donde $\alpha, \beta, \phi \in \text{Re}$.

Sabemos que el estado del qubit debe de estar normalizado, i.e.

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1 \quad (2.3)$$

podemos usar la identidad trigonométrica

$$\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1 \quad (2.4)$$

para describir los números reales α y β en términos de una sola variable, θ :

$$\alpha = \cos \frac{\theta}{2}, \beta = \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.5)$$

Con esto podemos describir el estado de cualquier qubit por medio de dos variables ϕ y θ :

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (2.6)$$

Los números θ y ϕ definen un punto en la superficie de una esfera tridimensional unitaria. Esta esfera recibe el nombre de *Esfera de Bloch* Fig. 1. Ésta representación geométrica del estado de un sólo qubit de información, sirve como ayuda para comprender ideas del cómputo cuántico e información cuántica, sin embargo, tiene sus limitantes pues no existe una generalización de la Esfera de Bloch para estados con múltiples qubits.

2.1. Compuertas lógicas para un sólo qubit

En una computadora cuántica el circuito cuántico contiene canales que son el medio por el cual la información es transmitida y las compuertas lógicas cuánticas ejecutan manipulaciones sobre esta información.

A continuación daremos ejemplos de las compuertas lógicas cuánticas principales para un sólo qubit, y sus acciones sobre la información.

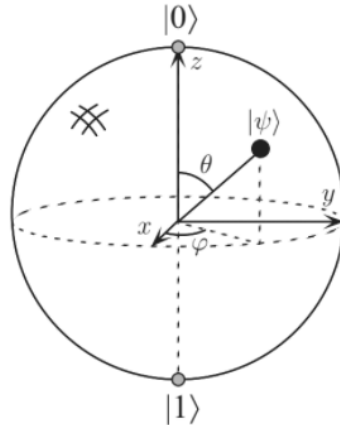


Figura 1: Representación de un qubit en la esfera de Bloch. Figura tomada de [6].

2.1.1. Compuerta identidad:

La compuerta identidad para un sólo qubit es la *matriz identidad* usualmente denotada por I y está definida como:

$$I \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

La compuerta identidad es independiente de una base y no modifica el estado cuántico. Es empleada con mayor frecuencia para describir matemáticamente el resultado de varias operaciones de compuertas cuánticas o cuando se emplean circuitos con múltiples qubits (multi-qubit).

2.1.2. Compuertas de Pauli (X,Y,Z):

Las compuertas de Pauli son las tres matrices de Pauli ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) que actúan sobre un sólo qubit. Las compuertas de Pauli ejecutan una rotación de π radianes alrededor de los ejes x, y, z de la *esfera de Bloch*, y la base computacional consiste en los eigenestados del operador σ_z .

2.1.3. Compuerta Z cuántica:

La compuerta lógica cuántica Z (matriz de Pauli σ_z) transforma al estado $|\psi\rangle$ de tal forma que deja igual al estado $|0\rangle$ y al estado $|1\rangle$ lo cambia de signo para quedar como $-|1\rangle$. Esto lo logra al rotar el qubit alrededor del eje Z por π radianes (180 grados). Al hacer esto voltea la fase del qubit.

$$Z \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Por lo que la transformación lineal se vería como:

$$Z \begin{bmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |0\rangle \\ -|1\rangle \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |0\rangle \\ -|1\rangle \end{bmatrix}$$

$$\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \rightarrow \boxed{Z} \rightarrow \alpha |0\rangle - \beta |1\rangle \quad (2.9)$$

2.1.4. Compuerta NOT cuántica:

La matriz de Pauli σ_x es un perfecto candidato para la compuerta lógica cuántica NOT, ya que la compuerta clásica NOT, cuya operación está definida por la tabla de verdad, en la que $0 \rightarrow 1$ y $1 \rightarrow 0$, esto es el intercambio de los estados, y la matriz σ_x actúa de manera lineal, pues la *linealidad* es una de las condiciones generales de la mecánica cuántica; se toma el estado $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ y se transforma al siguiente estado donde $|0\rangle$ y $|1\rangle$ han sido intercambiadas, por lo que tenemos el estado final $\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle$ [6], que cumplen con la definición de la compuerta lógica NOT clásica. Esto de manera geométrica representa una rotación de π radianes sobre el eje X en la esfera de Bloch..

Vemos que la compuerta representa una negación al estar definida como el intercambio de sus estados, donde por ejemplo, 1 es (sí) y 0 es (no), estos estados se intercambiarán al aplicarles la compuerta NOT, de aquí que se dice que aplica la negación.

Podemos escribir esta transformación lineal de manera matricial, definimos la matriz X que represente la compuerta lógica cuántica NOT:

$$X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Si los estados $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ y $\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle$ los representamos como $\begin{bmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} |1\rangle \\ |0\rangle \end{bmatrix}$, la transformación lineal de manera matricial queda como:

$$X \begin{bmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |1\rangle \\ |0\rangle \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |1\rangle \\ |0\rangle \end{bmatrix}$$

$$\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \rightarrow \boxed{X} \rightarrow \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle \quad (2.11)$$

2.1.5. Compuerta Y cuántica:

La compuerta lógica cuántica Y (matriz de Pauli σ_y) mapea al estado $|\psi\rangle$ de tal forma que el estado $|0\rangle$ lo transforma a $-i|1\rangle$ y al estado $|1\rangle$ lo cambia para quedar como $i|0\rangle$.

$$Y \equiv \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

El mapeo lineal del estado $|\psi\rangle$ sería:

$$Y \begin{bmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i|1\rangle \\ i|0\rangle \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i|1\rangle \\ i|0\rangle \end{bmatrix}$$

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \boxed{Y} \rightarrow -\alpha i|1\rangle + \beta i|0\rangle \quad (2.13)$$

2.1.6. Compuerta Hadamard:

La compuerta Hadamard es una de las compuertas cuánticas más utilizadas. En ocasiones es descrita como la raíz cuadrada de la compuerta NOT, puesto que al estado $|0\rangle$ lo transforma en $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ (primera columna de la compuerta H), que es un estado intermedio entre $|0\rangle$ y $|1\rangle$, y al estado $|1\rangle$ lo transforma como $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ (la segunda columna de H), que también es un estado intermedio entre $|0\rangle$ y $|1\rangle$ [6]. Es decir, crea superposiciones de estados en la base computacional, por eso es verdaderamente cuántica.

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Aplicada a nuestro estado cuántico $|\psi\rangle$:

$$H \begin{bmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \boxed{H} \rightarrow \alpha \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.15)$$

Notamos que si quisiéramos calcular H^2 para obtener la compuerta cuántica NOT (X) no sería posible, puesto que $H^2 = I$, y si aplicáramos sobre algún estado cuántico dos

veces de manera seguida no sufriría ninguna transformación pues se estaría aplicando la identidad sobre ese estado cuántico. Esto significa que la compuerta NOT es fundamental.

Si visualizamos el efecto de la compuerta Hadamard sobre la esfera de Bloch de un sólo qubit, ejecuta en primera instancia una rotación de 90° sobre el eje \hat{y} de la esfera, seguido de una rotación de 180° sobre el eje \hat{x} [6].

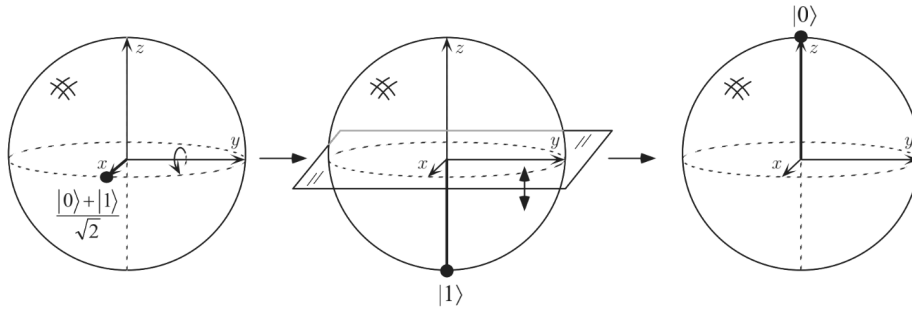


Figura 2: Representación de la compuerta lógica cuántica Hadamard en la esfera de Bloch, actuando sobre el estado $\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$. Figura tomada de [6].

Un resultado importante es que la matriz representante de la compuerta lógica para un sólo qubit debe cumplir la condición de ser unitaria, esto es que si U es una matriz que describe una compuerta cuántica para un qubit, debe de satisfacer que $U^\dagger U = I$, donde U^\dagger es el adjunto de U (Se obtiene al transponer y sacar el complejo conjugado de U) e I es la matriz identidad 2×2 [6]. Es fácil verificar que las todas demás compuertas lógicas cuánticas $X^\dagger X = I$, $Z^\dagger Z = I$, $H^\dagger H = I$ cumplen con esta condición. La unitareidad garantiza la conservación de la probabilidad y que la información no se pierda entre compuertas.

2.2. Múltiples qubits y estados entrelazados

Hemos visto los efectos de un sólo qubit y sus compuertas, sin embargo, el verdadero potencial del computo cuántico se encuentra en las interacciones entre qubits. Típicamente, las compuertas que se pueden implementar directamente en el hardware actúan únicamente en uno o dos qubits. Si deseamos utilizar compuertas complejas que actúen sobre un número grande de qubits, no es problema, pues con compuertas de uno o dos qubits dadas por el hardware, es posible construir cualquier otra compuerta.

Veremos la representación de múltiples qubits, y cómo estos qubits pueden interactuar entre sí. Hemos visto como representar el estado de un qubit por medio del uso de un vector 2D, y ahora veremos cómo representar el estado de múltiples qubits.

2.2.1. Representación de estados Multi-Qubit

Vimos que un sólo bit posee dos estados posibles, y un qubit tiene dos amplitudes complejas. De manera similar, dos bits tienen cuatro estados posibles:

$$00, 10, 01, 11$$

Para describir los estados de dos qubits requerimos de cuatro amplitudes complejas. Almacenamos estas amplitudes en un vector 4D, de la siguiente forma:

$$|a\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

De manera que las medidas serían:

$$p(|00\rangle) = |\langle 00|a\rangle|^2 = |a_{00}|^2 \quad (2.17)$$

Debido a las condiciones de normalización, se mantienen las mismas implicaciones:

$$|a_{00}|^2 + |a_{01}|^2 + |a_{10}|^2 + |a_{11}|^2 = 1 \quad (2.18)$$

Si tuviéramos dos qubits separados, podemos describir su estado colectivo usando el producto de Kronecker:

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, |b\rangle = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$|ba\rangle = |b\rangle \otimes |a\rangle = \begin{bmatrix} b_0 \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \\ b_1 \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 a_0 \\ b_0 a_1 \\ b_1 a_0 \\ b_1 a_1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Si seguimos las mismas reglas, podemos usar el producto de Kronecker para escribir el estado colectivo de cualquier cantidad de qubits. Aquí un ejemplo para tres qubits:

$$|cba\rangle = \begin{bmatrix} c_0 b_0 a_0 \\ c_0 b_0 a_1 \\ c_0 b_1 a_0 \\ c_0 b_1 a_1 \\ c_1 b_0 a_0 \\ c_1 b_0 a_1 \\ c_1 b_1 a_0 \\ c_1 b_1 a_1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

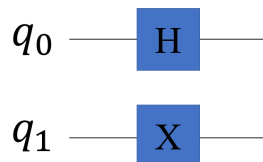
Si tenemos n qubits, debemos de estar al tanto de 2^n amplitudes complejas. Como vemos, los vectores crecen de manera exponencial con el número de qubits. Por este motivo es difícil simular computadoras cuánticas con gran número de qubits. Una laptop moderna pueden simular de manera sencilla alrededor de 20 qubits, sin embargo, simular 100 qubits se vuelve un reto titánico, incluso para las súper computadoras de primer nivel [10].

2.2.2. Puertas lógicas de un sólo Qubit en vectores estado Multi-Qubit

Con anterioridad vimos la compuerta X y su representación matricial:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y también, cómo es que actúa sobre un estado $|\phi\rangle$, sin embargo, aún no está claro como la compuerta X actuaría sobre un qubit de un vector multi-qubit. Afortunadamente, la regla de operación es sencilla; de igual forma que se usó el producto de Kronecker para calcular vectores estados de multi-qubits, usaremos el producto tensorial para calcular matrices que actúen sobre estos vectores estado. Por ejemplo, para el circuito siguiente:



Podemos representar las operaciones simultaneas (H y X) usando el producto de Kronecker:

$$X |q_1\rangle \otimes H |q_0\rangle = (X \otimes H) |q_1 q_0\rangle \quad (2.21)$$

Esta operación se ve cómo:

$$X \otimes H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[0 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad 1 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right] \\
&\quad 1 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad 0 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

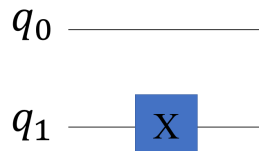
Por lo que ahora, ha este nuevo operador se le puede aplicar el vector estado 4D $|q_1q_0\rangle$. Usualmente el nuevo operador se puede encontrar en su versión simplificada dentro de la literatura, como:

$$X \otimes H = \begin{bmatrix} 0 & H \\ H & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Ahora, si deseamos aplicar una compuerta sobre un qubit a la vez, describiremos esta operación por medio del producto de kronecker con la matriz identidad.

$$X \otimes I$$

Donde nuestro circuito es:



Por lo que el circuito se deriva de implementar el producto de kronecker de la compuerta X con la matriz identidad:

$$X \otimes I = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

2.3. Compuertas Multi-Qubits

Ahora que sabemos cómo representar el estado de múltiples qubits, estamos preparados para mostrar cómo los qubits interactúan entre ellos. Una de las principales compuertas para dos-qubits es la compuerta CNOT.

2.3.1. Compuerta CNOT

Esta compuerta es un condicional que ejecuta la compuerta X en el segundo qubit (el objetivo), si el estado del primer qubit (llamado control) es $|1\rangle$. Cuyo diagrama del circuito se puede escribir de la siguiente forma con q_0 como el control y q_1 como el objetivo:

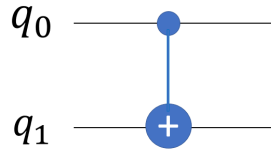


Figura 3: Representación del circuito CNOT.

Cuando los qubits no se encuentran en superposición de $|0\rangle$ ó $|1\rangle$, decimos que presentan un comportamiento clásico y la compuerta es bastante simple e intuitiva de entender. Por lo que podemos usar una tabla de verdad clásica:

Tabla de verdad	
Input(t,c)	Output(t,c)
00	00
01	11
10	10
11	01

Cuando la compuerta CNOT actúa sobre el vector estado 4D, puede obtener una configuración de las siguientes dos matrices:

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

dependiendo de qué qubit sea el control y cual sea el objetivo. En distinta literatura o artículos encontraremos diferente orden para los qubits. Para nuestro caso, usaremos la notación de la Ec. (2.24) para la compuerta CNOT que actuará sobre nuestro qubit. Esta matriz intercambia las amplitudes $|01\rangle$ y $|11\rangle$ en nuestro vector estado:

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix}, CNOT |a\rangle = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{11} \\ a_{10} \\ a_{01} \end{bmatrix}$$

Hemos visto cómo la compuerta CNOT actúa sobre estados clásicos, pero ahora veremos su acción sobre un qubit en superposición. Pondremos un qubit en el estado $|+\rangle$:

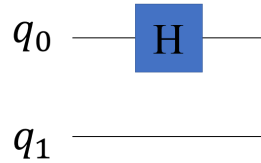


Figura 4: Representación de la superposición del qubit q_0 .

Cuyo vector de estado es: $\frac{1}{\sqrt{2}}[1, 1, 0, 0]$.

Y como esperamos, produce el estado $|0\rangle \otimes |+\rangle = |0+\rangle$:

$$|0+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle) \quad (2.26)$$

Ahora veremos lo que sucede cuando le aplicamos la compuerta CNOT:

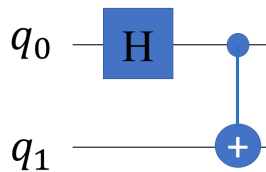


Figura 5: Representación de la acción de la compuerta CNOT sobre el estado $|0+\rangle$.

Ahora nuestro vector de estado es:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[1, 0, 0, 1]$$

Por lo que nuestro estado es:

$$CNOT |0+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (2.27)$$

Este estado es de interés para nosotros pues se encuentra entrelazado.

2.3.2. Estados entrelazados

Acabamos de ver que podemos crear el estado:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Conocido como uno de los estados de Bell. Podemos observar que este estado tiene 50 % de probabilidad de ser medido en el estado $|00\rangle$, y 50 % de ser medido en el estado $|11\rangle$. De manera más interesante, tiene un 0 % de ser encontrado en los estados $|01\rangle$ y $|10\rangle$.

Esta combinación de estados no se puede escribir como dos estados qubit separados. Además nuestros qubits se encuentran en superposición, al medir uno nos dirá el estado del otro qubit y colapsará la superposición. Por ejemplo, si medimos el qubit de arriba y obtenemos el estado $|11\rangle$, el estado colectivo de nuestros qubits cambia de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \xrightarrow{\text{medición}} |11\rangle$$

Incluso si separamos los qubits a miles de kilómetros, al medir uno de los qubit colapsa la superposición y parece tener un efecto inmediato en el otro qubit. Este fenómeno fue llamado por Einstein como (acción espeluznante a la distancia), que molestó a muchos de los científicos de inicios del siglo XX [11].

Es importante destacar que el resultado de la medición es aleatoria, y que la medición estadística de un qubit no se ve afectada por ninguna operación en el otro qubit. Debido a esto, podemos descartar la posibilidad de usar estados cuánticos entrelazados para comunicarnos. Esto es conocido como el teorema de no-comunicación [12, 10].

3. Condensado de Bose-Einstein

En 1925 Einstein predijo la existencia de un estado de la materia cuyas propiedades cuánticas se manifiestan de manera macroscópica, y está descrito por la estadística de Bose-Einstein. No fue hasta 1995 que se demostró por primera vez en un laboratorio la existencia del condensado de Bose-Einstein (CBE) [13].

Desde de la descripción propuesta de la termodinámica, para un gas, todas las partículas se comportan de la misma manera y en principio pueden ocupar ciertos estados cuánticos, es decir, ciertos estados de energía [14]. Si estas partículas son fermiones, dos o más de ellas no pueden ocupar el mismo estado cuántico (Por el principio de exclusión de Pauli). Sin embargo, si son bosones, cualquier número de ellos pueden ocupar el mismo estado cuántico. Cuando colocamos estas partículas en cierta configuración, éstas se distribuirán en los niveles de energía de tal configuración, y a medida que la temperatura disminuya habrá un incremento de ocupación de los estados de mínima energía. Para una colección de bosones, y en el límite donde la temperatura se acerca a cero, todas las partículas ocuparán el estado base del sistema. Por lo tanto, para una temperatura suficientemente baja, la mayoría de las partículas se encuentran en el mismo estado cuántico, y tienen la misma velocidad. De esta manera, la colección de bosones se comporta como un fluido macroscópico con nuevas propiedades, como la superfluidez [15]. Para estudiar estas propiedades, sólo es necesario concentrarnos en el estado base. El estado de las partículas en cierto nivel está descrito por una función normalizada, la cual es eigenvector del Hamiltoniano asociado a nuestro fenómeno físico, y cuyos eigenvalores corresponden a los niveles de energía. Por lo tanto, tenemos que encontrar los eigenvectores con eigenvalores mínimos para el Hamiltoniano que describe nuestro sistema. El Hamiltoniano incluye todas las interacciones entre cada par de partículas. En otras palabras, si existen N partículas en un sistema, el Hamiltoniano tendrá N^2 términos. Para simplificar el problema podemos usar la aproximación de campo medio, lo que significa que la acción que percibe cierta partícula debido al resto, es substituido por la acción media del fluido sobre la partícula. Esta aproximación es aceptable si se desprecia las correlaciones del gas, esto es, si el gas se encuentra diluido; es el caso para los condensados obtenidos experimentalmente [16].

3.1. Condensación de Bose-Einstein en nubes atómicas

La función de onda para un sistema de bosones idénticos es simétrica bajo el intercambio de dos partículas cualesquiera, por lo que las partículas bosónicas pueden tener el mismo estado cuántico; a diferencia de los fermiones, cuya función de onda es antisimétrica y tienen espín semi-entero.

Para un gas de partículas libres que siguen la estadística de Bose-Einstein, las únicas cantidades relevantes son la masa de las partículas m , el número de partículas por unidad de volumen n , y la constante de Planck $h = 2\pi\hbar$. Donde la única cantidad con dimensiones de energía puede ser formada a través de \hbar , n , y m puede escribirse como $\hbar^2 n^{2/3} / m$. Al dividir esta energía por la constante de Boltzmann k obtenemos un estimado de la temperatura de condensación T_c conocida como temperatura de transición o temperatura crítica.

$$T_c = C \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{mk} \quad (3.1)$$

Donde C es un factor numérico que es aproximadamente 3.3. Cuando la ecuación (3.1) es evaluada para la masa y densidad apropiada del líquido ${}^4\text{He}$ con una presión de vapor saturada se obtiene una temperatura de transición aproximada de 3.13 K , que se encuentra cerca de la temperatura en la que el fenómeno de superfluidez es observable, el llamado punto lambda ($T_\lambda = 2.17\text{ K}$ a una presión de vapor saturada) [13].

Una forma equivalente de relacionar la temperatura de transición con la densidad de partículas es comparar la longitud de onda térmica de Broglie λ_T con el espacio promedio entre partículas, que es del orden de $n^{-1/3}$. La longitud de onda térmica de Broglie está definida como:

$$\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

Cuando la nube atómica se encuentra a altas temperaturas, la longitud de onda térmica es pequeña, por lo tanto, el gas se comporta de manera clásica. Esto quiere decir que a medida que la temperatura aumenta la longitud de onda térmica es mucho menor en comparación con la distancia media entre las partículas del gas; Por el contrario, cuando la temperatura del sistema va disminuyendo y se acerca a la temperatura de transición T_c , la longitud de onda térmica λ_T es comparable con la distancia media entre las partículas del gas (bosones) y el gas comienza a manifestar un comportamiento cuántico que se puede observar de manera macroscópica. Para que un gas ideal presente condensación de Bose-Einstein debe estar a temperaturas muy bajas, de forma que λ_T debe ser comparable a $n^{-1/3}$.

Una vez el gas de bosones haya alcanzado estas condiciones, las funciones de onda de las partículas bosónicas se superponen y podrán ser descritas como un conjunto de bosones que comparten el mismo estado cuántico, el llamado condensado de Bose-Einstein.

3.2. Distribución de Bose

Para bosones no-interactuantes en equilibrio térmico, las propiedades en equilibrio del sistema en una aproximación semi-clásica, se calculan tomando en cuenta que el espectro de energía es continuo. Tenemos que el número medio de ocupación de una sola partícula ν , está dada por la función de distribución de Bose,

$$f^0(\epsilon_\nu) = \frac{1}{e^{(\epsilon_\nu - \mu)/kT} - 1} \quad (3.3)$$

donde ϵ_ν denota la energía del estado de una partícula atrapada bajo el potencial en consideración. Dado que el número de partículas se conserva, el potencial químico μ entra en la función de distribución (3.2).

El potencial químico es descrito como función de N y de T por la condición de que el número total de partículas debe ser igual a la suma de las ocupaciones de los niveles individuales [13]. Definiremos la función $\zeta = e^{\mu/kT}$, conocida como fugacidad, para facilitar los cálculos. Si tomamos el cero de energía como el estado más bajo de la partícula, la fugacidad es menor a la unidad por encima de la temperatura de transición e igual a la unidad en el estado condensado (dentro de los términos del orden de $1/N$, que despreciaremos).

Reescribimos la función de distribución con la implementación de la fugacidad:

$$f^0(\epsilon_\nu) = \frac{1}{\zeta^{-1}e^{(\epsilon_\nu/kT)} - 1} \quad (3.4)$$

Lo que haremos será graficar la distribución de Bose-Einstein como función de la energía para varios valores de fugacidad $\zeta = 1, 0.5, 0.25$.

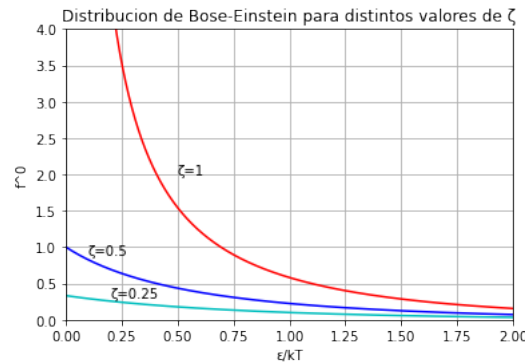


Figura 6: Representación de la distribución de Bose-Einstein $f^0(\epsilon_\nu) = \frac{1}{\zeta^{-1}e^{(\epsilon_\nu/kT)} - 1}$ como función de la energía, para distintos valores de fugacidad ζ . El valor de $\zeta = 1$ corresponde a temperaturas por debajo de la temperatura de transición, mientras que los valores de $\zeta = 0.5$ y $\zeta = 0.25$ corresponden a $\mu \approx -0.69kT$ y $\mu \approx -1.39kT$, respectivamente.

En presencia de altas temperaturas, los efectos estadísticos cuánticos se vuelven despreciables, y la función de distribución Ec.(3.3) se vuelve la distribución de Boltzmann.

$$f^0(\epsilon_\nu) \simeq e^{-(\epsilon_\nu - \mu)/kT} \quad (3.5)$$

Y en función de la fugacidad:

$$f^0(\epsilon_\nu) \simeq \zeta e^{-\epsilon_\nu/kT} \quad (3.6)$$

En altas temperaturas el potencial químico se encuentra por debajo de ϵ_{min} , la energía del menor estado de una partícula, por lo que en este límite el número medio de ocupación de cualquier es mucho menor a la unidad, por lo tanto, en particular $e^{(\mu - \epsilon_{min})/kT} \ll 1$. A medida que la temperatura disminuye, el potencial químico y el número ocupacional medio incrementan. Además el potencial químico no puede exceder la ϵ_{min} , de lo contrario la función de distribución de Bose-Einstein para el estado más bajo de la partícula sería negativa y carece de sentido físico.

La temperatura más alta en la que el condensado existe, se refiere a la temperatura de transición de Bose-Einstein, que denotamos como T_c . la dependencia de la energía de la densidad de estados para una sola partícula a bajas energías, determina si el condensado ocurrirá o no, para un sistema particular.

En el estado condensado, para temperaturas por debajo de T_c , el potencial químico permanece igual a la ϵ_{min} , para términos del orden de kT/N , el cual es menor para valores grandes de N , y la ocupación para el estado base de la partícula es macroscópica en el sentido de que para $N \rightarrow \infty$ una fracción de partículas distinta de cero, se encuentran en ese estado (condensado).

4. Ecuación de Gross-Pitaevskii

Como se discutió en las secciones de arriba, un condensado de Bose-Einstein se obtiene de un conjunto de bosones en el estado base a temperaturas cercanas al cero absoluto. Ahora podemos preguntarnos por la energía del estado base y usar esto para obtener información del sistema. El Hamiltoniano que describe el sistema, se puede escribir como:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + V_{ext}(\vec{r}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (4.1)$$

Donde el primer término en la parte derecha de la ecuación es la energía cinética de la i -ésima partícula, los términos subsecuentes representan los efectos externos por la trampa de potencial V_{ext} , y el último término representa las interacciones entre las N partículas. El estado base corresponde a la energía mínima, y la podemos encontrar al minimizar \hat{H} . Por lo que es conveniente usar el concepto de potenciales termodinámicos que son útiles para determinar el estado de equilibrio de un sistema que no se encuentra aislado [14]. Usando la energía libre, tenemos que minimizar $F = E - \mu N$, donde E es la energía, y μ es el potencial químico. Dado un Hamiltoniano \hat{H} y una función de onda ϕ , podemos obtener la energía de la siguiente manera:

$$E(\psi) = \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \quad (4.2)$$

Usaremos esta expresión para minimizar la energía libre F . En el condensado tenemos N partículas y a cada una le podemos asociar una función de onda ψ_i . Sin embargo, para capturar los aspectos esenciales del problema debemos utilizar la aproximación del campo medio. Lo que significa que para una partícula, todas las demás tienen el mismo estatus, como si todas estuvieran en el mismo estado independiente $|\psi\rangle$, por lo que ya no sería necesario etiquetar las funciones de onda. En ese sentido, debemos minimizar la energía libre sobre un espacio de funciones del tipo $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes \dots \otimes |\psi\rangle$, donde \otimes representa el producto de Kronecker y $|\Psi\rangle$ es la función de onda del producto tensorial de las N -partículas; consideramos que se cumple $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$. Esta aproximación es válida si consideramos que el condensado no es muy denso; de otra forma, las interacciones con las partículas vecinas serían más fuertes que con las que se encuentran más alejadas. Nuestro problema se reduce a minimizar $F(\Psi) = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle - \mu \langle \Psi | \Psi \rangle$. Ahora calcularemos los términos del Hamiltoniano.

Para el término que corresponde a la energía cinética tenemos:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} | \Psi \rangle &= \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m} \int \nabla \psi^*(\vec{r}_i) \nabla \psi(\vec{r}_i) d\vec{r}_i \\ &= N \frac{\hbar^2}{2m} \int |\nabla \psi(\vec{r})|^2 d\vec{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -N \frac{\hbar^2}{2m} \int \psi^*(\vec{r}) \nabla^2 \psi(\vec{r}) d\vec{r} \\
 \langle \Psi | \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} | \Psi \rangle &= -N \frac{\hbar^2}{2m} \int \psi^*(\vec{r}) \nabla^2 \psi(\vec{r}) d\vec{r} \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

Como habíamos dicho con anterioridad $|\Psi\rangle$ es la función de onda del producto tensorial de las N -partículas y $\psi(\vec{r})$ es la función de onda de una sola partícula.

El término para la trampa de potencial $V_{ext}(\vec{r}_i)$ se puede escribir cómo:

$$\langle \Psi | \sum_{i=1}^N V_{ext}(\vec{r}_i) | \Psi \rangle = N \int \psi^*(\vec{r}) V_{ext} \psi(\vec{r}) d\vec{r} \tag{4.4}$$

Para el término de interacción, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 &\langle \Psi | \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) | \Psi \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int d\vec{r}_i \int d\vec{r}_j \psi^*(\vec{r}_i) \psi^*(\vec{r}_j) V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \psi(\vec{r}_i) \psi(\vec{r}_j) d\vec{r}_i d\vec{r}_j \\
 &= \frac{N(N-1)}{2} \int d\vec{r} \int d\vec{r}' \psi^*(\vec{r}) \psi^*(\vec{r}') V(|\vec{r} - \vec{r}'|) \psi(\vec{r}) \psi(\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}' \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

Finalmente, para el último término en la energía libre tenemos que:

$$\mu \langle \Psi | \Psi \rangle = \mu \left(\int \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d\vec{r} \right)^N \tag{4.6}$$

Donde hemos escrito la expresión de manera que facilite el resto de cálculos. Dadas las expresiones calculadas arriba, ahora continuamos minimizándolas; esto se puede hacer siguiendo un procedimiento basado en cálculo variacional. Consideraremos una pequeña variación en la función de onda $\psi(\vec{r})$, pero en lugar de variar sus partes reales e imaginarias, vamos a tomar a ψ y ψ^* como variables independientes. De esa forma, podemos obtener las derivadas funcionales $\frac{\delta \dots}{\delta \psi^*}$ para las ecuaciones (4.3) y (4.4). En el caso del término de interacción Ec.(4.5), tenemos contribuciones para cada uno de los dos ψ^* , pero la \vec{r} se puede permutar, resultando en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\delta}{\delta \psi^*} \langle \Psi | \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) | \Psi \rangle \\
 &= N(N-1) \int \delta \psi^*(\vec{r}) \left(\int |\psi(\vec{r}')|^2 V(|\vec{r} - \vec{r}'|) \right) \psi(\vec{r}) d\vec{r}' d\vec{r} \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

De manera similar, para el potencial químico tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \langle \Psi | \Psi \rangle}{\delta \psi^*} &= N \left(\int \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d\vec{r} \right)^{N-1} \int \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d\vec{r} \\ &= N \int \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d\vec{r} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ensamblando todos los diferentes términos calculados para la energía libre F , tenemos que la variación está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta \psi^*} &= 0 = N \int \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V_{ext} \psi(\vec{r}) \right. \\ &\left. + (N-1) \left(\int |\psi(\vec{r}')|^2 V(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \right) \psi(\vec{r}) - \mu \psi(\vec{r}) \right] \delta \psi^*(\vec{r}) d\vec{r} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Por lo tanto la cantidad que se encuentra dentro de los corchetes en la expresión (4.9) debe desaparecer, ser idénticamente cero. Es habitual elegir un potencial de interacción que cumpla $V(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ donde a es la longitud de onda de esparcimiento, y usando la aproximación $N - 1$ obtenemos que:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V_{ext} \psi(\vec{r}) + N \frac{4\pi\hbar^2}{m} a |\psi(\vec{r})|^2 \psi(\vec{r}) = \mu \psi(\vec{r}) \quad (4.10)$$

La cual es la ecuación de Gross-Pitaevskii independiente del tiempo [16]. La longitud de esparcimiento a mide la intensidad de las interacciones entre bosones. Su signo indica cuándo las interacciones son atractivas ($a < 0$) ó repulsivas ($a > 0$). La minimización de la ecuación (4.2) corresponde a la minimización de la energía libre de $F = E - \mu N$, la cual es un resultado bien conocido de la mecánica estadística.

4.1. EGP dependiente del tiempo

La ecuación de Gross-Pitaevskii (EGP), discutida con en la sección de arriba, corresponde a un estado estacionario para el condensado. Experimentalmente, uno coloca los átomos en condiciones favorables para la formación del condensado, y espera a que los bosones se reordenen de manera que la EGP sea válida. Sin embargo, uno puede estar interesado en ver qué sucede cuando el ambiente del condensado evoluciona ó cuando la nube bosónica es inestable. Para lograr el cometido, se debe establecer una ecuación de campo medio que gobierne la evolución de los bosones en el nivel de energía mínimo.

De acuerdo con la mecánica cuántica, los bosones obedecen la ecuación de Schrödinger $i\hbar\partial_t\Psi = \hat{H}\Psi$, donde \hat{H} es el Hamiltoniano, análogo al de la Ec. (4.2). De manera similar, podemos considerar que la función de onda (que describe los estados de los bosones) ψ satisface el principio de mínima acción: La acción es $\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\vec{r} \mathcal{L}$, donde \mathcal{L} es la densidad Lagrangiana, que cumple con ser estacionaria.

La densidad Lagrangiana esta definida cómo:

$$\mathcal{L} = i\frac{\hbar}{2}(\Psi^*\partial_t\Psi - \Psi\partial_t\Psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\Psi^*) \cdot ((\nabla\Psi) - V_{ext}\Psi^*\Psi \quad (4.11)$$

Ésta expresión corresponde para una sola partícula. Una vez escrita la densidad Lagrangiana para nuestro problema, tenemos que simplificarla haciendo uso de la funciones $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes \dots \otimes |\psi\rangle$ que dan una acción estacionaria. La Ec.(4.10) no incluye la derivada temporal, es un caso particular de la EGP dependiente del tiempo. Por lo que podemos decir que las soluciones de la Ec.(4.10) corresponden a estados estacionarios del gas.

4.2. EGP y condensados de Bose-Einstein

Como hemos discutido, un condensado de Bose-Einstein (CBE) es un estado particular de la materia logrado a temperaturas ultra frías. Este fenómeno es la manifestación macroscópica de los efectos cuánticos, y para estudiarlos es necesario el uso de mecánica cuántica. En 1950, Landau y Ginzburg propusieron un modelo de electrones que dan lugar a la superconductividad como un superfluido, por medio de una ecuación de la forma

$$i\hbar\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2}\nabla^2u + gu(|u|^2 - 1), \quad (4.12)$$

que modela dos fluidos, donde $|u|^2$ representa la densidad del superfluido, que fluye sin fricción alguna, mientras que el resto de la materia supone encontrarse en un estado de fluido normal, g es una constante proporcional con dimensiones de energía. Esta ecuación da predicciones satisfactorias, aunque, su uso es limitado al hecho de que las interacciones en un líquido como el helio son bastantes fuertes. Sin embargo, el modelo de Landau-Ginzburg es un caso particular de la ecuación que surge de manera natural cuando se estudia el comportamiento de los condensados de Bose-Einstein a primer orden de aproximación. La ya conocida ecuación de Gross-Pitaevskii (EGP)

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{ext} + g|\psi|^2 \right) \psi, \quad (4.13)$$

donde m es la masa de los átomos del condensado, $|\psi|$ es la densidad atómica, V_{ext} representa un potencial externo, y g es un parámetro que mide las interacciones atómicas. La EGP tiene la misma estructura matemática que la ecuación no lineal de Schrödinger (ESNL), que es básicamente la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{ext} \right) \psi, \quad (4.14)$$

más un término no lineal, que en este caso toma en cuenta la interacción entre partículas. Para el condensado de Bose-Einstein, las interacciones son tan débiles que las predicciones hechas con esta ecuación son muy acertadas.

Otras aplicaciones de las EGP incluyen el modelado de superconductores (la superconductancia es un efecto mecánico cuántico que se manifiesta a temperaturas extremadamente bajas y puede ser interpretada como un tipo de superfluidez de pares de electrones) [17], también la descripción de vórtices ópticos [18], que se asemejan a pequeños remolinos en el superfluido.

4.3. Resultados particulares

Proponemos que ψ' sea solución a la EGP obtenida haciendo uso de la ecuación de normalización $\langle \psi' | \psi' \rangle = N(\psi')$. Si multiplicamos la Ec.(4.13) por ψ'^* , obtenemos

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} \psi'^* = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi' \psi'^* + V_{ext} |\psi'|^2 + g |\psi'|^4 - \mu |\psi'|^2 \quad (4.15)$$

Escribimos una ecuación similar para ψ'^* , y sumando ambas expresiones obtenemos:

$$2i \frac{\partial N(\psi')}{\partial t} = \int d^3 \vec{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi'|^2 + \frac{m\omega^2}{2} |\vec{r}|^2 |\psi'|^2 + \frac{g}{2} |\psi'|^4 \right] - \mu N(\psi') \quad (4.16)$$

La parte izquierda de la ecuación es una cantidad imaginaria $N(\psi') \in \text{Re}$, mientras que la parte derecha es real, con siendo $N(\psi')$ una constante y μ fijo desde un inicio, por lo tanto la cantidad

$$E = \int d^3 \vec{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi'|^2 + \frac{m\omega^2}{2} |\vec{r}|^2 |\psi'|^2 + \frac{g}{2} |\psi'|^4 \right] \quad (4.17)$$

se debe de conservar; el cual corresponde a la energía total del gas de bosones. De esta forma, una solución a la EGP tiene dos cantidades conservadas, el número de partículas N y la energía E del sistema. La existencia de estas dos cantidades nos dice mucho sobre la eventual divergencia de las soluciones dependientes del tiempo: la norma de ψ' de encuentra acotada, pero la norma de $\nabla^2 \psi'$ diverge. La eventual divergencia de las soluciones se traduce en la aparición de picos con pendientes infinitas.

5. Microcavidades ópticas

Una microcavidad óptica es una estructura con espesor de unos pocos micrómetros, conformada por capas de material reflejante a los extremos de una capa espaciadora que en ocasiones tiene rango nanométrico. Cuando se hace incidir una onda óptica a una microcavidad, la mayor parte de las frecuencias son reflejadas hacia atrás de manera inmediata, y otras son transmitidas fuera de esta, pero aquellas resonantes con la microcavidad, excitan el modo confinado, que después de atenúa exponencialmente. En la Figura. 5, podemos ver una secuencia de imágenes que ilustran lo mencionado.

Incidencia de onda óptica en microcavidad

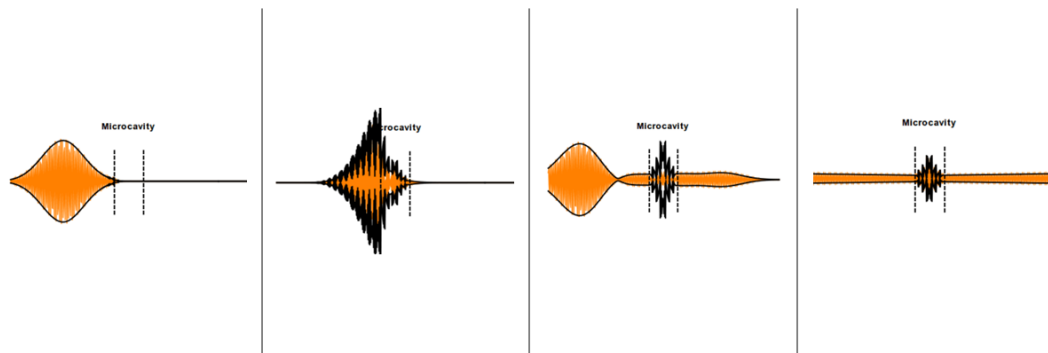


Figura 7: Secuencia de una onda óptica incidiendo por la izquierda sobre una microcavidad (una capa espaciadora con espejos de Bragg en sus extremos), la mayor parte de las frecuencias son reflejadas hacia la izquierda, mientras las resonantes con la microcavidad, excitan el modo confinado, que después se atenúan de manera exponencial al interior de la microcavidad. También, otro grupo de frecuencias (ondas transmitidas) pasan la microcavidad y se disipan. Ilustración tomada de [19].

En una microcavidad con estructura en forma de pilar (*micropilar*), el confinamiento de los campos ópticos se logra encerrando una capa cilíndrica de espesor $m\lambda/2$ entre dos *reflectores de Bragg distribuidos (RBDs)* altamente reflectantes. Donde, λ es la longitud de onda en el material espaciador, y m es un número entero. Los espejos de Bragg distribuidos se obtienen al apilar $4/\lambda$ capas de materiales con índices de refracción contrastantes. En la dirección lateral el contraste del índice de refracción entre el pilar y el medio circundante, induce un confinamiento del campo electromagnético. Este confinamiento, en adición al confinamiento vertical proveniente de los espejos de Bragg, permite pequeños modos de volumen ópticos, y altos factores de calidad, importantes para cavidades de electrodinámica cuántica y aplicaciones optomecánicas [20].

Un ejemplo del arreglo arbitrario para un micropilar de $3\mu m$ de diámetro, conformado por dos RBDs, encerrando un espacio $\lambda/2$ lleno de arsénico de galio (GaAs). Cada RBDs

está formado por 10 capas de GaAs/AlAs ($\lambda/4$, $\lambda/4$). La estructura se encuentra rodeada por vacío, y colocada sobre un sustrato de GaAs. En la Figura. 6 podemos observar una representación de la microcavidad pilar (micropilar) con $3\mu m$ de diámetro, formado por dos espejos de Bragg a los extremos del material espaciador. El número de capas que conforman el RBDs es arbitrario (para éste ejemplo fueron 10). Este diseño produce aproximadamente reflectividades espejo, iguales al 90 % de la longitud de onda del láser cuando la estructura se encuentra intacta en el sustrato [21].

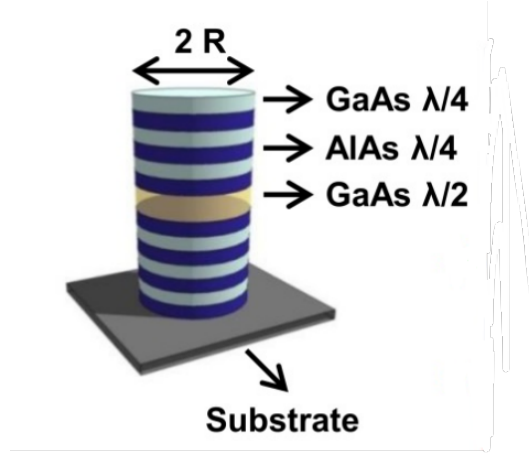


Figura 8: Esquema de la configuración para un micropilar con radio de $1.5\mu m$, formado por 10 capas $\lambda/4$ de GaAs en sus espejos de Bragg en los extremos de un material espaciador de $\lambda/2$ de GaAs. Ilustración tomada de [20].

La configuración de los RBDs en la microcavidad pilar (micropilar) confina el campo del fotón en dirección Z, perpendicular a los espejos de Bragg, pero no en el plano x - y . Donde k_{\perp} es el número de onda en el plano perpendicular a los espejos de Bragg, n_c es el índice de refracción de los espejos y λ_c es la longitud de onda del modo de la cavidad.

$$k_{\perp} = n_c \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad (5.1)$$

Existe una correspondencia uno a uno entre el ángulo de incidencia θ y cada uno de los modos de resonancia con el número de onda en el plano k_{\parallel} . El número de onda en el plano paralelo a los espejos de Bragg, se representa como k_{\parallel} .

$$k_{\parallel} = n_c \frac{2\pi}{\lambda_c} \tan \left[\sin^{-1} \left(\frac{\sin \theta}{n_c} \right) \right] \approx \frac{2\pi}{\lambda_c} \theta, k_{\parallel} \ll k_{\perp} \quad (5.2)$$

La luz incidente con un ángulo de inclinación respecto al eje Z tiene una resonancia a $\lambda_c / \cos \theta$. Como resultado, la cavidad tiene una energía de esparcimiento frente al número de onda en plano k_{\parallel} ,

$$k_{\perp} = \frac{\hbar c}{n_c} \sqrt{k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2} \quad (5.3)$$

En la región $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$, tenemos que:

$$E_{cav} \approx \frac{\hbar c}{n_c} k_{\perp} \left(1 + \frac{k_{\parallel}^2}{2k_{\perp}^2} \right) \quad (5.4)$$

$$E_{cav} = E_{cav}(k_{\parallel} = 0) + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_{cav}} \quad (5.5)$$

Vemos que la energía dentro de la cavidad tiene dos contribuciones, una es debido a la energía en reposo del fotón en el modo de la cavidad, y el otro término representa la contribución de la energía cinética del movimiento en el plano. La masa efectiva que adquieren los fotones en la cavidad se logra a través del confinamiento de sus campos, los espejos de Bragg los reflejan millones de veces y es en la interacción con el material espaciador que adquieren esta masa efectiva. Comúnmente, la masa efectiva es del orden de $10^{-5}m_e$, veces la masa del electrón [22].

$$m_{cav} = \frac{E_{cav}(k_{\parallel} = 0)}{c^2/n_c^2}. \quad (5.6)$$

6. Excitones

Los excitones son cuasi-partículas que se dan en la interacción de la luz con un material semiconductor. La interacción de la luz con el semiconductor se da dentro de la microcavidad pilar (micropilar) antes explicada, el material espaciador dentro del micropilar por lo regular es de arsénico de Galio (GaAs) con unas dimensiones de $\lambda/2$. Los materiales bidimensionales presentan características con propiedades ópticas favorables para la formación de los excitones, debido a que los excitones sólo interactúan con el modo de luz en la proyección correcta, el ancho del semiconductor ayudará en la eficiencia de la creación de los excitones.

Los excitones surgen cuando los fotones excitan la banda de electrones del semiconductor óptico, por lo que el electrón excitado deja un agujero (el espacio que ocupaba antes de la excitación), cuando el acoplamiento del electrón excitado y el agujero es suficientemente fuerte, por la fuerza de Coulomb, se crea un acoplamiento electrón-agujero, dando así origen al *excitón* dentro del pozo de potencial cuántico del semiconductor. El ensamble del micropilar actúa como un pozo de potencial cuántico que confina los excitones, las distintas capas de GaAs/AlAs $\lambda/4$ con mayores intervalos de banda emparedan al material semiconductor de GaAs $\lambda/2$ y dan como resultado el potencial de confinamiento.

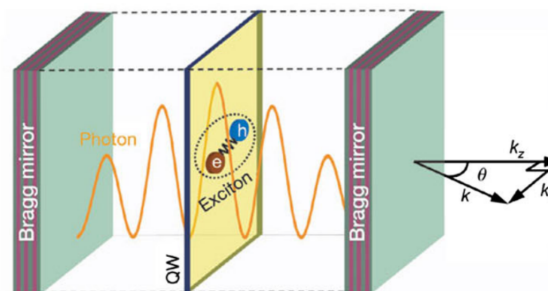


Figura 9: Figura representativa de la creación de un excitón electrónico. El fotón confinado por los espejos dieléctricos planos ó metálicos, interactúa con la materia (un medio dieléctrico) de índice de refracción n y excita el medio creando el excitón electrónico. Imagen tomada de [1].

6.1. Excitones-polaritones

Cuando los excitones interactúan fuertemente con la luz, se crean los excitones-polaritones, partículas híbridadas de luz-materia. El uso de cuasipartículas de luz-materia podrían ayudar a entender los efectos de los súper-fluidos y condensados cuánticos [2]. Una pregunta válida sería, ¿cómo se podría crear un condensado Bose-Einstein de fotones? ¿cómo hacer que los fotones tengan masa e interactúen entre ellos? Gracias a su carácter bosónico, se pueden crear condensados y súperfluidos de excitones-polaritones. Estos condensados cuánticos se pueden lograr generando una colección de fotones confinados, con masa, conservación del número de fotones dentro del arreglo e interacciones repulsivas. Ahora esta colección de fotones actuará como un gas de átomos bosónicos. Cualquier cantidad de ellos puede ocupar el mismo estado cuántico, al momento de colocar estas partículas en cierta configuración se distribuirán en los niveles de energía de tal configuración y si es enfriado por debajo de la temperatura crítica, pasará a una transición conocida como *condensado Bose-Einstein*, habrá un incremento de ocupación de los estados de mínima energía. Las funciones de onda de las partículas podrán ser descritas como un conjunto de bosones que comparten el mismo estado cuántico, tendríamos un súperfluido de luz [13].

Sabemos que los fotones en el vacío del espacio no tienen masa en reposo y por ello viajan a la velocidad de la luz, por lo que para dar masa a los fotones se crea una cavidad que se encuentra limitada por dos espejos planos, dentro, los fotones adquieren una relación de dispersión que indica una masa efectiva [2]. La relación que describe la masa efectiva está dada por:

$$\hbar\omega \equiv \hbar \left(\frac{c}{n}\right) \sqrt{\left(\frac{N\pi}{L}\right)^2 + k_{\parallel}^2}$$

donde \hbar es la constante de Planck, c es la velocidad de la luz, n es el índice de refracción dentro de la cavidad, N es un número entero correspondiente al modo de la cavidad, L es la distancia entre los espejos, y k_{\parallel} es el vector onda en el plano paralelo a los espejos de Bragg [2]. Observamos que para valores pequeños de k_{\parallel} , la ecuación tiene una dependencia cuadrática de k_{\parallel} y se puede ajustar con una parábola correspondiente a la masa efectiva m .

$$m \equiv \frac{\pi\hbar N n}{Lc}$$

Dentro de la cavidad se debe mantener constante el número de fotones, esto se logra por medio de los espejos que reflejan a los fotones miles de veces y los confinan dentro por un tiempo considerable antes de escapar. Si los fotones llegan a una temperatura de equilibrio antes de escapar, se dice, que existe conservación del gas de fotones. Debido a la fuga de fotones, para mantener esa conservación del gas se debe reponer esa pérdida constantemente, para mantener una población (N) constante. Esto implica que los sistemas de excitones-polaritones son sistemas fuera de equilibrio que se basan en una población estacionaria que equilibra pérdidas con bombeo.

Otro reto además de mantener constante la población de fotones es hacerlos interactuar entre ellos, para que exista esparcimiento entre los mismos fotones y obtener la masa efectiva. Esto se puede lograr al introducir un material óptico no lineal dentro de la cavidad, en la que los fotones experimentarán una mayor interacción a través de las contribuciones

$X^{(3)}$ fuertemente dependientes del índice de refracción n [2]. Estos materiales son justamente los semiconductores donde se forman los excitones polaritones. Las contribuciones por lo regular son demasiado débiles para permitir que los fotones se termalicen durante su vida en la cavidad, pero uno puede modificar la energía hacia la de una excitación electrónica en el medio. Ésta excitación es típicamente la del excitón, una cuasi-partícula proveniente del acoplamiento cuántico electrón-agujero en el pozo de potencial cuántico de un semi-conductor, algunos de los fotones en el gas de fotones excitan la banda de electrones del material óptico, provocando que uno de los electrones se excite, dejando su espacio libre (el agujero con el que se acopla) y después el excitón se crea por medio del acoplamiento electrón-agujero. Estas cuasi-partículas son capaces de generar correlaciones cuánticas. La excitación provoca una resonancia en en la polarizabilidad del medio, que aumenta bruscamente la no-linealidad del índice de refracción y fortalece la interacción fotón-fotón [2].

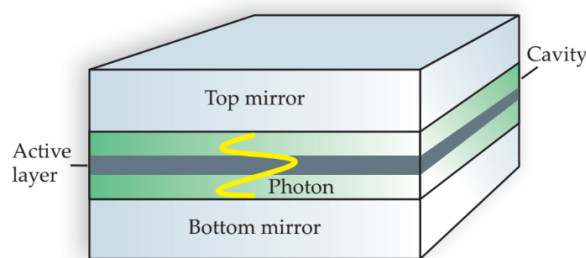


Figura 10: Confinamiento de fotones en una microcavidad con un material semiconductor emparedado por dos espejos de Bragg, donde adquieren una masa efectiva y son modificados para tener la energía para tener la de una excitación electrónica. Imagen tomada de [2].

Los sistemas llamados de acoplamiento fuerte luz-materia han resultado ser prometedores para lograr interacciones no lineales relativamente fuertes, necesarios para el comportamiento colectivo. En éste régimen de acoplamiento fuerte, el fotón están fuertemente mezclados con los grados de libertad de la materia (el excitón), dando lugar a una nueva cuasipartícula mixta luz-materia, el llamado *polaritón* [1].

Por lo que las cuasipartículas *excitones-polaritones* son el acoplamiento fuerte entre fotón y excitón [2]. Es importante hacer énfasis en que éste acoplamiento fotón-excitón no se trata de un segundo fotón interactuando con el excitón, sino, que el primer fotón que creó el excitón está fuertemente ligado a la materia y crean al *polaritón*, así el término *excitón-polaritón* hace referencia a que el excitón presentó un entrelazamiento/acoplamiento fuerte y pasó a ser un polaritón. Ya no podemos pensar en dos partículas con estados separados; en su lugar, tenemos que hablar de la superposición cuántica de un fotón y un excitón electrónico [2].

La relación de dispersión de un fotón en una cavidad óptica, mostrada en la Figura 9, es parabólica para pequeños momentos en el plano, y para grandes momentos converge a la dispersión de fotón libre (las líneas grises). Al momento de que un modo está sintonizado con la energía del excitón, el acoplamiento fotón-excitón dentro de la cavidad da lugar al ya descrito polaritón, un nuevo modo híbrido (líneas oscuras) [2]. Las curvas oscuras superiores e inferiores, son la mezcla de los estados del fotón original y excitón.

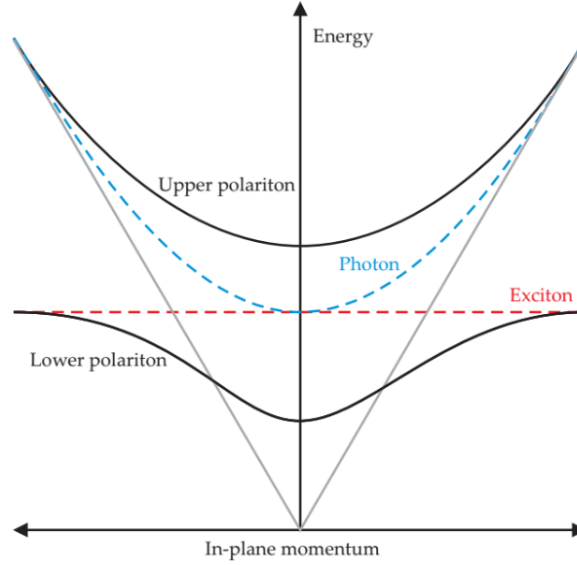


Figura 11: Creación de la cuasipartícula excitón-polaritón (líneas oscuras), la superposición de estados fotón-excitón fuertemente acoplados dan como resultados este nuevo modo híbrido. Imagen tomada de [2].

6.2. Interacciones polaritónicas

Las interacciones polaritón-polaritón se modelan como un problema de varios cuerpos, describiendo al sistema en términos de un Hamiltoniano efectivo con el cual es posible reproducir las interacciones entre excitones sin invocar sus constituyentes elementales. La idea es reemplazar las interacciones Coulombianas entre el electrón y agujero, por un potencial de interacción de dos cuerpos que tome al excitón como un todo. Por lo que en la versión más simple, la dispersión de baja energía en un vector de onda relativamente menor al radio de Bohr del excitón se puede describir por un término de potencial de interacción de dos cuerpos,

$$\mathcal{H}_{XX} = \int d^2\vec{r} \sum_{\sigma\sigma'} \frac{\mathcal{V}_{\sigma,\sigma'}^{XX}}{2} \hat{\Psi}_{X,\sigma}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}_{X,\sigma'}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}_{X,\sigma'}(\vec{r}) \hat{\Psi}_{X,\sigma}(\vec{r}) \quad (6.1)$$

donde los índices espín σ, σ' van sobre la base circular de polarización $\sigma, \sigma' = \sigma_{\pm}$ [1]. La interacción se vuelve de contacto si la sacamos de la integral.

Como una primera aproximación de \mathcal{V}^{XX} en términos de un modelo de un pozo de potencial cuántico microscópico electrón-agujero para el excitón propuesto por *Cuiti (1998)* y *Tassone y Yamamoto (1999)* con la aproximación de Born, dado $\mathcal{V}_T^{XX} = 6e^2 a_B / \epsilon$ donde ϵ es la constante dieléctrica del material y a_B es el radio de Bohr. La aproximación parece ser congruente con las medidas experimentales [23] y provee las contribuciones más relevantes, cuando la microcavidad es excitada por una luz polarizada circular [1]. .

6.3. Condensado de excitones-polaritones

Se ha visto que las interacciones polaritónicas presentan una gran ventaja comparada con otros sistemas ópticos confinados, por sus propiedades no-lineales provenientes de las componentes de los excitones [5]. Definiremos dos clases o configuraciones de bombeo, el llamado esquema de excitación resonante y el segundo tipo de excitación llamado no-resonante.

6.3.1. Excitación resonante

La primera forma de estudiar las interacciones polaritónicas es el llamado esquema de excitación resonante, en el que la energía y el ángulo de incidencia del láser excitante es cuasi-resonante con el modo inferior del polaritón (curva negra inferior en la Figura 8. Se crea una población finita e interactuante de polaritones en el estado base y en la temperatura crítica se alcanza la condensación. Como vimos en capítulos anteriores se puede modelar la dinámica del gas de polaritones por la ecuación de Gross-Pitaevskii dependiente del tiempo. Las ecuaciones de Gross-Pitaevskii son de la forma:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V_{ext}(r) \Psi + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} |\Psi|^2 \Psi \quad (6.2)$$

Para el caso del esquema de excitación resonante, la dinámica del gas de polaritones esta descrita por la siguiente ecuación que modela en general a un superfluido, la cual es no-lineal e incluye bombeo y disipación:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r)}{\partial t} = \left[\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m^*} + V_{ext}(r) + g_p |\Psi|^2 - i \frac{\hbar}{2} \gamma_p \right] \Psi(r) + F(r, t) \exp\{-i(\omega t + kr)\} \quad (6.3)$$

Donde $\Psi(r)$ es la función de onda del polaritón, m^* es la masa efectiva del polaritón, $V_{ext}(r)$ es un potencial externo, g_p es la interacción constante polaritón-polaritón (dependiente de la desintonización fotón-excitón), γ_p es la tasa de decaimiento del polaritón, y $F(r, t)$ es la amplitud del láser con frecuencia ω y un momento sobre el plano k [5].

Bajo la acción de un bombeo intenso del láser, las interacciones polaritón-polaritón son mucho más fuertes y dominan sobre la energía cinética, resultando en un fenómeno conocido como oscilaciones ópticas paramétricas [24], multiestabilidad [?], superfluidez [25], vórtices hidrodinámicos [26], solitones oscuros y brillantes [27].

Se pueden derivar de los principios que describen la dinámica de la función de onda condensada $\Psi(\vec{r}, t)$. La fracción macroscópica de partículas que conforman el condensado se comportan de una manera colectiva y el campo de materia atómica cuántica $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ se comporta como un campo clásico $\Psi(\vec{r}, t)$ [1].

6.3.2. Excitación no resonante

La segunda clase de excitación es la llamada no-resonante, en la cual el láser tiene mucho más energía que el modo inferior del polaritón. En este caso los polaritones pueden formar estados macroscópicos coherentes, es decir, láseres polaritónicos, por acumulación de partículas en el mismo estado [28]. En el umbral de condensación los polaritones muestran un fuerte comportamiento no-lineal, característico de la estimulación bosónica, y el estado estable se establece por medio de la interacción de bombeo, relajación y decaimiento [?]. La dinámica de los polaritones en un régimen condensado bajo una excitación no-resonante se puede modelar en términos de una ecuación no lineal (EGP) con bombeo láser y pérdidas [29]:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r)}{\partial t} = \left[\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m^*} + V_{ext}(r) + g_p |\Psi(r)|^2 + g_R n_R(r) + i \frac{\hbar}{2} [R * n_R(r) - \gamma_p] \right] \Psi(r) \quad (6.4)$$

Donde g_R es la interacción constante excitón-polaritón, n_R es la densidad de excitones de la cavidad sin condensar, y R es la tasa de relajación de los excitones en el modo condensado. La ecuación se encuentra acoplada con la dinámica de la cavidad, la cual es alimentada por la excitación del láser [25]:

$$\frac{\partial n_R(r)}{\partial t} = -\frac{n_R(r)}{\tau_R} - R * n_R(r) |\Psi(\vec{r}, t)|^2 + P(r) \quad (6.5)$$

Aquí τ_R es la recombinación no radiativa de los excitones y $P(r)$ es la intensidad de bombeo del láser. Para el caso de excitación resonante se debe de resolver la ecuación (6.3), y para el caso de excitación no-resonante las ecuaciones (6.4) y (6.5).

Se han utilizado estas interacciones polaritón-excitones de reserva para diseñar ópticamente el paisaje de polaritones, esto se logra al inyectar excitones en áreas específicas de una muestra. Debido a que los excitones presentan una masa mucho mayor a la de los polaritones, estos se deben de esparcir no tan lejos del punto donde fueron excitados (es una escala de micras). Usando una combinación apropiada para haces excitantes no resonantes, el potencial arreglo de polaritones se puede modificar por medio de la inyección de excitones. Dicha técnica es usada para acelerar [30], detener [31], atrapar polaritones [32] y colocarlos en rotación [33]. De ser capaces poder controlar los excitones con tal precisión se podrían realizar interruptores de transistor de condensado de polaritones de la excitación de microcavidades por medio de láseres, la poca pérdida de fotones dentro de la microcavidad, junto a las fuertes no-linealidades asociadas a las componentes excitónicas de los transistores bases polaritónicas, son atractivas para la implementación de todos los circuitos basados en óptica [31].

7. Micropilares

En un micropilar los polaritones se encuentran confinados en el espacio de tres dimensiones, resultando en un espectro discreto. Recordamos nuestro sistema de microcavidad en el que se atrapan los fotones por medio de espejos de Bragg en el cual los fotones adquieren una masa efectiva, y un número de fotones constante. Si están sintonizados a una excitación electrónica es una capa de material dieléctrico intercalado entre los espejos, presentan habilidad de interactuar con otros fotones y adquirir propiedades necesarias para producir un condensado de excitones-polaritones. Ahora formamos el sistema de micropilares apilando estas microcavidades una tras otra y todas sus propiedades se incrementan al crear este nuevo sistema. El modo de menor energía presenta una distribución de amplitud cilíndrica, similar a la distribución Gaussiana [5].

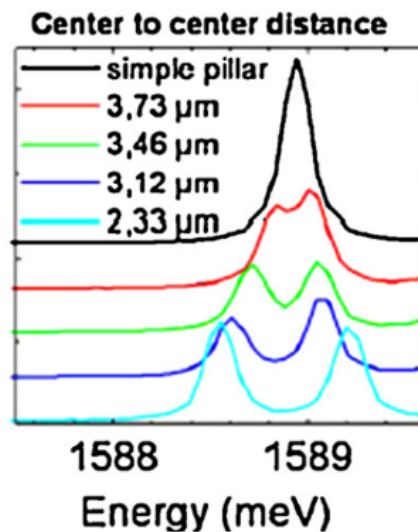


Figura 12: En la gráfica de color negro podemos apreciar el espectro del menor estado de energía para un solo micropilar con un diámetro de $4\mu\text{m}$, y de dos micropilares acoplados con distintas distancias de centro a centro. Los dos picos en las trazas surgen de la división entre los modos de enlace y anti-enlace, cuya magnitud está determinada por la superposición. Imagen tomada de [5].

Para poder crear simuladores polaritónicos se necesita fabricar micropilares individuales que constituyen el bloque unitario de los simuladores. Esto debido a la dispersión polaritónica estimulada, obtenida de los micropilares que presentan condensación a temperaturas altas, el láser polaritónico ocurre a temperaturas de hasta 45 K o por encima de los 50 K, la capacidad de correlación cuántica que presentan los hacen muy buenos prospectos para su uso en circuitos ópticos.

Se han hecho experimentos fotoluminiscentes en micropilares de $6\mu\text{m}$ (con $\delta = -0.3\text{meV}$ para el polaritón inferior) usando dos distintas geometrías. Una de ellas es colocar el láser centrado sobre la superficie del micropilar, Figura 10. La dispersión estimulada ocurre hacia el modo de menor energía (llamado M1) [34].

Los datos obtenidos para la parte derecha de la Figura 10, imágenes (c) y (d), muestran la excitación del láser colocada a una orilla del micropilar. Los distintos modos de ener-

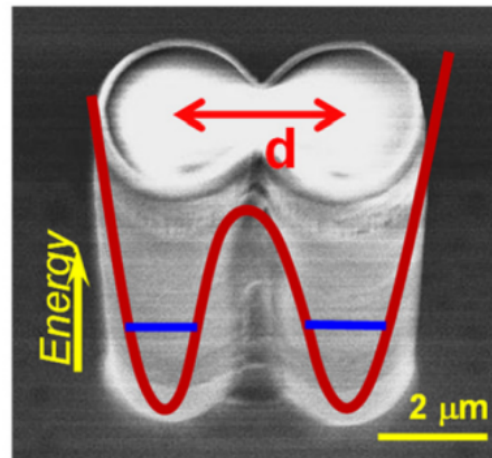


Figura 14: Se observa la amplitud de salto entre el traslape de los micropilares, con una distancia entre sus centros d . Cada micropilar tiene un pozo de potencial. Imagen tomada de [5].

7.1. Realización de qubits en micropilares

Como hemos visto en los capítulos anteriores, se partió de la creación de microcavidades capaces de confinar un número constante de fotones dentro de la cavidad óptica, y hacer interactuar a las partículas de luz con un material semiconductor, así obtener los excitones, que más tarde presentarán un fuerte enlace, que terminará por formar los polaritones. La estructura de los micropilares, así como su capacidad de confinar una cierta población constante de polaritones dentro de la cavidad, da la posibilidad de obtener un condensado de polaritones. Ahora toca ver cómo aprovechar utilizar el hecho de que estas partículas híbridas luz-materia son capaces de tener correlaciones a nivel cuántico. Típicamente, la arquitectura para el cómputo cuántico está basada en qubits, que requieren de un sistema cuántico de dos niveles. Otro reto importante es diseñar las compuertas lógicas cuánticas con los micropilares.

Es importante que las compuertas lógicas sean operables en un tiempo mayor a la disipación de los excitones-polaritones. Con el uso de los espejos de Bragg y las distintas capas de GaAs/AlAs, los micropilares soportan tiempos de vida para los polaritones que exceden por cientos de picosegundos, mientras se aplican pulsaciones láser en menor tiempo que la vida de un polaritón, todo con el fin de mantener una población constante dentro del condensado de excitones-polaritones. Debido a que los dos niveles de energía más bajos son no-resonantes con los demás niveles, permite generar una base qubit con estos dos niveles, que pueden ser medidos por medio de técnicas de detección con homodino [3].

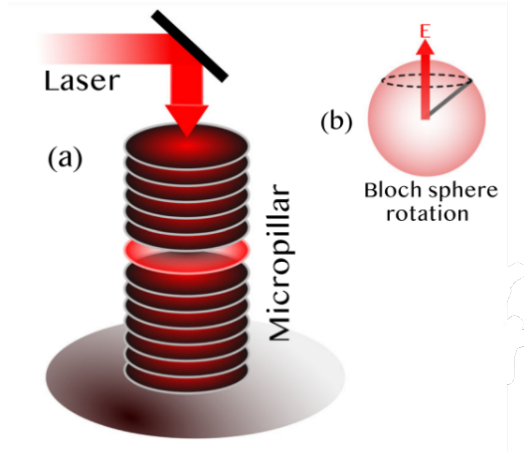


Figura 15: Representación de un condensado de excitones-polaritones confinados en un micropilar semiconductor, siendo excitado por un láser coherente que admite un qubit para el computo cuántico. Imagen tomada de [3].

7.2. Hamiltoniano

Vamos a considerar un micropilar semiconductor que soporte un modo polaritón no-lineal \hat{a} . Donde el modo está siendo excitado por un campo óptico coherente $\mathcal{P}(t)$. El Hamiltoniano que describe al sistema es

$$\mathcal{H} = \Delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \alpha \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \mathcal{P}(t)^* \hat{a}^\dagger + \mathcal{P}(t) \hat{a}, \quad (7.1)$$

donde Δ una desintonización entre el campo óptico y el modo de polaritón, α es la fuerza de interacción de no-lineal de Kerr. Definimos un condensado como un estado coherente, el cual es generado por la aplicación de un campo óptico coherente constante $\mathcal{P}(t) = P_0$ con número de ocupación, $N_c = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$. Por medio de pequeños cambios en el bombeo láser de $\mathcal{P}(t) = P_0$ a $\mathcal{P}(t) = P \exp\{i\phi\}$ se planea operar cuánticamente a los micropilares, estamos hablando de tiempos menores comparados a la vida de un polaritón. Se planea que la pequeña excitación provocada por el bombeo $P \exp\{i\phi\}$ sólo induzca pequeñas fluctuaciones en la parte superior del condensado.

Ahora consideramos los siguientes cambios de variables: $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\hat{N}} \cos(\phi - \hat{\theta})$, donde \hat{N} y $\hat{\theta}$ son los operadores de números y de fase del condensado, que satisfacen la relación de conmutación $[\hat{\theta}, \hat{N}] = i$. Por lo que el Hamiltoniano se puede reescribir en términos de estos operadores cómo:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \Delta \sqrt{\hat{N}} e^{i\hat{\theta}} e^{-i\hat{\theta}} + \alpha \sqrt{\hat{N}} e^{i\hat{\theta}} \sqrt{\hat{N}} e^{i\hat{\theta}} \sqrt{\hat{N}} e^{-i\hat{\theta}} \sqrt{\hat{N}} e^{-i\hat{\theta}} + P e^{-i\phi} \sqrt{\hat{N}} e^{i\hat{\theta}} + P e^{i\phi} \sqrt{\hat{N}} e^{-i\hat{\theta}} \\ &= \Delta \hat{N} + \alpha \hat{N}(\hat{N} - 1) + P \sqrt{\hat{N}} [e^{-i(\phi - \hat{\theta})} + e^{i(\phi - \hat{\theta})}] \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta \hat{N} + \alpha \hat{N}(\hat{N} - 1) + 2P\sqrt{\hat{N}} \cos(\phi - \hat{\theta}) \\
\mathcal{H} &= \Delta \hat{N} + \alpha \hat{N}(\hat{N} - 1) + 2P\sqrt{\hat{N}} \cos(\phi - \hat{\theta}) \tag{7.3}
\end{aligned}$$

El operador de número del polaritón se puede expresar como $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} = N_c + \hat{n}$, donde $N_c = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ es el campo principal del condensado, y \hat{n} es la parte cuántica. Debemos de notar que el campo principal N_c no contienen ninguna información cuántica, Sino, que la parte \hat{n} es quien codifica la información cuántica. Podemos expresar el Hamiltoniano en términos de \hat{n} :

$$\mathcal{H} \sum_n [(\Delta - \alpha)(N_c + n) + \alpha(N_c + n)^2] |n\rangle \langle n| + \tag{7.4}$$

$$P \sum_n \sqrt{N_c + n} (e^{i\phi} |n-1\rangle \langle n| + e^{-i\phi} |n\rangle \langle n-1|) \tag{7.5}$$

Si consideramos al campo principal del número de polaritón N_c ser mucho menor que la fluctuación cuántica \hat{n} , esto es $\sqrt{\langle \hat{n}^2 \rangle} / N_c \ll 1$. En tal régimen, hacemos la aproximación $\sqrt{N_c + n} \approx \sqrt{N_c}$, donde obtenemos,

$$\mathcal{H} = \sum_n [C + \Omega n + \alpha n^2] \langle n|n\rangle + P \sum_n [e^{i\phi} |n\rangle \langle n+1| + e^{-i\phi} |n+1\rangle \langle n|] \tag{7.6}$$

Lo podemos simplificar como,

$$\mathcal{H} = C + \Omega \hat{n} + \alpha \hat{n}^2 + 2P\sqrt{(N_c + \hat{n})} \cos(\phi - \hat{\theta}), \tag{7.7}$$

donde $C = \Delta N_c + \alpha N_c(N_c - 1)$ es un número clásico y $\Omega = \Delta + \alpha(2N_c - 1)$ está definida como el efecto de desentonización. Ahora vamos a considerar que la magnitud de N_c es mucho mayor que las fluctuaciones cuánticas \hat{n} , esto es $\sqrt{\langle \hat{n}^2 \rangle} / N_c \ll 1$, el cual es el caso estándar para un condensado polaritónico, de tal manera que el Hamiltoniano se reescribe como,

$$\mathcal{H}_f = \Omega \hat{n} + \alpha \hat{n}^2 + 2P\sqrt{N_c} \cos(\phi - \hat{\theta}). \tag{7.8}$$

En el espacio de Fock, el operador de número satisface la siguiente relación $\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle$, y el correspondiente operador de fase satisface que $e^{\pm i\hat{\theta}} |n\rangle = |n \pm 1\rangle$, por lo que el Hamiltoniano en el espacio de Fock se lee como:

$$\mathcal{H}_f = \sum_n [(\Omega n + \alpha n^2) |n\rangle \langle n| + P\sqrt{N_c} (e^{i\phi} |n\rangle \langle n+1| + e^{-i\phi} |n+1\rangle \langle n|)] \tag{7.9}$$

Hemos descrito el sistema para un condensado de excitones-polaritones en un micropilar que está siendo bombeado de manera constante por un láser. El sistema tiene similitudes

con un qubit superconductor formado en una unión de Josephson entre dos islas súperconductoras [3]. Mientras una de las islas superconductoras es análoga al condensado dentro del micropilar, la segunda es sustituida por el láser que se puede manipular por medio de su fase, amplitud y desintonización, que es mucho más sencillo de manejar y controlar que congelar de manera criogénica la isla superconductoras. El condensado dentro del micropilar semiconductor tiene la ventaja de ser mucho más manejable y que se puede operar a temperaturas relativamente altas (para cuestiones de condensación), estamos hablando de temperaturas de ambiente, en comparación con las temperaturas necesarias para llevar a cabo qubits superconductores.

8. Conclusiones

Los condensados de polaritones dentro de micropilares tienen diversas ventajas con respecto a otros sistemas donde se realizan qubits, claramente la temperatura a la cual se pueden realizar la creación de qubits por medio de micropilares es más conveniente en comparación con las islas superconductoras, aparte de la sencilla manipulación de los micropilares por medio de los bombeos láseres, de igual forma en comparación a la criogenización de la isla conductora, el control de la fase, energía, y amplitud de la función de onda superconductor es mucho más retador. Lo que se sigue es estudiar la diagonalización de manera numérica del Hamiltoniano que describe el condensado de excitones-polaritones y graficar el espectro en distintos regímenes. Nos motiva seguir estudiando los condensados polaritónicos confinados en micropilares semiconductores excitados por medio de un láser coherente que proporciona un sistema de dos niveles para la realización de un qubit adecuado para el computo cuántico. Donde la cantidad de rotación realizada sobre el eje de rotación de la esfera de Bloch [3] es controlada por medio de los parámetros láseres; con parámetros específicos del láser se espera poder realizar compuertas cuánticas de un sólo qubit. Posteriormente explorar los sistemas para compuertas cuánticas SWAP y sSWAP, por medio de tunelamiento cuántico entre dos micropilares, permite las operaciones SWAP y sSWAP (la raíz cuadrada de la compuerta SWAP) entre qubits en diferentes micropilares. El desarrollo de condensados polaritónicos confinados en micropilares, luce prometedor para el futuro del computo cuántico, haciendo mucho más accesible alcanzar las temperaturas óptimas para lograr los sistemas donde se crearán los qubits.

Referencias

- [1] Iacopo Carusotto and Cristiano Ciuti. Quantum fluids of light. *Rev. Mod. Phys.*, 85:299–366, Feb 2013.
- [2] David W. Snoke and Jonathan Keeling. The new era of polariton condensates. *Physics Today*, 70(10):54–60, 2017.
- [3] Sanjib Ghosh and Timothy C. H. Liew. Quantum computing with exciton-polariton condensates. *npj Quantum Information*, 6(1):16, Feb 2020.
- [4] Alexey Kavokin, Jeremy J Baumberg, Guillaume Malpuech, and Fabrice P Laussy. *Microcavities*. Series on Semiconductor Science and Technology. Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [5] Alberto Amo and Jacqueline Bloch. Exciton-polaritons in lattices: A non-linear photonic simulator. *Comptes Rendus Physique*, 17(8):934–945, 2016. Polariton physics / Physique des polaritons.
- [6] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [7] Christoph Adelsberger, Mónica Benito, Stefano Bosco, Jelena Klinovaja, and Daniel Loss. Hole-spin qubits in ge nanowire quantum dots: Interplay of orbital magnetic field, strain, and growth direction. *Phys. Rev. B*, 105:075308, Feb 2022.
- [8] Andrea Crespi, Roberta Ramponi, Roberto Osellame, Linda Sansoni, Irene Bongioanni, Fabio Sciarrino, Giuseppe Vallone, and Paolo Mataloni. Integrated photonic quantum gates for polarization qubits. *Nature Communications*, 2(1):566, Nov 2011.
- [9] Jarryd J. Pla, Kuan Y. Tan, Juan P. Dehollain, Wee H. Lim, John J. L. Morton, David N. Jamieson, Andrew S. Dzurak, and Andrea Morello. A single-atom electron spin qubit in silicon. *Nature*, 489(7417):541–545, Sep 2012.
- [10] Asher Peres and Daniel R. Terno. Quantum information and relativity theory. *Reviews of Modern Physics*, 76(1):93–123, jan 2004.
- [11] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935.
- [12] Hosang Yoon and Donhee Ham. Massive thermal fluctuation of massless graphene electrons, 2014.
- [13] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2 edition, 2008.
- [14] Robert P H Gasser and W Graham Richards. *An introduction to statistical thermodynamics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1995.
- [15] L D Landau and E M Lifshits. *Statistical physics: Theory of the condensed state pt. 2*. Course of Theoretical Physics. Butterworth-Heinemann, Oxford, England, 3 edition, June 1980.

- [16] J Rogel-Salazar. The gross–pitaevskii equation and bose–einstein condensates. *European Journal of Physics*, 34(2):247–257, jan 2013.
- [17] S. De Palo, C. Castellani, C. Di Castro, and B. K. Chakraverty. Effective action for superconductors and bcs-bose crossover. *Phys. Rev. B*, 60:564–573, Jul 1999.
- [18] D. Rozas, C. T. Law, and G. A. Swartzlander. Propagation dynamics of optical vortices. *J. Opt. Soc. Am. B*, 14(11):3054–3065, Nov 1997.
- [19] File:Microcavity dynamics.gif. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Microcavity_dynamics.gif. Accessed: 2022-5-23.
- [20] F. R. Lamberti, Q. Yao, L. Lanco, D. T. Nguyen, M. Esmann, A. Fainstein, P. Sessin, S. Anguiano, V. Villafañe, A. Bruchhausen, P. Senellart, I. Favero, and N. D. Lanzillotti-Kimura. Optomechanical properties of gas/air micropillar resonators operating in the 18 ghz range. *Opt. Express*, 25(20):24437–24447, Oct 2017.
- [21] J. L. Jewell, S. L. McCall, Y. H. Lee, A. Scherer, A. C. Gossard, and J. H. English. Lasing characteristics of gas microresonators. *Applied Physics Letters*, 54(15):1400–1402, 1989.
- [22] Hui Deng, Hartmut Haug, and Yoshihisa Yamamoto. Exciton-polariton bose-einstein condensation. *Rev. Mod. Phys.*, 82:1489–1537, May 2010.
- [23] A. Amo, S. Pigeon, D. Sanvitto, V. G. Sala, R. Hivet, I. Carusotto, F. Pisanello, G. Leménager, R. Houdré, E. Giacobino, C. Ciuti, and A. Bramati. Polariton superfluids reveal quantum hydrodynamic solitons. *Science*, 332(6034):1167–1170, 2011.
- [24] P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, R. M. Stevenson, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, and J. S. Roberts. Angle-resonant stimulated polariton amplifier. *Phys. Rev. Lett.*, 84:1547–1550, Feb 2000.
- [25] Alberto Amo, Jérôme Lefrère, Simon Pigeon, Claire Adrados, Cristiano Ciuti, Iacopo Carusotto, Romuald Houdré, Elisabeth Giacobino, and Alberto Bramati. Superfluidity of polaritons in semiconductor microcavities. *Nature Physics*, 5(11):805–810, Nov 2009.
- [26] Gaël Nardin, Gabriele Grosso, Yoan Léger, Barbara Pitka, François Morier-Genoud, and Benoît Deveaud-Plédran. Hydrodynamic nucleation of quantized vortex pairs in a polariton quantum fluid. *Nature Physics*, 7(8):635–641, Aug 2011.
- [27] M. Sich, D. N. Krizhanovskii, M. S. Skolnick, A. V. Gorbach, R. Hartley, D. V. Skryabin, E. A. Cerda-Méndez, K. Biermann, R. Hey, and P. V. Santos. Observation of bright polariton solitons in a semiconductor microcavity. *Nature Photonics*, 6(1):50–55, Jan 2012.
- [28] J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jembrun, J. M. J. Keeling, F. M. Marchetti, M. H. Szymańska, R. André, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud, and Le Si Dang. Bose–einstein condensation of exciton polaritons. *Nature*, 443(7110):409–414, Sep 2006.

- [29] Michiel Wouters and Iacopo Carusotto. Excitations in a nonequilibrium bose-einstein condensate of exciton polaritons. *Phys. Rev. Lett.*, 99:140402, Oct 2007.
- [30] E. Wertz, L. Ferrier, D. D. Solnyshkov, R. Johne, D. Sanvitto, A. Lemaître, I. Sagnes, R. Grousson, A. V. Kavokin, P. Senellart, G. Malpuech, and J. Bloch. Spontaneous formation and optical manipulation of extended polariton condensates. *Nature Physics*, 6(11):860–864, Nov 2010.
- [31] T. Gao, P. S. Eldridge, T. C. H. Liew, S. I. Tsintzos, G. Stavriniadis, G. Deligeorgis, Z. Hatzopoulos, and P. G. Savvidis. Polariton condensate transistor switch. *Phys. Rev. B*, 85:235102, Jun 2012.
- [32] A. Askitopoulos, H. Ohadi, A. V. Kavokin, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, and P. G. Lagoudakis. Polariton condensation in an optically induced two-dimensional potential. *Phys. Rev. B*, 88:041308, Jul 2013.
- [33] Robert Dall, Michael D. Fraser, Anton S. Desyatnikov, Guangyao Li, Sebastian Brodbeck, Martin Kamp, Christian Schneider, Sven Höfling, and Elena A. Ostrovskaya. Creation of orbital angular momentum states with chiral polaritonic lenses. *Phys. Rev. Lett.*, 113:200404, Nov 2014.
- [34] Daniele Bajoni, Pascale Senellart, Esther Wertz, Isabelle Sagnes, Audrey Miard, Aristide Lemaître, and Jacqueline Bloch. Polariton laser using single micropillar GaAs–GaAlAs semiconductor cavities. *Phys. Rev. Lett.*, 100:047401, Jan 2008.
- [35] Fabrice P. Laussy, G. Malpuech, A. Kavokin, and P. Bigenwald. Spontaneous coherence buildup in a polariton laser. *Phys. Rev. Lett.*, 93:016402, Jun 2004.