



Exponentes de Lyapunov en fluidos polaritónicos

Autor:

José Guadalupe Cundapi Cruz

Asesor:

Dr. Miguel Angel Bastarrachea Magnani

PROYECTO TERMINAL I: INVESTIGACIÓN TEÓRICA
CLAVE 2111107. TRIMESTRE 22-O.

Licenciatura en Física
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

16 Enero 2023

Índice

1. Introducción	3
2. Polaritones	4
2.1. Excitones	4
2.2. Excitones polaritones	4
2.3. Condensación de Bose Einstein	6
2.4. Condensado de polaritones	7
2.5. Modelo teórico	7
2.6. Representación de pseudo-espín	9
2.7. Estados de polarización	10
3. Caos dinámico	12
3.1. ¿Qué es un sistema caótico?	12
3.2. Sistemas dinámicos	12
3.3. Estabilidad de puntos fijos	14
3.4. Cuantificación del caos	15
3.4.1. LCEs	15
3.5. Ejemplo: Mapeo Logístico	17
4. Dinámica del dímero polaritónico	20
4.1. Variando el bombeo	20
4.2. Variando la interacción	22
4.3. Exponentes de Lyapunov	25
4.4. Esfera de Bloch	26
4.5. Puntos fijos	27
5. Conclusión	29
A. Derivación GPE	30
B. Componentes de S	32
B.1. Derivadas de las componentes de S	32
C. Espectro de Lyapunov	37
D. Computación Cuántica	38
D.1. Qubit	38
D.2. Esfera de Bloch	38
D.3. Espín	39
E. Matriz Jacobiana	42

Resumen

Se estudia la ecuación de Gross-Pitaevskii de un sistema de fluidos polaritónicos interactuantes con el fin de caracterizar su dinámica caótica mediante el cálculo del exponente de Lyapunov, el indicador cuantitativo de la sensibilidad a las condiciones iniciales, a partir de la Ref. [1] donde se identificó la formación de caos clásico en la dinámica de fluidos polaritónicos acoplados. Se analizan las propiedades de la dinámica del sistema dímero de polaritón con el fin de determinar diferentes regímenes del comportamiento del sistema, calculando también el máximo exponente y el espectro de Lyapunov. Se espera verificar la dependencia sensitiva de las condiciones iniciales.

1. Introducción

El estudio de la interacción fuerte entre semiconductores y la luz, es un campo de estudio de frontera. Cuando la luz alcanza un semiconductor puede excitar electrones que se encuentran en la banda de valencia y mandarlos a la banda de conducción, los mismos quedan ligados al hueco que dejan en el material (por interacción coulombiana). De esta manera se forma una nueva cuasipartícula, el excitón, como se explica en la sección 2. La cuasipartícula, el hueco-electrón ligados, que se forma esta forzada a deshacerse emitiendo de nuevo el cuanto de luz. De modo que si se encierra el excitón en una microcavidad óptica (sistema de espejos reflectantes) el fotón que se emite puede ser reabsorbido por el material resurgiendo el excitón, cuyo proceso se repite continuamente. Si el fenómeno de reabsorción sucede más rápido que el tiempo de duración de los fotones en la cavidad, se dice que el acoplamiento entre la luz y materia es fuerte, de manera que los fotones y excitones pierden su identidad dando lugar a una otra cuasipartícula, el polaritón, cuya herencia principal radica en que puede interactuar y asociarse en grandes cantidades, manifestandose macroscópicamente, exhibiendo condensados de Bose-Einstein y presentando propiedades como la superfluidez [2].

Este proyecto terminal tiene como finalidad el estudio de la ecuación de Gross-Pitaevskii (GPE, por sus siglas en inglés) con el fin de obtener el sistema dinámico que describe el comportamiento de un sistema dímero de polaritón (un fluido polaritónico con dos especies), como se establece en la Ref. [1], y que será tratado en la sección 2.5. En la sección 3 se desarrollan los aspectos de caos y como medirlo, se proporciona el ejemplo del Mapa Logístico, para que en la sección 4 se pueda estudiar el comportamiento del sistema en cuestión y se determine su espectro de Lyapunov. En las secciones 4.4 se caracteriza el comportamiento de la dinámica en la esfera de Bloch. Mientras que en la sección 4.5 se proporcionan los criterios para considerar estabilidad en los puntos fijos del sistema dímero de polaritón. Finalmente, en la sección 5 se brinda una conclusión sobre la dinámica caótica que se presenta en el sistema de estudio al modificar los parametros de interacción entre las dos especies y el bombeo al sistema. Además, se incluyen varios apéndices con material suplementario.

2. Polaritones

Para responder la pregunta ¿qué es un fluido polaritónico? debemos reconocer primero que es un polaritón. Éste es un “estado cuántico” con comportamiento bosónico que se genera en un régimen de acoplamiento fuerte entre luz y materia, dentro de una cavidad óptica la cual consiste en un sistema con espejos de Bragg. La cualidad principal de dichos espejos es la alta reflectividad.

2.1. Excitones

El estado base de un semiconductor es una banda de valencia llena de electrones. El estado base puede ser excitado si se suministra la energía suficiente para promover un electrón de la banda de valencia a la banda de conducción, donde el electrón interactúa con los electrones que se encuentran “libres” y pueden moverse por el semiconductor. La interacción entre el electrón promovido a la banda de conducción y los electrones en tal banda puede ser descrita como una interacción entre un electrón en la banda de conducción y un agujero dejado por su ausencia en la banda de valencia. Este agujero se comporta como una cuasipartícula cargada positivamente en una banda con carga neutra, por lo que el estado fundamental del semiconductor se puede considerar como un vacío a partir de la cual se pueden excitar partículas cargadas positivamente (huecos) y negativas (electrones). De manera que el excitón es el estado ligado entre el electrón y el hueco¹, el excitón se convierte en un portador de carga debido a que el hueco es un portador de carga (misma que el electrón pero con signo opuesto) en el semiconductor [3].

2.2. Excitones polaritones

Cuando se coloca el semiconductor dentro de una microcavidad óptica es posible acoplar los excitones a los fotones dentro de la microcavidad generándose nuevos estados cuánticos denominados excitones polaritones o simplemente polaritones [4]. Aunque los polaritones no son fotones puros, pueden acoplarse directamente a fotones fuera de la cavidad óptica donde se generan, y pueden crearse mediante excitación láser y observarse por detección de fotones [5]. Debido a la herencia de su carácter material pueden interactuar, por debajo de una temperatura crítica, se produce una densidad de bosones suficientemente alta de modo que ocurre un efecto a escala macroscópica.

¹El hueco es una descripción alternativa de una banda a la que le falta un electrón [3].

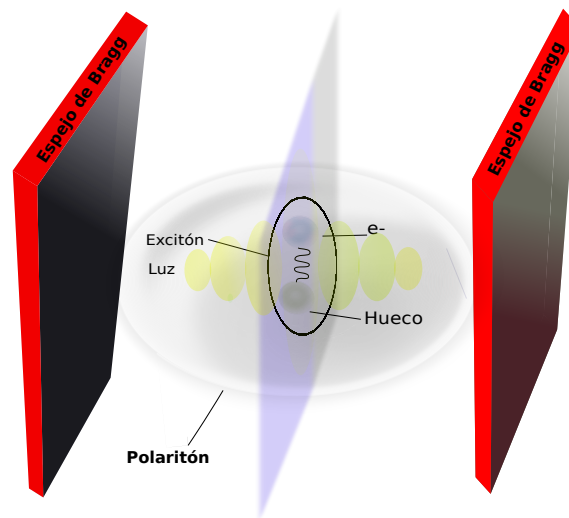


Figura 1: Representación gráfica de la interacción luz-materia dentro de una microcavidad.

La figura 1 representa la interacción que se produce al introducir un semiconductor bidimensional dentro de una microcavidad, el polaritón se produce cuando la interacción entre la luz y el medio material es fuerte.

2.3. Condensación de Bose Einstein

Dado que todas las partículas se comportan de la misma manera y, en principio, estas pueden ocupar cierto estado cuántico (con cierto valor energético). Si estas partículas son fermiones, dos o más de ellas no pueden ocupar el mismo estado cuántico (De acuerdo a el Principio de exclusión de Pauli). En cambio, si son bosones cualquier número de ellos pueden ocupar el mismo estado cuántico. Para una temperatura suficientemente baja, la mayoría de partículas están en el mismo estado cuántico (estado base) y tiene la misma velocidad. Entonces, la colección de bosones en el estado base se comporta como un fluido macroscópico con nuevas propiedades como la superfluidez.

La manifestación de superfluidez es una propiedad interesante debido a que los fluidos que la presentan fluyen sin fricción (viscosidad casi nula). Esta propiedad fue observada en He-4 a temperaturas bajas en 1937 y tiempo después también se observó en He-3 (pero a temperaturas aún más bajas) [6].

En 1941 Landau sugirió que la superfluidez puede entenderse en términos de estados térmicamente excitados del líquido: los conocidos fonones y rotones [2]. Esta idea llevó a Landau también a la idea de un modelo de dos fluidos.

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \nabla^2 u + gu(|u|^2 - 1) \quad (2.1)$$

Donde $|u|^2$ representa la densidad del superfluido (flujo sin fricción) cuya resto de materia es fluido normal (flujo con fricción) y g representa una constante de proporcionalidad con dimensiones de energía. El modelo de Landau-Ginzburg es un caso particular de una ecuación que surge de forma bastante natural cuando estudiamos el comportamiento de los condensados de Bose- Einstein a una aproximación de primer orden o de campo medio.

Esta ecuación se conoce como la ecuación de Gross-Pitaevskii (GPE, por sus siglas en inglés) y viene dada por:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}} + g|\psi|^2 \right) \psi \quad (2.2)$$

Donde m es la masa de los átomos del condensado, $|\psi|^2$ representa la densidad atómica, V_{ext} es un potencial externo y g es un parametro que mide las interacciones atómicas. La realización de condensados de Bose con elementos alcalinos proporcionó una gran oportunidad de estudiar un nuevo regimen de propiedades de la materia, cuyos desarrollos teóricos para esos sistemas ya han sido desarrollados como en la Ref. [7]. Por ejemplo, el fenómeno de la condensación de Bose-Einstein puede ser entendida con el uso de la física estadística para sistemas bosonicos, sin la necesidad de considerar la interacción bosón-bosón (describiendo un gas ideal). La dinámica del condensado interactuante a temperatura cero es generalmente descrita con la GPE, la cuál es una aproximación de campo medio para la interacción entre las partículas [8]. Entre las aplicaciones del uso de la GPE se incluyen el modelado de superconductores [9] (la superconducción es un efecto mecánico cuántico que se manifiesta a bajas temperaturas y se interpreta como superfluidez de pares de electrones). La GPE funciona bajo la aproximación de campo medio, que significa que la acción sentida por una partícula debido al resto de partículas

es substituida por la acción media del fluido sobre la partícula, en el apéndice A se deriva la GPE.

2.4. Condensado de polaritones

Dado que los polaritones son de origen bosónico, por sus propiedades materiales pueden formar gases cuánticos y exhibir BEC [10]. En ese caso, un número macroscópico de partículas ocupa el estado fundamental y se manifiestan correlaciones cuánticas a escala macroscópica [11]. En cambio, un gas de bosones que interactúan débilmente se convierte en un superfluido a temperaturas suficientemente bajas [12]. En los sistemas atómicos, la densidad de una nube atómica se reduce selectivamente mediante el enfriamiento evaporativo para disminuir la temperatura y lograr la condensación [13]. En el caso de BEC para polaritones el proceso difiere dado que la temperatura se mantiene fija y la densidad aumenta hasta que la distancia entre partículas es comparable a la longitud de onda térmica de De Broglie es un proceso altamente fuera de equilibrio que depende del bombeo del láser y de la disipación radiativa de fotones de la cavidad [14].

2.5. Modelo teórico

Para que la condensación tenga lugar, los polaritones necesitan poder seleccionar espontáneamente su fase, ya que no heredan la coherencia de fase de la bomba como lo hacen en los experimentos de resonancia. Mediante el uso de bombeo eléctrico, la relajación de las excitaciones electrónicas proporciona un mecanismo para poblar de manera incoherente el estado base. Un modelo simple pero efectivo que reproduce el comportamiento del condensado de polaritones es una aproximación de campo medio donde el condensado tiene una función de onda macroscópica $\psi(\mathbf{r})$ que es alimentada por un depósito de excitones $n(\mathbf{r})$ [14].

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial t} &= \left\{ E_0 - \frac{\hbar}{2m} \nabla_r^2 + \frac{i\hbar}{2} \{ R[n(\mathbf{r})] - \gamma_c \} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \hbar g |\psi(\mathbf{r})|^2 + V_R(\mathbf{r}) \right\} \psi(\mathbf{r}), \\ \frac{dn(\mathbf{r})}{dt} &= P(\mathbf{r}) - \gamma_R n(\mathbf{r}) - R[n(\mathbf{r})] |\psi(\mathbf{r})|^2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde E_0 y m son la energía y masa en la parte inferior de la dispersión, respectivamente; V_{ext} es un potencial externo y P representa el bombeo de un láser externo, la interacción Coulombiana entre las componentes de excitones conduce a una constante de interacción repulsiva polaritón-polaritón g mayor que 0.

Los polaritones se descomponen constantemente a un ritmo γ_c y siendo reabastecidos a un ritmo $R[n(\mathbf{r})]$ por la dispersión estimulada desde el depósito. La transición de una nube de excitones calientes a un condensado de polaritones se produce cuando este término es igual a γ_c y la solución de estado estacionario tiene $\psi(\mathbf{r}) \neq 0$. El término $V_R(\mathbf{r}) = g_R n(\mathbf{r}) + g_P P(\mathbf{r})$ explica las interacciones no lineales de polaritones con excitones del reservorio y con otros portadores libres creados por el bombeo P . El término γ_R

corresponde a la desintegración efectiva de los excitones del depósito. Cuando $\gamma_R \gg \gamma_c$ se puede suponer que el depósito sigue adiabáticamente el condensado $\dot{n}(\mathbf{r}) = 0$: esto se llama la aproximación de depósito estático [15]. Dada a que el fluido está compuesto por excitones-polaritones la constante de interacción g es de repulsión.

Ahora consideramos dos condensados de polaritones con espín distinto, descritos por los parámetros de orden Ψ_{+1} y Ψ_{-1} , que obedecen a las ecuaciones de Gross-Pitaevskii, como se indica en la referencia [14].

$$\frac{d\Psi_{\pm 1}}{dt} = \frac{1}{2}(rN_{\pm 1} - \Gamma)\Psi_{\pm 1} - \frac{1}{2}(\gamma - i\varepsilon)\Psi_{\mp 1} - \frac{i}{2}[g_1|\Psi_{\pm 1}|^2 + g_2|\Psi_{\mp 1}|^2]\Psi_{\pm 1} \quad (2.4)$$

acopladas a las ecuaciones para las densidades $N_{\pm 1}$ de los dos depósitos excitados no resonantemente

$$\frac{dN_{\pm 1}}{dt} = P - [\Gamma_R + r|\Psi_{\pm 1}|^2]N_{\pm 1}. \quad (2.5)$$

En las ecuaciones 2.4y 2.5 Γ y Γ_R representan las tasas de disipación del polaritón y del depósito, r define la tasa con la cual el condensado absorbe polaritones y P es el bombeo externo no resonante que los genera, el cual es el mismo para ambos depósitos, por lo que el sistema es simétrico ante el operador de paridad que cambia el espín de los polaritones. ε es el acoplamiento de tunelaje de Josephson de los dos condensados acompañado de un canal de decaimiento γ . Los parámetros g_1 y g_2 definen la interacción entre los polaritones de acuerdo a su espín. Los parametros g , combinados con el bombeo² P permite observar diferentes tipos de dinámica, despreciándose la interacción de los polaritones con las partículas del depósito. Además de evitar la sobrecarga del modelo con parámetros adicionales.

Para tratar con cantidades observables, se introducen parámetros re-escalados $\psi_{\pm 1} = (r/\Gamma_R)\Psi_{\pm 1}$, ocupaciones del depósito $\tilde{N}_{\pm 1} = rN_{\pm 1}$, constantes de interacción $\alpha_{1,2} = (\Gamma_R/r)g_{1,2}$ y bombeo externo $p = rP/\Gamma_R$. De manera que la ecuación 2.5 se reescribe como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d\tilde{N}_{\pm 1}}{dt} &= p \frac{\Gamma_R}{r} - \left[\Gamma_R + r \frac{\Gamma_R}{r} |\Psi_{\pm 1}|^2 \right] \frac{\tilde{N}_{\pm 1}}{r} \\ \frac{d\tilde{N}_{\pm 1}}{dt} &= \Gamma_R (p - (1 + |\Psi_{\pm 1}|^2)\tilde{N}_{\pm 1}) \\ \Gamma_R^{-1} \frac{d\tilde{N}_{\pm 1}}{dt} &= p - (1 + |\Psi_{\pm 1}|^2)\tilde{N}_{\pm 1} \\ \Gamma_R^{-1} \frac{d\tilde{N}_{\pm 1}}{dt} &= p - (1 + n_{\pm 1})\tilde{N}_{\pm 1}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

De donde $n_{\pm 1} = |\Psi_{\pm 1}|^2$ son las ocupaciones del condensado. Con la aproximación de reservorio estático ($\Gamma_R \gg \Gamma$), el lado derecho de la ecuación 2.6 se hace cero y las ocupaciones en el depósito se convierten en

$$\tilde{N}_{\pm 1} = \frac{p}{(1 + |\Psi_{\pm 1}|^2)} = \frac{p}{(1 + n_{\pm 1})}$$

²La fuente del bombeo es por lo general sintonizada a una energía muy alejada del estado fundamental de los polaritones en la cavidad. Los polaritones también se pueden bombear electricamente, pero es difícil agregar los electrones de manera que se mejore la calidad de la cavidad y la vida útil de los polaritones, consiste en inyectar eléctricamente electrones y huecos en el interior de la capa de cavidad [16].

De igual manera se reescribe la ecuación 2.4 con los elementos ya mencionados y se obtiene:

$$\frac{d\psi_{\pm 1}}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1 + n_{\pm 1}} - \Gamma \right] \psi_{\pm 1} - \frac{1}{2} (\gamma - i\varepsilon) \psi_{\mp 1} - \frac{i}{2} [\alpha_1 |\psi_{\pm 1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{\mp 1}|^2] \psi_{\pm 1} \quad (2.7)$$

que son las ecuaciones a resolver.

2.6. Representación de pseudo-espín

El vector de pseudo-espín es una forma útil de describir y visualizar el sistema, ya que directamente corresponde a los componentes de polarización de Stokes (mismos que pueden ser medidos experimentalmente).

La excitación no resonante polarizada linealmente de una microcavidad semiconductor produce densidades de excitones de espín arriba (+) y de espín abajo (-). Los condensados de polaritones atrapados ópticamente pueden estar con un estado de polarización bajo bombeo linealmente polarizado [17], por lo que nos interesa poder relacionar las ocupaciones y la fase de las especies en el condensado.

Para ello es conveniente utilizar el vector de pseudo espín \mathbf{S} que se define como

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \Psi^\dagger \bar{\sigma} \Psi, \quad (2.8)$$

donde $\Psi^\dagger = [\psi_{+1}^\dagger \psi_{-1}^\dagger]$, es el conjugado de $\Psi = [\psi_{+1} \psi_{-1}]^T$, $\psi_{\pm 1} = \sqrt{n_{\pm 1}} e^{i(\Phi \mp \phi)}$. $\bar{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ con $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ las matrices Pauli.

La deducción del sistema de ecuaciones que rigen el comportamiento del espín se puede ver en el Apéndice B, mismas que han sido ya estudiadas en [18] y en la referencia principal de estudio (Ref. [1]).

$$\begin{aligned} \dot{S}_x &= [u(\mathbf{S}) - \Gamma] S_x - \gamma S - \alpha S_z S_y \\ \dot{S}_y &= [u(\mathbf{S}) - \Gamma] S_y + \varepsilon S_z + \alpha S_z S_x \\ \dot{S}_z &= [u(\mathbf{S}) - \Gamma] S_z + v(\mathbf{S}) S - \varepsilon S_y \\ S &= \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

El dímero de polaritones bajo excitación no resonante puede exhibir dinámica caótica [1], dado que se describe por un sistema autónomo de tres ecuaciones no lineales, que es el número mínimo de ecuaciones no lineales requeridas para la aparición del caos como se comentará en la subsección 3.2, como es el caso de los sistemas como el atractor Lorenz, atractor de Rössler, oscilador de Duffing, etc.

2.7. Estados de polarización

En la óptica, la esfera de Bloch también se conoce como esfera de Poincaré y representa específicamente diferentes tipos de polarizaciones [19]. Existen seis tipos de polarización comunes y se denominan vectores de Jones [20]. El vector de Stokes y la esfera de Poincaré para los estados de polarización de fotón único es equivalente al vector de Bloch y la esfera de Bloch para un sistema de qubit de dos niveles, ver apéndice D.

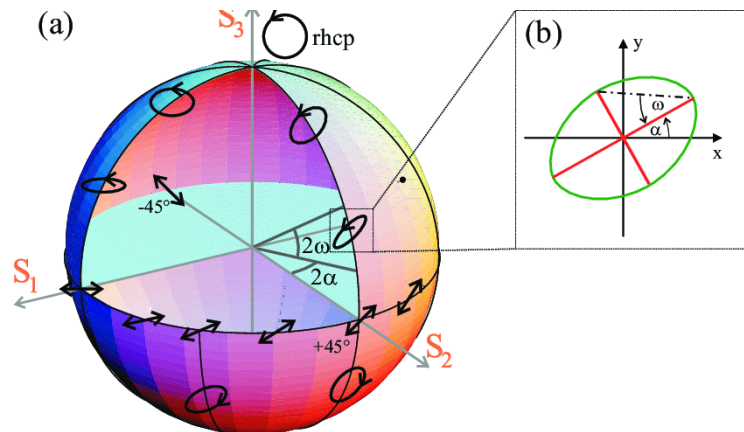


Figura 2: Representación de la esfera de Poincaré. En el espacio tridimensional. Los parámetros de Stokes son los ejes cartesianos para una esfera, cuyos puntos representan estados de polarización elíptica. Tomado de [21].

La esfera constituye un modelo adecuado para la representación de estados de polarización de la luz, así como de la acción de los medios materiales sobre la luz polarizada. Cada posible estado de polarización está representado con un punto en la superficie de la esfera, con unas coordenadas 2α y 2ω como se puede visualizar en la figura 2. Cada punto de la esfera de longitud 2α y latitud 2ω representa un estado de polarización, cuya elipse tiene un azimutal α y una elipticidad ω . De acuerdo con lo anterior, los distintos estados de polarización quedan representados del siguiente modo:

- Valores positivos de ω , representan estados de polarización elíptica dextrógira. En la esfera de Poincaré se representan por puntos del hemisferio superior ($0^\circ < 2\omega \leq 90^\circ$).
- Valores negativos de ω , representan estados de polarización elíptica levógira. En la esfera de Poincaré se representan por puntos del hemisferio inferior ($90^\circ \leq 2\omega \leq 0^\circ$).
- Puntos del ecuador ($0^\circ < 2\alpha \leq 360^\circ$) y $\omega = 0$, representan estados de polarización lineal. En particular los puntos sobre la parte positiva del eje OX, representan estados de polarización horizontal ($\alpha = 0$), mientras que los puntos sobre la parte negativa del eje OX, representan estados de polarización vertical ($\alpha = 90^\circ$).
- El polo norte de la esfera, representa un estado de polarización dextrógira, mientras que el polo sur, representa un estado de polarización levógira. En ambos casos ($\omega = 45^\circ$).

- Puntos del hemisferio norte, representan estados de polarización elíptica dextrógira. Mientras que los puntos del hemisferio sur, representan estados de polarización elíptica levógira. Además, la mitad del valor de la longitud (2α) y de la latitud (2ω) de cada punto de la esfera, define el azimutal α y la elipticidad ω de la correspondiente elipse de polarización.
- Puntos en el mismo meridiano ($\alpha = \text{cte}$), representan estados tales que sus elipses de polarización tienen la misma orientación. Mientras que puntos en el mismo paralelo ($\omega = \text{cte}$), representan estados tales que sus elipses de polarización tienen la misma elipticidad.

Cada punto de la esfera viene dado r y dos componentes de coordenadas angulares esféricas 2α y 2ω . De manera que se puede representar cualquier punto con:

$$X = r \cos(2\omega) \cos(2\alpha)$$

$$Y = r \cos(2\omega) \sin(2\alpha)$$

$$Z = r \sin(2\omega)$$

Las componentes de los vectores de Stokes, pueden expresarse en función del azimutal y la elipticidad como sigue:

$$S_1 = S_0 G \cos(2\omega) \cos(2\alpha)$$

$$S_2 = S_0 G \cos(2\omega) \sin(2\alpha)$$

$$S_3 = S_0 G \sin(2\omega)$$

Lo que nos permite representar un vector de Stokes, cuyas coordenadas son $S_1/S_0, S_2/S_0, S_3/S_0$. Se emplearán estas coordenadas para analizar la dinámica del dímero polaritónico.

3. Caos dinámico

3.1. ¿Qué es un sistema caótico?

Podría decirse que el surgimiento del estudio del caos en sistemas dinámicos comenzó con el trabajo del matemático Henri Poincaré. La motivación fue en parte proporcionada por el problema de las órbitas de tres cuerpos celestes que experimentan atracción gravitatoria mutua [22]. Un sistema caótico se define como aquél que es altamente sensible a las condiciones iniciales [23].

El caos determinista comprende una serie de fenómenos encontrados en la teoría de sistemas dinámicos y la teoría de ecuaciones diferenciales, de modo que se puede conocer su evolución en el tiempo.

3.2. Sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos son aquellos en los que su comportamiento cambia o evoluciona con el tiempo. Estas modificaciones se pueden modelar mediante modelos matemáticos. Puede definirse un sistema matemático determinista como aquél que describe la evolución de un sistema para todo tiempo. El comportamiento a largo plazo de un sistema dinámico no lineal nunca cae ninguna trayectoria estática o periódica. Un sistema dinámico se divide en sistemas discretos en el tiempo y continuos en el tiempo.

Continuo Los valores del tiempo son cualquier valor en un determinado rango.

Discreto Los valores del tiempo son determinados o específicos.

Ejemplo:

Sistema descrito por N ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas.

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)] \quad (3.1)$$

Se llama continuo, ya que el parámetro t tomará valores en algún dominio (un intervalo) en \mathbb{R} , donde \mathbf{x} es un vector de N dimensiones.

En el caso en que se tenga un tiempo discreto con valores enteros, se tiene un sistema dinámico como un mapa. En su forma vectorial se puede escribir:

Mapa

$$\mathbf{X}_{n+1} = f(\mathbf{X}_n) \quad (3.2)$$

Donde $f: M \rightarrow M$ es un mapa un espacio de estados en sí mismo y X_n denota el estado en el tiempo discreto n .

Donde \mathbf{X}_n es de dimensión N , $\mathbf{X}_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \dots, X_n^{(N)})$. Dada una condición inicial \mathbf{X}_0 se generará una trayectoria³ del sistema de tiempo discreto. Los mapeos de tiempo discreto se obtienen también al reducir la dimensión de un sistema continuo de tiempo de dimensión N a $N - 1$ mediante la técnica de sección de superficie de Poincaré [23].

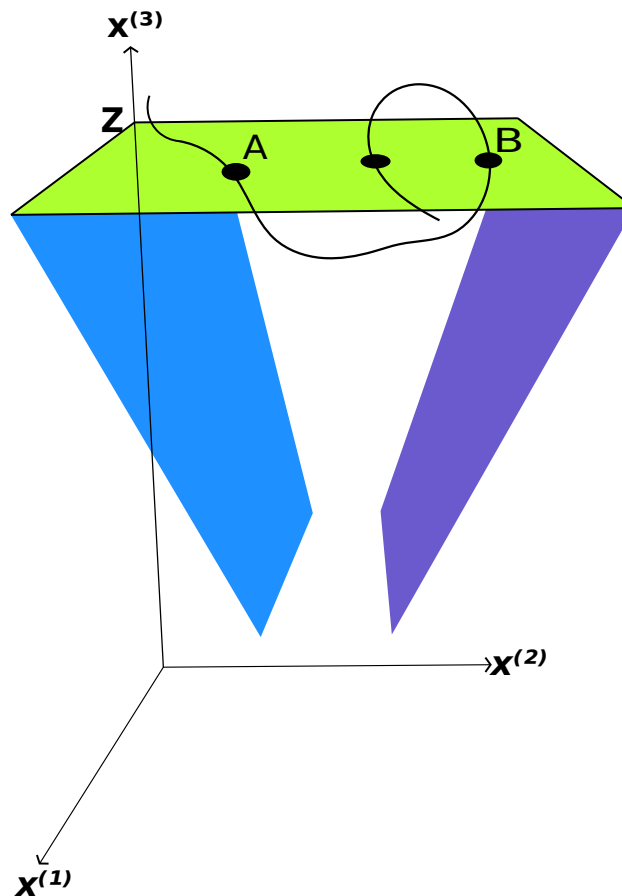


Figura 3: El mapa de Poincaré conserva varias propiedades de órbitas periódicas del sistema original y el nuevo sistema tiene como espacio de estados de dimensión inferior $N - 1$.

Considerando una superficie S en Z (ver figura 3) en donde se registran los puntos de las trayectorias de un sistema dinámico continuo que la atraviesan. Tal secuencia de intersecciones en la superficie también estará gobernada por un sistema dinámico pero de tiempo discreto (mapa).

³La secuencia X_n obtenida iterando 3.2 a partir de una condición inicial X_0 se llama la órbita de X_0 .

3.3. Estabilidad de puntos fijos

Un punto fijo es representa un valor que permanece sin cambios, de modo que para un sistema dinámico

$$\dot{x} = \mathbf{F}[(x_p)] = 0$$

Donde x_p me representa el punto fijo. El equilibrio de los puntos fijos de un sistema dinámico tridimensional puede ser estudiado con la matriz Jacobiana (evaluada en el punto), de manera que cumple con las siguientes desigualdades si y solo si es linealmente estable.

$$\begin{aligned} |\det(J)| &< 1, \\ 1 &> [\sum M_i(J)] - [\text{tr}(J)][\det(J)] + [\det(J)]^2, \\ -(\sum M_i(J) + 1) &< \text{tr}(J) + \det(J) < (\sum M_i(J) + 1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

De manera que la matriz Jacobiana es:

$$JV(S) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V(S)_x}{\partial S_x} & \frac{\partial V(S)_x}{\partial S_y} & \frac{\partial V(S)_x}{\partial S_z} \\ \frac{\partial V(S)_y}{\partial S_x} & \frac{\partial V(S)_y}{\partial S_y} & \frac{\partial V(S)_y}{\partial S_z} \\ \frac{\partial V(S)_z}{\partial S_x} & \frac{\partial V(S)_z}{\partial S_y} & \frac{\partial V(S)_z}{\partial S_z} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Uno de los objetivos principales en el campo de los sistemas dinámicos discretos es el estudio de la dinámica cercana a los puntos fijos (la estabilidad local de los puntos fijos). De modo que el punto fijo x^* de F es localmente asintóticamente estable si todos los autovalores de la matriz Jacobiana del sistema $JF(x^*)$ evaluada en ese punto x^* tienen magnitud menor que 1. Las condiciones se expresan mediante el determinante de la matriz Jacobiana ($\det JF(x^*)$), la traza de la matriz Jacobiana ($\text{tr} JF(x^*)$) y la suma de los principales menores de la matriz Jacobiana. Estos valores pueden ser expresados en términos de los valores propios de $JF(x^*)$ [24].

$$\begin{aligned} \det(JF(x^*)) &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\ \text{tr}(JF(x^*)) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \sum_{i=1}^3 M_{ii}(JF(x^*)) &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 \end{aligned} \quad (3.5)$$

El polinomio característico de $JF(x^*)$ viene dada por la expresión:

$$\lambda^3 - \text{tr}(JF(x^*))\lambda^2 + \sum_{i=1}^3 M_{ii}(JF(x^*))\lambda - \det(JF(x^*)) = 0 \quad (3.6)$$

El polinomio tiene 3 valores propios como soluciones. Como en los sistemas dinámicos hay dependencias de parametros, los elementos de la matriz Jacobiana están expresados en la mayoría de los casos en términos de distintos parametros (como es el caso del sistema que se estudió en este proyecto) con lo cual el calculo directo de los valores propios no es practico. Se puede obtener condiciones de estabilidad, en función de los parámetros, sin calcular los valores propios con verificar las desigualdades 3.3.

3.4. Cuantificación del caos

La sensibilidad de los sistemas caóticos a las condiciones iniciales es conocida bajo el apodo de «efecto mariposa», que es una ilustración metafórica de la naturaleza caótica del sistema climático en el que “Un aleteo de las alas de una mariposa en Brasil podría desencadenar un tornado en Texas-[25]. El significado de esta expresión es que, en un sistema caótico, una pequeña perturbación (por ejemplo, en las condiciones iniciales) podría eventualmente causar una diferencia dinámica a gran escala a largo plazo.

En el caso de un sistema dinámico con N ecuaciones diferenciales ordinarias, se observa que el caos surge cuando $N \geq 3$ en cambio con un sistema autónomo $N = 2$ se puede descartar el caos. En el caso de un mapeo, decimos que \mathbf{M} es invertible si dada \mathbf{X}_{n+1} podemos resolver $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{M}(x_n)$ únicamente para \mathbf{x}_n . Denotamos la solución como:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_{n+1}) \quad (3.7)$$

Donde \mathbf{M}^{-1} es la inversa de \mathbf{M} . Si el mapa es invertible entonces no hay caos al menos que $N \geq 2$. Si el mapa es no-invertible el caos es posible incluso en un mapa unidimensional.

3.4.1. LCEs

El exponente de Lyapunov (LCE por sus siglas en inglés *Lyapunov Characteristic Exponent*) juega un rol importante cuando se estudian las propiedades de estocasticidad en los sistemas dinámicos desde el punto de vista teórico o numérico. En términos generales los LCEs de una trayectoria de un sistema dinámico mide la tasa exponencial con la que una distancia infinitesimalmente pequeña entre dos estados inicialmente cercanos crece con el tiempo [26].

Se comenzará suponiendo dos trayectorias cercanas $x_0 + \epsilon$ y x_0 en un tiempo t .

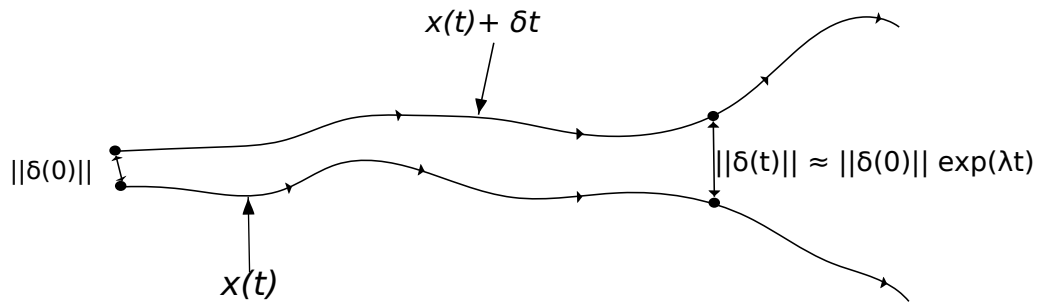
$$\begin{aligned} |\mathbf{F}(x_0 + \epsilon, t) - \mathbf{F}(x_0, t)| &\approx \epsilon e^{\lambda t} & (3.8) \\ e^{\lambda t} &\approx \frac{|\mathbf{F}(x_0 + \epsilon, t) - \mathbf{F}(x_0, t)|}{\epsilon} \\ \lambda t &\approx \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \frac{|\mathbf{F}(x_0 + \epsilon, t) - \mathbf{F}(x_0, t)|}{\epsilon} \\ \lambda &= \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{|\mathbf{F}(x_0 + \epsilon, t) - \mathbf{F}(x_0, t)|}{\epsilon} \\ \lambda &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{d\mathbf{F}}{dx} \Big|_{x=x_0} \right| \end{aligned}$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{d\mathbf{F}}{dx} \Big|_{x=F(x_0, t-1)=x_{t-1}} \cdot \frac{d\mathbf{F}}{dx} \Big|_{x=F(x_0, t-2)=x_{t-2}} \cdots \frac{d\mathbf{F}}{dx} \Big|_{x=x_0} \right| \\ \lambda &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \prod_{i=0}^{t-1} \frac{d\mathbf{F}}{dx} \Big|_{x=x_i} \right| \end{aligned}$$

El producto de los logaritmos es la suma de los mismos

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \ln \left| \frac{dF}{dx} \Big|_{x=x_i} \right| \quad (3.9)$$



λ es el exponente de Lyapunov

Figura 4: Para los sistemas caóticos ($\lambda > 0$), las trayectorias cercanas se separan en el tiempo exponencialmente rápido (mientras que para los sistemas estables ($\lambda < 0$) se acercan exponencialmente rápido).

De la figura 4 las órbitas se pueden considerar como funciones paramétricas.

$$\lambda = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \delta x(0) \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta x(t)}{\delta x(0)} \right| \quad (3.10)$$

Las ecuaciones 3.9 y 3.10 son esencialmente lo mismo.

Dado que $\delta x(t) = f^t(x_0 + \delta_0) - f^t(x_0)$, de modo que:

$$\lambda = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \delta x(0) = \delta_0 \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{f^t(x_0 + \delta_0) - f^t(x_0)}{\delta x(0)} \right|$$

Se observa la definición de derivada:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{df^t}{dx} \Big|_{x=x_0} \right|$$

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \prod_{x=x_0}^{t-1} |f'(x_i)|$$

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{x=x_0}^{t-1} \ln |f'(x_i)|$$

Cuando λ adquiere valores negativos, la órbita atrae a un punto fijo estable u órbita periódica estable. Los exponentes negativos de Lyapunov son característicos de los sistemas no conservativos. Entre más negativo sea el exponente mayor será la tendencia a la estabilidad. La tasa de separación puede ser diferente para diferentes orientaciones del vector de separación inicial. Por lo tanto, hay un espectro de exponentes de Lyapunov, igual en número a la dimensionalidad del espacio de fase. El máximo exponente de Lyapunov (MLE, por sus siglas en inglés) es el valor más grande porque determina una noción de previsibilidad para un sistema dinámico. Un MLE positivo se toma normalmente como una indicación de que el sistema es caótico (siempre que se cumplan algunas otras condiciones, por ejemplo, compacidad del espacio de fase) [27]. Para λ cero indica que las trayectorias de dos orbitas no se separarán. Las órbitas en esta situación mantendrían una separación constante. En cambio cuando λ es mayor que cero la órbita es inestable y caótica. Los puntos cercanos, sin importar cuán cerca estén, divergirán a cualquier separación arbitraria.

Para el sistema de estudio de nuestro interés el máximo exponente de Lyapunov (MLE, por sus siglas en inglés) el cual se define como el máximo λ_m de los tres exponentes de Lyapunov (porque un sistema dinámico de 3 ecuaciones), nos indica la tasa media de divergencia o convergencia de trayectorias cercanas en el espacio de espín [1], se espera obtener que al menos uno de los máximos exponentes de lyapunov tenga valor negativo comportandose como un atractor extraño [28].

3.5. Ejemplo: Mapeo Logístico

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Esta ecuación define las reglas, o dinámicas, de nuestro sistema: x representa la población en un momento t dado, y r representa la tasa de crecimiento. La cantidad de población en cualquier momento dado está en función del parámetro de tasa de crecimiento y el nivel de población de la etapa de tiempo anterior.

Si la tasa de crecimiento se establece demasiado baja, la población morirá y se extinguirá. Las tasas de crecimiento más altas podrían establecerse hacia un valor estable o fluctuar en subidas y bajadas de la población.

Un atractor se define como el conjunto de puntos a los que se acerca la órbita a medida que el número de iteraciones⁴ aumenta hasta el infinito, lo que representa su comportamiento a largo plazo. Cuando el parámetro de tasa de crecimiento se establece en $0 < r < 1$, el sistema tiene un atractor de punto fijo con población 0 ⁵. Algo interesante sucede si un valor de $r > 3$ es elegido. El mapa se vuelve inestable y obtenemos una bifurcación de horquilla con dos órbitas estables. En cambio, cuando el parámetro de tasa de crecimiento se establece en $r \sim 3.44$, el sistema oscila entre cuatro valores. Pero cuando se establece el parámetro de tasa de crecimiento más allá de 3.57, vemos el inicio del caos.

⁴Conjunto de valores numéricos hacia los cuales un sistema tiende a evolucionar

⁵El valor de la población se dirige hacia 0 a lo largo del tiempo a medida que el modelo itera.

Un sistema caótico tiene un extraño atractor, alrededor del cual el sistema oscila para siempre, sin repetirse ni establecerse en un estado de comportamiento estable. Nunca llega al mismo punto dos veces y su estructura tiene una forma fractal [29]. Una bifurcación es un cambio cualitativo en la dinámica, esto ocurre cuando se cambia un parámetro del sistema, el diagrama de bifurcación mostrado en la figura 5 muestra los posibles valores a largo plazo de una variable en un sistema a partir del cambio de un parámetro del sistema. Para el mapa logístico, el parámetro r se muestra en el eje horizontal de la gráfica y el eje vertical muestra la densidad posible de población de la función logística [30].

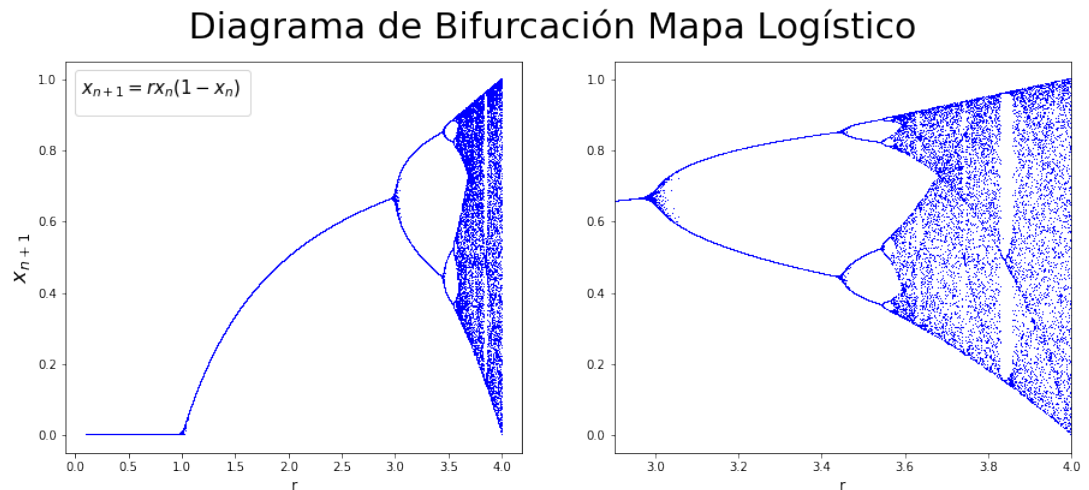


Figura 5: Diagrama de bifurcación con $0 < r < 4$.

El modelo matemático del sistema de mapa logístico viene dado por:

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n), \quad r \in [0, 4] \quad (3.11)$$

Cuyo exponente de Lyapunov se determina con:

$$LE = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \log_e |f'(x_n)| \right) \quad (3.12)$$

De modo que se puede obtener distintos exponentes de Lyapunov al variar la constante de población r . Generando así la figura 6 se observa que el máximo exponente de Lyapunov ocurre en $r = 4.0$, cuyo valor corresponde a $\lambda_m = 0.6931$.

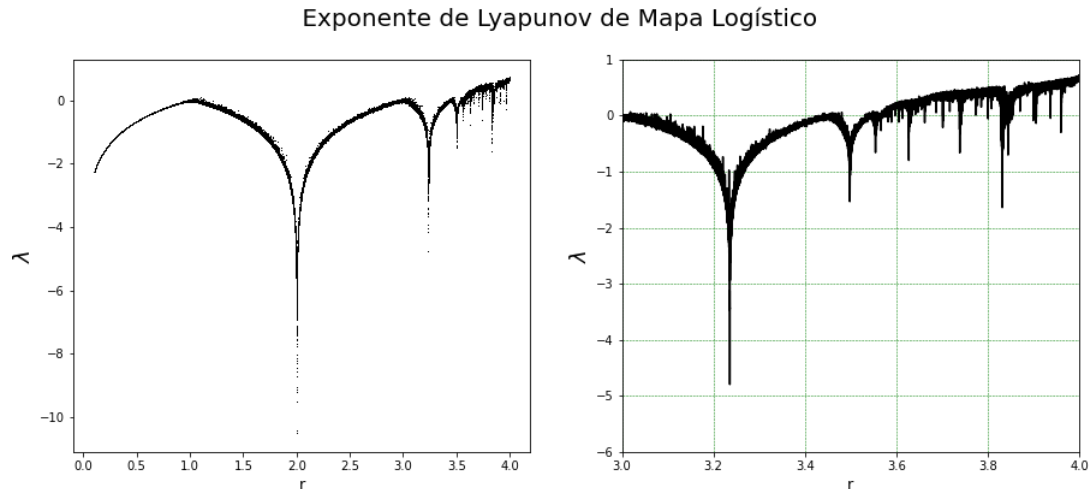


Figura 6: Se tiene mayor estabilidad en $r = 2.0$ (exponente más negativo) en cambio, cuando $r \approx 3.57$ se observa el primer exponente positivo, cuando $r = 4.0$ se tiene el valor máximo para λ .

Ahora el reto consistirá en estudiar los exponentes de Lyapunov para el sistema dímero de polaritón, con las herramientas que ya se mencionarán.

4. Dinámica del dímero polaritónico

Ahora nos centraremos en estudiar la dinámica en el modelo del dímero de polaritón con dos condensados alimentados de forma no resonante a partir de las ecuaciones 2.9. Para ello analizaremos las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento de los fluidos polaritónicos interactuantes como función de algunos parámetros en el sistema y su exponente de Lyapunov.

Se emplearán las herramientas mencionadas en secciones anteriores: los exponentes de Lyapunov, la dinámica en la esfera de Bloch, el análisis de los puntos fijos. Para resolver el sistema de ecuaciones que se obtuvo en la sección 2.9 se empleó el lenguaje *Julia* con el uso de paqueterías afines.

Para las soluciones generadas se considerarán los valores de parámetros que se muestran en la Ref. [1] con variaciones en los parámetros de bombeo p y la constante de interacción α con el fin de verificar resultados.

$$\begin{aligned}\dot{S}_x &= [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_x - \gamma S - \alpha S_z S_y \\ \dot{S}_y &= [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_y + \varepsilon S_z + \alpha S_z S_x \\ \dot{S}_z &= [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_z + v(\mathbf{S})S - \varepsilon S_y \\ S &= \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}\end{aligned}$$

Con

$$\begin{aligned}u(\mathbf{S}) &= \frac{(1+S)p}{(1+S)^2 - S_z^2}, \quad \alpha = (\alpha_1 - \alpha_2), \quad v(\mathbf{S}) = -\frac{S_z p}{(1+S)^2 - S_z^2} \\ \Gamma &= 1.0, \quad \gamma = 0.5, \quad \varepsilon = 2.0, \quad \alpha = 1.5\end{aligned}$$

4.1. Variando el bombeo

Proyección 3D de las soluciones bombeo variable

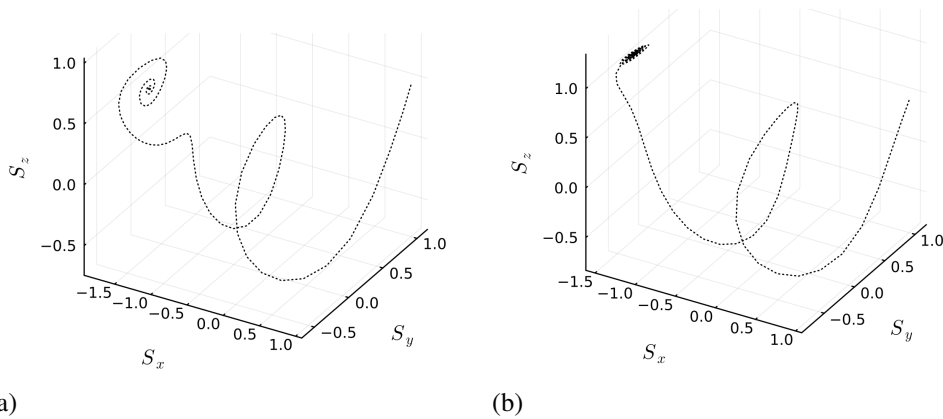


Figura 7: Se considerarán las condiciones iniciales $S_{x0} = 1.0$, $S_{y0} = 1.0$, $S_{z0} = 0.5$, con $\Gamma = 1.0$, $\gamma = 0.5$, $\alpha = 1.5$, $\varepsilon = 2.0$ y se hizo variar el bombeo p .

La figura 7 a) muestra el comportamiento para el bombeo $p = 1.5$ y b) para el bombeo $p = 2.0$. En ambos casos se observa que la evolución de las variables del sistema converge a un punto.

Caso opuesto sucede en la figuras 8 a) donde el bombeo $p = 3.0$, b) $p = 3.5$ y c) $p = 4.0$. En estos casos el comportamiento de las variables presentan oscilaciones. Más adelante se determinaran los exponentes de Lyapunov para dos distintos bombeos el más pequeño y el más grande.

Proyección 3D de las soluciones bombeo variable

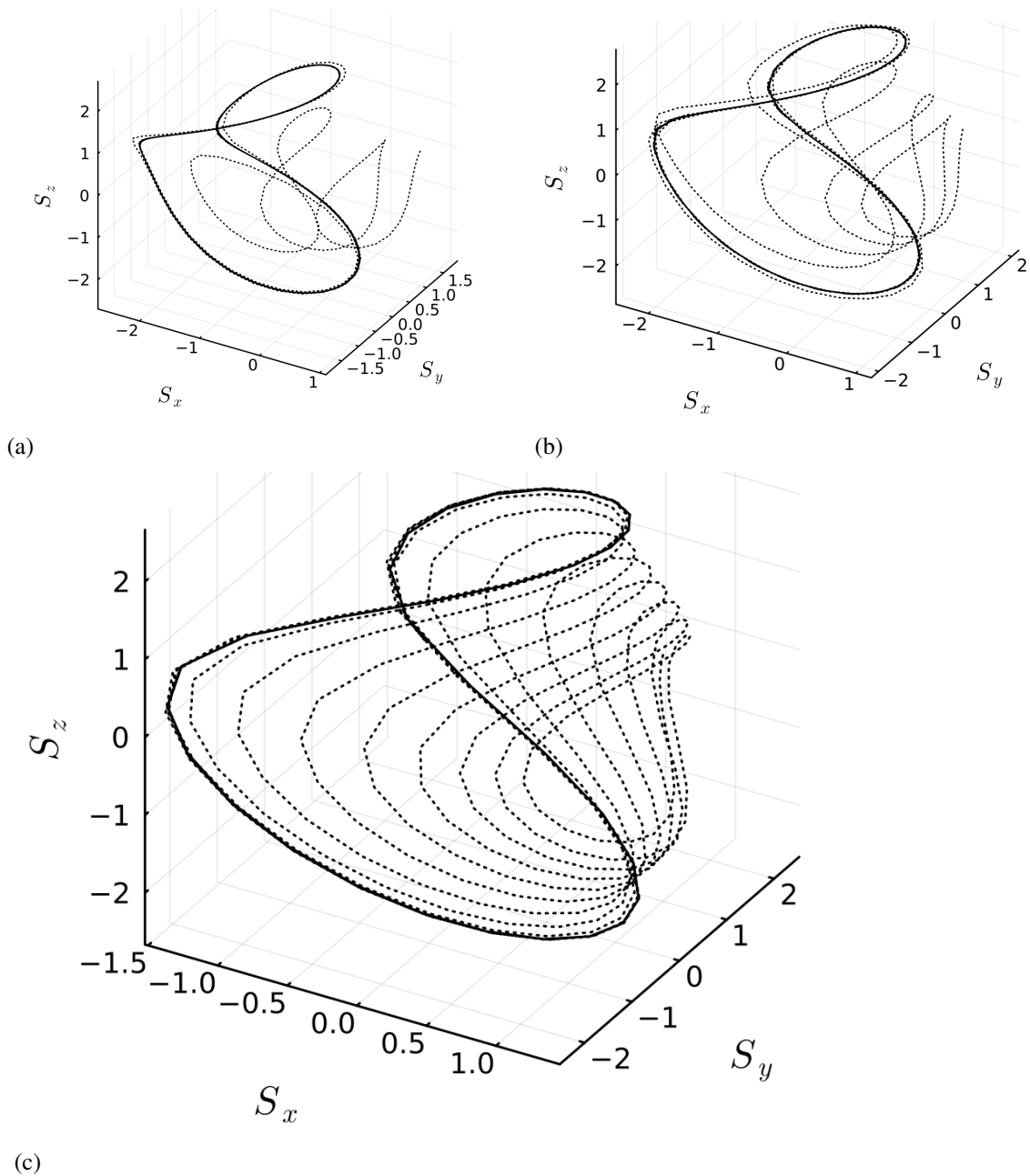


Figura 8: Se considerarán las condiciones iniciales $S_{x0} = 1.0$, $S_{y0} = 1.0$, $S_{z0} = 0.5$, con $\Gamma = 1.0$, $\gamma = 0.5$, $\alpha = 1.5$, $\varepsilon = 2.0$ y se hizo variar el bombeo p .

4.2. Variando la interacción

Cuando hacemos variar la constante de interacción α se nota una dinámica distinta a cuando el bombeo es variable. En este caso,

$$\Gamma = 1.0, \quad \gamma = 0.5, \quad \varepsilon = 2.0, \quad p = 1.5$$

Proyección 3D de las soluciones α variable

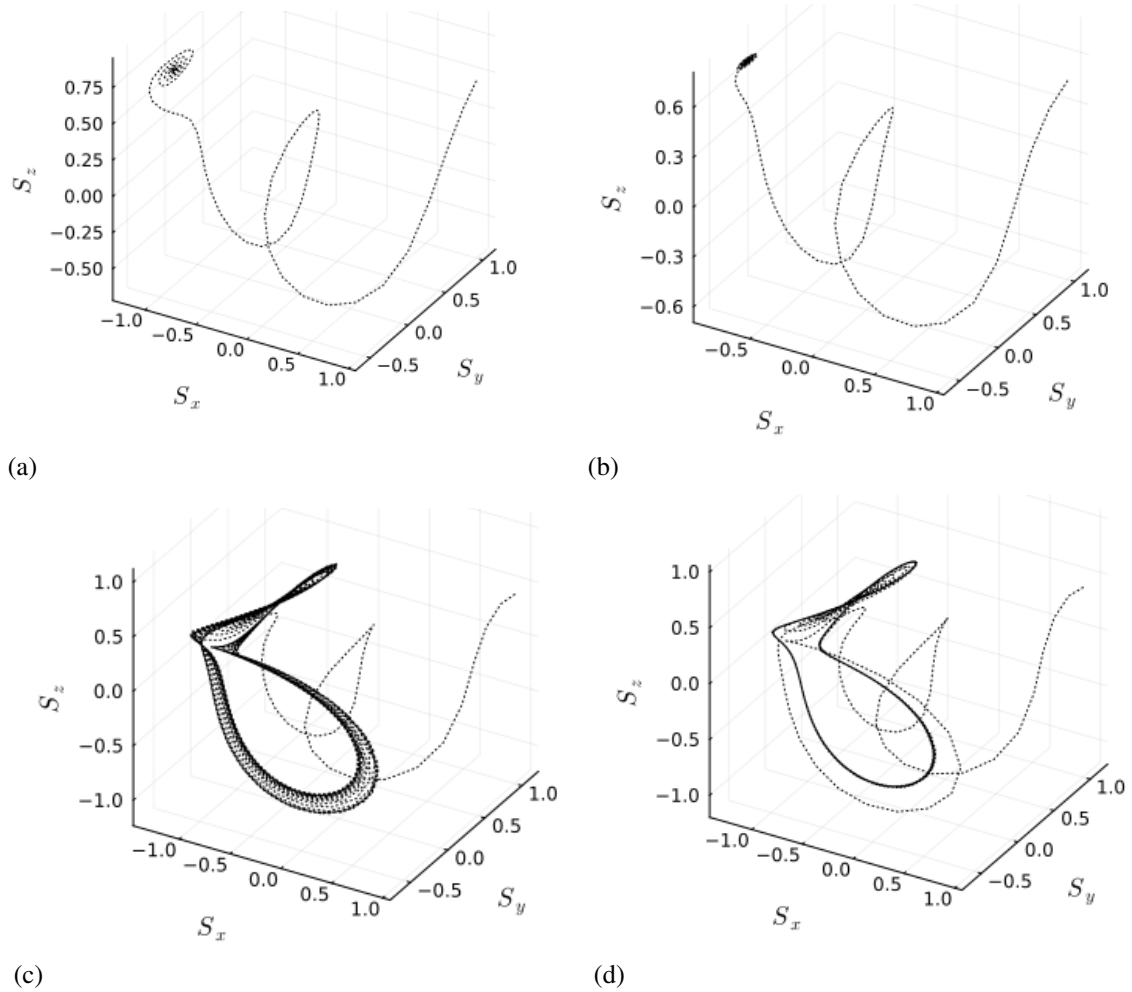


Figura 9: Se considerarán las condiciones iniciales $S_{x0} = 1.0$, $S_{y0} = 1.0$, $S_{z0} = 0.5$, con $\Gamma = 1.0$, $\gamma = 0.5$, $p = 1.5$, $\varepsilon = 2.0$ y se hizo variar la cte de interacción α .

En la figura 9 a) $\alpha = 2.0$, b) $\alpha = 2.5$, c) $\alpha = 3.5$, d) $\alpha = 4.0$. Se nota que la dinámica para valores pequeños de α mantiene un comportamiento similar a bombeos pequeños, en cambio cuando α aumenta su comportamiento es muy diferente.

Si definimos una nueva cantidad, que nos de una razón entre las densidades de las dos especies de fluidos en el condensado (S_z) y el promedio ocupaciones en el condensado (S). Esta cantidad nos indica la probabilidad de encontrar fluido en alguna de las dos especies conforme va evolucionando en el tiempo.

$$P_{S_z} = \frac{S_z}{S} = \frac{n_{+1} - n_{-1}}{n_{+1} + n_{-1}} = \frac{n_{+1}}{n_{+1} + n_{-1}} - \frac{n_{-1}}{n_{+1} + n_{-1}} = P(n_{+1}) - P(n_{-1}) \quad (4.1)$$

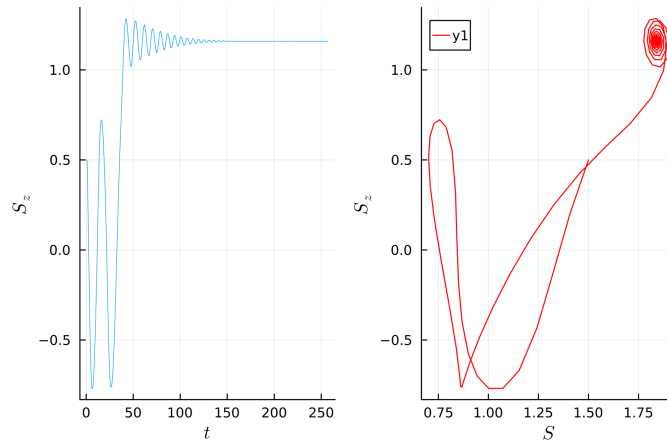


Figura 10: Para $p = 2.0$ $\Gamma = 1.0$ $\gamma = 0.5$ $\alpha = 1.5$ $\varepsilon = 2.0$

En la figura 10 se observa para bombeos inferiores a $p = 3.0$ que el promedio de ocupaciones inicialmente presentará oscilaciones despues de cierto tiempo las oscilaciones disminuyen, S_z tiende a estabilizarse a un valor fijo. El gráfico en rojo indicá que despues de cierto tiempo el sistema se estabiliza.

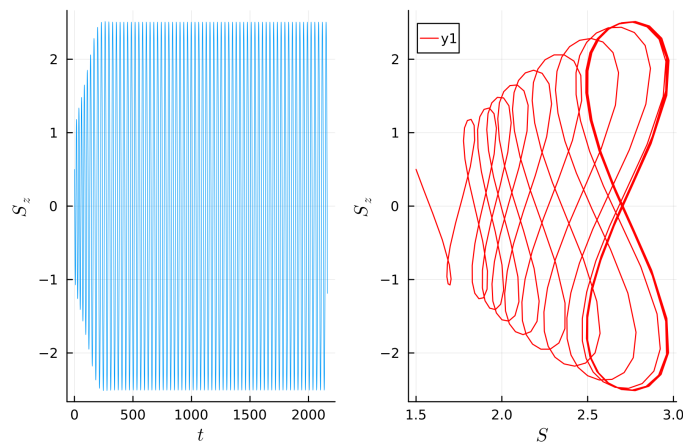


Figura 11: Para $p = 4.0$ $\Gamma = 1.0$ $\gamma = 0.5$ $\alpha = 1.5$ $\varepsilon = 2.0$

En la figura 11 Las cantidades de S_z y S oscilan. Esto se puede apreciar mejor en el diagrama con linea roja, las densidades de las dos especies oscilan en casi todo el momento, cuyo significado físico es que existen la misma cantidad de ambas especies. En

cambio el promedio de ocupaciones aumenta conforme las densidades de las especies se incrementan hasta el momento en donde se producen oscilaciones dando indicio a que el promedio de ocupaciones de las especies es el mismo. Se puede verificar que en el gráfico con bombeo $p = 2$ el sistema se estabiliza, en cambio con el bombeo de $p = 4$ gráfico 12 el sistema oscila en la cantidad de especies, sin priorizar a alguna de las dos especies como se observa en la figura 12.

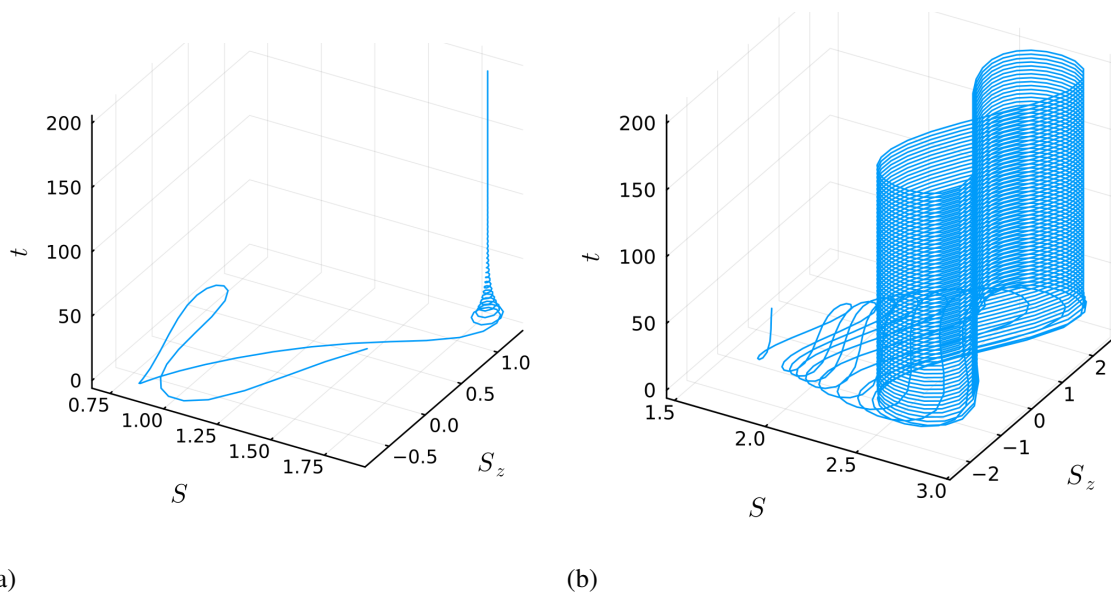


Figura 12: a) $p = 2.0$ b) $p = 4.0$

4.3. Exponentes de Lyapunov

Al calcular los LE se observa un resultado ya esperado para bombes pequeños, pues todos los exponentes encontrados son negativos.

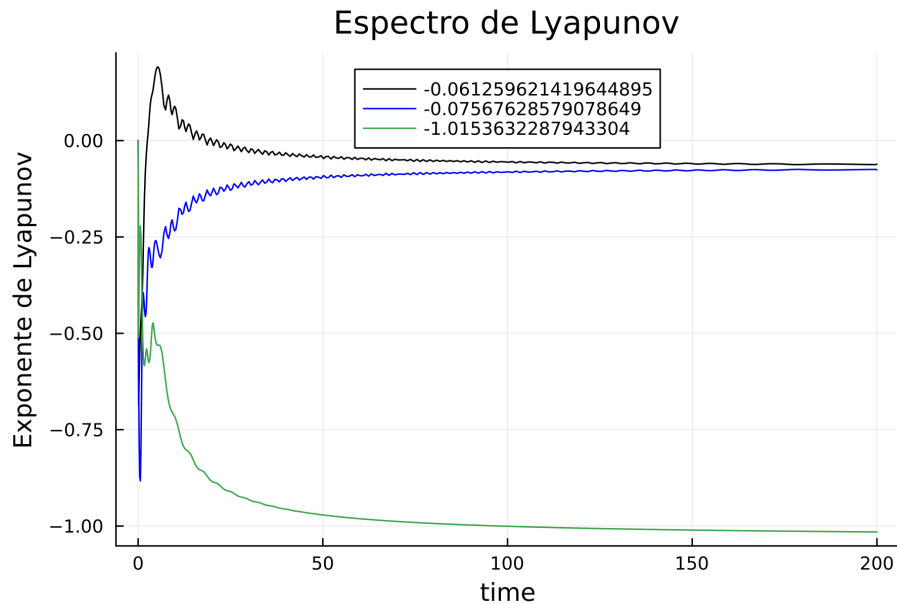


Figura 13: Espectro de Lyapunov y máximo exponente de Lyapunov del sistema diméro de polaritón a un bombeo de $p = 2.0$.

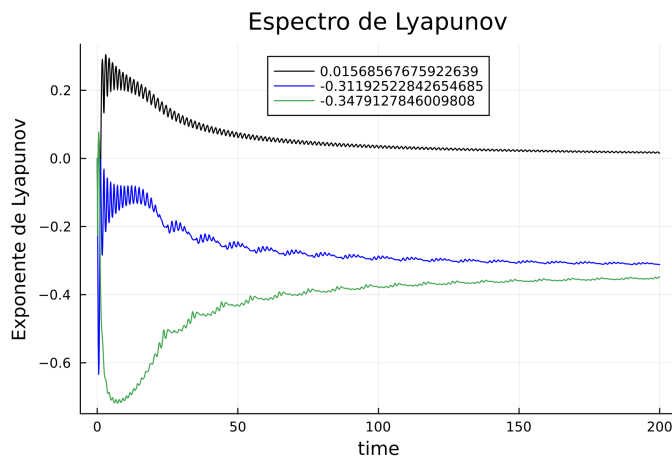


Figura 14: Espectro de Lyapunov y máximo exponente de Lyapunov del sistema diméro de polaritón a un bombeo $p = 4.0$.

De las figuras 13 y 14 se puede observar que el máximo exponente de Lyapunov para el bombeo de $p = 2$ tiene todos sus valores negativos (atractor de punto fijo). En cambio, cuando se considera el bombeo de $p = 4$ se nota que hay, al menos, un exponente positivo, lo que nos da indicio que se comporta como un atractor extraño como se ha indicado en el artículo en el que se baso este proyecto [1]. Un exponente de Lyapunov máximo estrictamente positivo se considera a menudo como una definición de caos determinista.

4.4. Esfera de Bloch

Con el fin de estudiar el comportamiento del sistema dímico de polaritón es conveniente emplear la esfera de Bloch por que, como vimos antes, la dinámica se puede escribir en el álgebra de pseudoespín. La esfera de Bloch es una representación geométrica del espacio de estado puro de un sistema mecánico cuántico de dos niveles (*qubit*). Para más detalles ver el apéndice D).

Para nuestro problema se hacen las siguientes suposiciones:

- El estado $|0\rangle$ representará n_{+1} con autovalor $+1/2$.
- El estado $|1\rangle$ representará n_{-1} con autovalor $-1/2$.

Para poder interpretar los resultados dinámicos en la esfera de Bloch, las soluciones del sistema de ecuaciones de movimiento se normalizan en cada tiempo t_k . En este apartado⁶ se escogen los bombeos $p = 2.0$ y $p = 4.0$, con las siguientes condiciones iniciales:

$$\boxed{S_x = 0, \quad S_y = 0, \quad S_z = \pm 1} \quad (4.2)$$

Se eligen así por que el hecho de conocer cual sería el estado de polarización con el que se generan los condensados y su evolución nos proporcionaría información del estado de polarización de la fuente que los genero con el estudio de las ramas en el espectro de emisión que se obtiene [31].

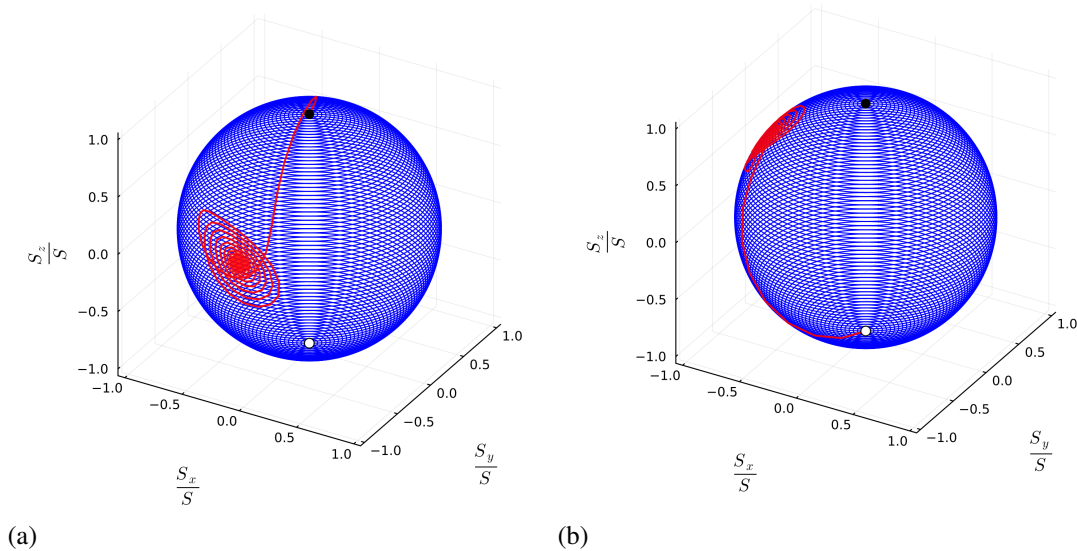


Figura 15: a) $S_{z0} = 1$, b) $S_{z0} = -1$. El punto en negro (en el polo norte) denota el estado $|0\rangle$ y el punto blanco (en el polo sur) denota el estado $|1\rangle$.

En la figura 15 los puntos en la superficie de la esfera corresponden a una superposición de los dos estados, de manera que para estados por encima del plano $z = 0$ el estado $|0\rangle \rightarrow (n_{+1})$ será más relevante y para los del hemisferio opuesto la relevancia será para

⁶Las demás variables se dejan igual que en la sección anterior.

el estados $|1\rangle \rightarrow (n_{-1})$. De tal forma que si se midiera sobre el eje z, el resultado más probable sería el estado más relevante.

Se hace el mismo análisis para el bombeo $p = 4.0$. Mostrado en la figura 16 se obtiene un comportamiento en el que parecería que hay una oscilación en los estados, de modo que, cuando se intentará medir la probabilidad de ocupación de alguna de las dos especies sería la misma.

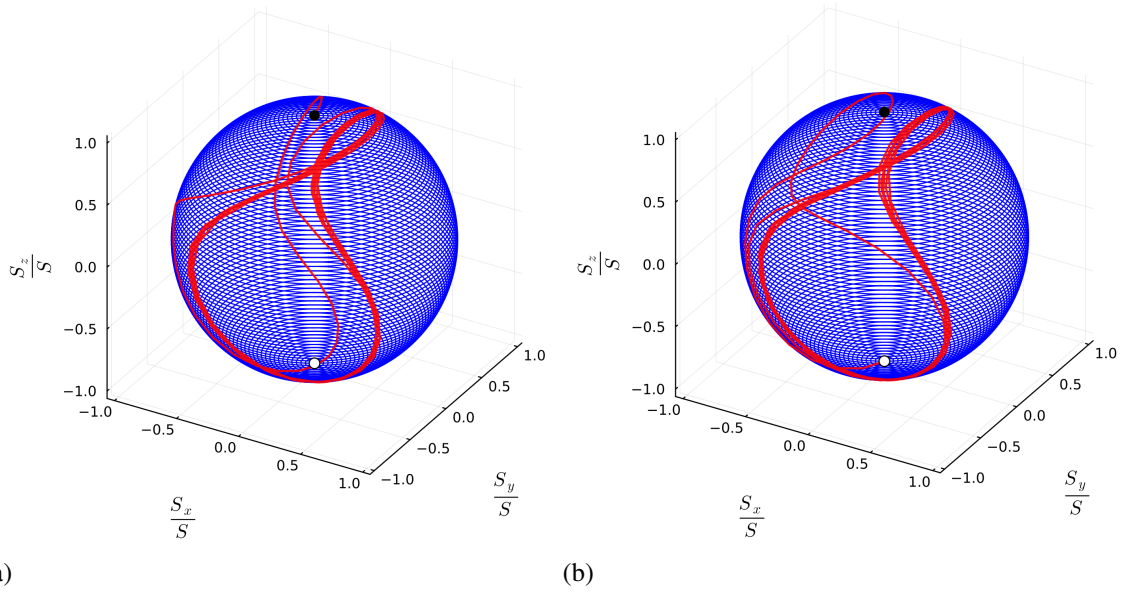


Figura 16: a) $S_{z0} = 1$, b) $S_{z0} = -1$. El sistema estudiado presenta trayectorias que en cierto tiempo se repite, de manera que no hay una convergencia en un estado de la superficie como sucede en la figura 15.

4.5. Puntos fijos

Para encontrar los puntos fijos del sistema de estudio fue necesario resolver: $\mathbf{V}(\mathbf{S})_x = 0$, $\mathbf{V}(\mathbf{S})_y = 0$ y $\mathbf{V}(\mathbf{S})_z = 0$, con $S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$. El resultado es el siguiente:

$$S_x \cdot \left(\frac{p \cdot (\sqrt{S_x^2 + S_z^2 + S_y^2 + 1})}{(\sqrt{S_x^2 + S_z^2 + S_y^2 + 1})^2 - S_z^2} - \Gamma \right) - \gamma \sqrt{S_x^2 + S_z^2 + S_y^2} - \alpha S_y S_z = 0 \quad (4.3)$$

$$S_y \cdot \left(\frac{p \cdot (\sqrt{S_x^2 + S_z^2 + S_y^2 + 1})}{(\sqrt{S_x^2 + S_z^2 + S_y^2 + 1})^2 - S_z^2} - \Gamma \right) + \varepsilon S_z + \alpha S_z S_x = 0 \quad (4.4)$$

$$S_z \cdot \left(\frac{p \cdot (\sqrt{S_x^2 + S_z^2 + S_y^2 + 1})}{(\sqrt{S_x^2 + S_z^2 + S_y^2 + 1})^2 - S_z^2} - \Gamma \right) - \varepsilon S_y - \left(\frac{S_z p \sqrt{S_x^2 + S_z^2 + S_y^2}}{(\sqrt{S_x^2 + S_z^2 + S_y^2 + 1})^2 - S_z^2} \right) = 0 \quad (4.5)$$

Por observación, si $S_y = S_z = 0$ y $S_x = -S$, las ecuaciones se satisfacen:

$$\begin{aligned} \frac{p}{1+S}S_x - \Gamma S_x - \gamma S &= 0 \longrightarrow -\frac{Sp}{1+S} + \Gamma S - \gamma S = 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -\frac{Sp}{1+S} + \Gamma S - \gamma S &= \left(1 - \frac{1}{S+1}\right)p + \Gamma S - \gamma S = 0 \\ p + \Gamma S - \gamma S &= \frac{p}{1+S} \\ \frac{(1+S)(p + S(\Gamma - \gamma))}{p} &= 1 \end{aligned}$$

Por lo que debe ser $S = 0$ o $S = \frac{-\Gamma + \gamma - p}{\Gamma - \gamma}$. Uno corresponde al caso trivial, de modo que los puntos fijos que se obtienen para este estado son:

$$\begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\Gamma - \gamma + p}{\Gamma - \gamma} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La referencia que estudiamos nos indica que tal punto pertenece al estado antisimétrico (el que se expone arriba). La obtención de los otros puntos fijos del sistema no se pudieron obtener porque no tienen una formulación analítica. Pero se estudiarán numéricamente en un trabajo futuro, siguiendo la guía de la Ref. [1].

5. Conclusión

Se establecieron las herramientas para el estudio de la dinámica de un fluido interactuante de excitones-polaritones, reproduciendo algunos de los resultados de la Ref. [1]. Además, se estudió con más profundidad la dinámica desde la perspectiva de la esfera de Bloch y se calcularon los espectros de Lyapunov, incluyendo, por supuesto, el máximo exponente de Lyapunov. Con esto se verifica la presencia del caos conforme se aumenta el bombeo. Con el termino de este proyecto terminal se pueden abordar nuevos temas de interés a futuro ya sean de carácter teórico o experimental. Desde el punto de vista teórico con el estudio del control de caos en estos sistemas con el análisis de las órbitas periódicas inestables y control cuántico.

A. Derivación GPE

Los calculos se basan en el servicio social de la Ref. [32], y en la Ref. [8]. El hamiltoniano que describe el sistema viene dado por

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m} + V_{ext}(r_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(|r_i - r_j|), \quad (\text{A.1})$$

donde se manifiestan la energía cinética, potencial externo y la interacción entre las N partículas. El estado base corresponde al mínimo de energía. Es conveniente utilizar los potenciales termodinámicos (para conocer el estado de equilibrio). Se minimizará la energía libre de Helmholtz dada por:

$$F = E - \mu N. \quad (\text{A.2})$$

Donde E es la energía y μ el potencial químico. Dado el Hamiltoniano \hat{H} y la función de onda ψ , la energía se obtiene como sigue:

$$E = \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \quad (\text{A.3})$$

En el condensado tenemos N partículas y se pueden asociar la función de onda ψ_i para cada una de las partículas. Para cada partícula, todas las demás tienen el mismo estado como todas están en el mismo estado independiente $|\psi\rangle$, de manera que para minimizar la energía sobre el espacio de funciones⁷ $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes \dots \otimes |\psi\rangle$, donde \otimes representa el tensor producto y $|\Psi\rangle$ es el tensor producto de las funciones de onda para las N -partículas, se sigue la normalización $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$. El problema queda reducido a minimizar $F(\Psi) = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle - \mu \langle \Psi | \Psi \rangle$. Para cada término en el hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \sum_{i=1}^N \frac{p^2}{2m} | \Psi \rangle &= \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m} \int \nabla \psi^*(r_i) \nabla \psi_i dr_i \\ &= N \frac{\hbar^2}{2m} \int |\nabla \psi(r)|^2 dr \\ &= -N \frac{\hbar^2}{2m} \int \psi^*(r) \nabla^2 \psi(r) dr \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Se uso la identidad de Green para obtener el resultado de la última línea de la Ec.A.4. Para el término del potencial:

$$\langle \Psi | \sum_{i=1}^N V_{ext}(r_i) | \Psi \rangle = N \int \psi^*(r) V_{ext} \psi(r) dr \quad (\text{A.5})$$

⁷Visto de otra forma:

$$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_N) = \prod_{i=1}^N \psi(r_i), \quad \int dr |\psi(r)|^2 = 1$$

Para el término de interacción:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(|r_i - r_j|) | \Psi \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int dr_i \int \psi^*(r_i) \psi^*(r_j) V(|r_i - r_j|) \psi(r_i) \psi(r_j) dr_j \\ &= \frac{N(N-1)}{2} \int dr \int \psi^*(r) \psi^*(r') V(|r - r'|) \psi(r) \psi(r') dr' \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

y para el último en la expresión para $F(\Psi)$:

$$\mu \langle \Psi | \Psi \rangle = \mu \left(\int \psi^*(r) \psi(r) dr \right)^N \quad (\text{A.7})$$

Ahora se considera una pequeña variación en la función de onda, tomando ψ y ψ^* como variables independientes. De manera que se puedan obtener las derivadas funcionales de Ec. A.4 y de Ec. A.5 . En el caso del término de interacción (Ec. A.6) r permuta:

$$\frac{\delta}{\delta \psi^*} \langle \Psi | \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(|r_i - r_j|) | \Psi \rangle = N(N-1) \int \delta \psi^*(r) \left(\int |\psi(r)|^2 V(|r - r'|) dr' \right) \psi(r) dr \quad (\text{A.8})$$

De forma similar, para el potencial químico queda:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \langle \Psi | \Psi \rangle}{\delta \psi^*} &= N \left(\int \psi^*(r) \psi(r) dr \right)^{N-1} \int \delta \psi^*(r) \psi(r) dr \\ &= N \int \delta \psi^*(r) \psi(r) dr \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Obtenemos así:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta \psi^*} &= N \int \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r) + V_{ext}(r) \psi(r) \right] \\ &+ N \int \left[(N-1) \left(\int |\psi(r)|^2 V(r-r') dr' \right) \psi(r) - \mu \psi(r) \right] \delta \psi^*(r) dr = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Usando la aproximación $N-1 \simeq N$, el potencial de interacción $V(|r-r'|) = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a \delta(r-r')$, donde a es la longitud de dispersión de la onda. Finalmente se obtiene la GPE independiente del tiempo ⁸.

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r) + V_{ext}(r) \psi(r) + N \frac{4\pi\hbar^2}{m} a |\psi(r)|^2 \psi(r) = \mu \psi(r)} \quad (\text{A.11})$$

La longitud a mide la intensidad de las interacciones entre los bosones. Su signo indica el comportamiento de las interacciones, atractivos ($a < 0$) o repulsivos ($a > 0$).

⁸Para las partículas que no interactúan, el potencial químico es igual a la energía por partícula, en cambio para partículas interactuantes no lo es.

B. Componentes de S

Se determinan las componentes del vector pseudo spín **S**.

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \Psi^\dagger \bar{\sigma} \Psi \quad (\text{B.1})$$

Donde $\Psi^\dagger = [\psi_{+1}^\dagger \psi_{-1}^\dagger]$, es el conjugado de $\Psi = [\psi_{+1} \psi_{-1}]^T$, $\psi_{\pm 1} = \sqrt{n_{\pm 1}} e^{i(\Phi \mp \phi)}$.
 $\bar{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ con $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ las matrices Pauli.

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{2} [\psi_{+1}^\dagger \quad \psi_{-1}^\dagger] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [\psi_{+1} \quad \psi_{-1}]^T = \frac{1}{2} [\psi_{-1}^\dagger \quad \psi_{+1}^\dagger] \begin{bmatrix} \psi_{+1} \\ \psi_{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [\psi_{-1}^\dagger \psi_{+1} + \psi_{+1}^\dagger \psi_{-1}] \\ S_x &= \frac{\sqrt{n_{-1}n_{+1}}e^{-2\phi i}}{2} + \frac{\sqrt{n_{+1}n_{-1}}e^{+2\phi i}}{2} = \sqrt{n_{+1}n_{-1}} \left(\frac{e^{2\phi i} + e^{-2\phi i}}{2} \right) = \sqrt{n_{+1}n_{-1}} \cos(2\phi) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} S_y &= \frac{1}{2} [\psi_{+1}^\dagger \quad \psi_{-1}^\dagger] \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} [\psi_{+1} \quad \psi_{-1}]^T = \frac{i}{2} [\psi_{-1}^\dagger \quad -\psi_{+1}^\dagger] \begin{bmatrix} \psi_{+1} \\ \psi_{-1} \end{bmatrix} = \frac{i}{2} [\psi_{-1}^\dagger \psi_{+1} - \psi_{+1}^\dagger \psi_{-1}] \\ S_y &= i \frac{\sqrt{n_{-1}n_{+1}}e^{-2\phi i}}{2} - i \frac{\sqrt{n_{+1}n_{-1}}e^{+2\phi i}}{2} = \sqrt{n_{+1}n_{-1}} \left(\frac{e^{2\phi i} - e^{-2\phi i}}{2i} \right) = \sqrt{n_{+1}n_{-1}} \sin(2\phi) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} S_z &= \frac{1}{2} [\psi_{+1}^\dagger \quad \psi_{-1}^\dagger] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} [\psi_{+1} \quad \psi_{-1}]^T = \frac{1}{2} [\psi_{+1}^\dagger \quad -\psi_{-1}^\dagger] \begin{bmatrix} \psi_{+1} \\ \psi_{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [\psi_{+1}^\dagger \psi_{+1} - \psi_{-1}^\dagger \psi_{-1}] \\ S_z &= \frac{n_{+1}e^0}{2} - \frac{n_{-1}e^0}{2} = \frac{n_{+1} - n_{-1}}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

La ecuación B.5 nos proporciona información sobre las densidades de las dos especies de fluidos en el condensado. Ahora se determina la magnitud de **S**

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} = \sqrt{n_{+1}n_{-1}(\cos^2(2\phi) + \sin^2(2\phi)) + \frac{1}{4}(n_{+1}^2 - 2n_{+1}n_{-1} + n_{-1}^2)} \\ \mathbf{S} &= \frac{(n_{+1} + n_{-1})}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

La ecuación de **S**(B.6) se puede interpretar como el promedio de las ocupaciones en el condensado.

B.1. Derivadas de las componentes de S

Derivando la Ec. B.3

$$\dot{S}_x = \frac{1}{2} [\dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1} + \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} + \dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{-1} + \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1}] \quad (\text{B.7})$$

Donde ya conocemos $\dot{\psi}_{\pm 1}$ (ecuación 2.7)

$$\dot{\psi}_{\pm 1} = \frac{d\psi_{\pm 1}}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{\pm 1}} - \Gamma \right] \psi_{\pm 1} - \frac{1}{2}(\gamma - i\varepsilon)\psi_{\mp 1} - \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{\pm 1}|^2 + \alpha_2|\psi_{\mp 1}|^2]\psi_{\pm 1}$$

Cuyo conjugado es

$$\dot{\psi}_{\pm 1}^\dagger = \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{\pm 1}} - \Gamma \right] \psi_{\pm 1}^\dagger - \frac{1}{2}(\gamma + i\varepsilon)\psi_{\mp 1}^\dagger + \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{\pm 1}|^2 + \alpha_2|\psi_{\mp 1}|^2]\psi_{\pm 1}^\dagger \quad (\text{B.8})$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.7) y (B.8) en la ecuación (B.7) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{S}_x &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right] \psi_{-1}^\dagger \psi_{+1} - \frac{1}{2}(\gamma + i\varepsilon)\psi_{+1}^\dagger \psi_{+1} + \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{-1}|^2 + \alpha_2|\psi_{+1}|^2]\psi_{-1}^\dagger \psi_{+1} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right] \psi_{-1}^\dagger \psi_{+1} - \frac{1}{2}(\gamma - i\varepsilon)\psi_{-1}^\dagger \psi_{-1} - \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{+1}|^2 + \alpha_2|\psi_{-1}|^2]\psi_{-1}^\dagger \psi_{+1} \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right] \psi_{+1}^\dagger \psi_{-1} - \frac{1}{2}(\gamma + i\varepsilon)\psi_{-1}^\dagger \psi_{-1} + \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{+1}|^2 + \alpha_2|\psi_{-1}|^2]\psi_{+1}^\dagger \psi_{-1} \\ &+ \left. \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right] \psi_{+1}^\dagger \psi_{-1} - \frac{1}{2}(\gamma - i\varepsilon)\psi_{+1}^\dagger \psi_{+1} - \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{-1}|^2 + \alpha_2|\psi_{+1}|^2]\psi_{+1}^\dagger \psi_{-1} \right] \\ \dot{S}_x &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{+1}} + \frac{p}{1+n_{-1}} - 2\Gamma \right] \psi_{+1}^\dagger \psi_{-1} - \gamma(|\psi_{+1}|^2 + |\psi_{-1}|^2) \right. \\ &+ \frac{i}{2}[\alpha_1(|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2) + \alpha_2(|\psi_{-1}|^2 - |\psi_{+1}|^2)]\psi_{+1}^\dagger \psi_{-1} \\ &- \frac{i}{2}[\alpha_1(|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2) + \alpha_2(|\psi_{-1}|^2 - |\psi_{+1}|^2)]\psi_{-1}^\dagger \psi_{+1} \\ &+ \left. \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{+1}} + \frac{p}{1+n_{-1}} - 2\Gamma \right] \psi_{-1}^\dagger \psi_{+1} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Dado que $\psi_{\pm 1}^\dagger \psi_{\mp 1} = \sqrt{n_{+1}n_{-1}}e^{\pm 2\phi i}$ al sustituir y simplificar:

$$\begin{aligned} \dot{S}_x &= \frac{1}{2} \left(p \frac{1 + \frac{1}{2}(n_{+1} + n_{-1})}{(1+n_{+1})(1+n_{-1})} - \Gamma \right) (\psi_{+1}^\dagger \psi_{-1} + \psi_{-1}^\dagger \psi_{+1}) - \frac{1}{2}\gamma(|\psi_{+1}|^2 + |\psi_{-1}|^2) \\ &- \frac{1}{2}[\alpha_1(|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2) - \alpha_2(|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2)] \frac{e^{2\phi i} - e^{-2\phi i}}{2i} \sqrt{n_{+1}n_{-1}} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Recordando que las expresiones para S_x , S_y y S_z Ecs.(B.3, B.4, B.5) y que las ocupaciones del condensado son $n_{\pm 1} = |\psi_{\pm 1}|^2$, \dot{S}_x se reescribe como:

$$\dot{S}_x = \left[\frac{(1+S)p}{(1+S)^2 - S_z^2} - \Gamma \right] S_x - \gamma S - (\alpha_1 - \alpha_2)S_z S_y \quad (\text{B.11})$$

Usamos el siguiente cambio en las variables.

$$u(\mathbf{S}) = \frac{(1+S)p}{(1+S)^2 - S_z^2}, \quad \alpha = (\alpha_1 - \alpha_2) \quad (\text{B.12})$$

Finalmente \dot{S}_x queda:

$$\dot{S}_x = [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_x - \gamma S - \alpha S_z S_y \quad (\text{B.13})$$

Con la evolución temporal de S_y se procede de la misma manera. Derivando la ecuación B.4

$$\dot{S}_y = \frac{1}{2i}[\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} + \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1} - \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1}] \quad (\text{B.14})$$

Sustituyendo las expresiones Ec.2.7 y Ec.B.8 en Ec.B.14.

$$\begin{aligned} \dot{S}_y &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right] \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \frac{1}{2}(\gamma + i\varepsilon)\dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{-1} + \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{+1}|^2 + \alpha_2|\psi_{-1}|^2]\dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{-1} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right] \dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{-1} - \frac{1}{2}(\gamma - i\varepsilon)\dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{+1} - \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{-1}|^2 + \alpha_2|\psi_{+1}|^2]\dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{-1} \\ &- \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right] \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1} + \frac{1}{2}(\gamma + i\varepsilon)\dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{+1} - \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{-1}|^2 + \alpha_2|\psi_{+1}|^2]\dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1} \\ &- \left. \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right] \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1} + \frac{1}{2}(\gamma - i\varepsilon)\dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{-1} + \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{+1}|^2 + \alpha_2|\psi_{-1}|^2]\dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1} \right] \\ \dot{S}_y &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{+1}} + \frac{p}{1+n_{-1}} - 2\Gamma \right] \dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{-1} + i\varepsilon(|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2) \right. \\ &+ \frac{i}{2}[\alpha_1(|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2) + \alpha_2(|\psi_{-1}|^2 - |\psi_{+1}|^2)]\dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{-1} \\ &+ \frac{i}{2}[\alpha_1(|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2) + \alpha_2(|\psi_{-1}|^2 - |\psi_{+1}|^2)]\dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1} \\ &- \left. \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{+1}} + \frac{p}{1+n_{-1}} - 2\Gamma \right] \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1} \right] \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

Dado que $\psi_{\pm 1}^\dagger \psi_{\mp 1} = \sqrt{n_{+1}n_{-1}}e^{\pm 2\phi i}$ al sustituir y simplificar:

$$\begin{aligned} \dot{S}_y &= \frac{1}{2i} \left(p \frac{1 + \frac{1}{2}(n_{+1} + n_{-1})}{(1+n_{+1})(1+n_{-1})} - \Gamma \right) (\dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{-1} - \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1}) - \frac{\varepsilon}{2}(|\psi_{+1}|^2 + |\psi_{-1}|^2) \\ &+ \frac{1}{2}[\alpha_1(|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2) - \alpha_2(|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2)] \frac{e^{2\phi i} + e^{-2\phi i}}{2} \sqrt{n_{+1}n_{-1}} \quad (\text{B.16}) \end{aligned}$$

Recordando que las expresiones para S_x , S_y y S_z (B.3, B.4, B.5, respectivamente) y que las ocupaciones del condensado son $n_{\pm 1} = |\psi_{\pm 1}|^2$, se reescribe \dot{S}_y como

$$\dot{S}_y = \left[\frac{(1+S)p}{(1+S)^2 - S_z^2} - \Gamma \right] S_y + \varepsilon S_z + (\alpha_1 - \alpha_2)S_z S_x \quad (\text{B.17})$$

Considerando el cambio de variable en Ec.B.12

$$\dot{S}_y = [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_y + \varepsilon S_z + \alpha S_z S_x \quad (\text{B.18})$$

Derivando la ecuación B.5

$$\dot{S}_z = \frac{1}{2}[\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} + \dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{+1} - \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{-1}] \quad (\text{B.19})$$

Reemplazando las ecuaciones 2.7 y B.8 en B.19.

$$\begin{aligned} \dot{S}_z &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right] \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} - \frac{1}{2} (\gamma + i\varepsilon) \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} + \frac{i}{2} [\alpha_1 |\psi_{+1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{-1}|^2] \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right] \dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{+1} - \frac{1}{2} (\gamma - i\varepsilon) \dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{-1} - \frac{i}{2} [\alpha_1 |\psi_{+1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{-1}|^2] \dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{+1} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right] \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} + \frac{1}{2} (\gamma + i\varepsilon) \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \frac{i}{2} [\alpha_1 |\psi_{-1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{+1}|^2] \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right] \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{-1} + \frac{1}{2} (\gamma - i\varepsilon) \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1} + \frac{i}{2} [\alpha_1 |\psi_{-1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{+1}|^2] \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{-1} \right] \\ \dot{S}_z &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right) |\dot{\psi}_{+1}|^2 - \left(\frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right) |\dot{\psi}_{-1}|^2 - i\varepsilon \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1} + i\varepsilon \dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{-1} \right] \\ \dot{S}_z &= \frac{p}{2} \left\{ \frac{1}{1+n_{+1}} |\dot{\psi}_{+1}|^2 - \frac{1}{1+n_{-1}} |\dot{\psi}_{-1}|^2 \right\} - \frac{\Gamma}{2} (|\dot{\psi}_{+1}|^2 - |\dot{\psi}_{-1}|^2) - \frac{\varepsilon}{2i} (\dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{-1} - \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1}) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\dot{S}_z = \frac{p}{2} \left\{ \frac{|\dot{\psi}_{+1}|^2 (1+n_{-1}) - |\dot{\psi}_{-1}|^2 (1+n_{+1})}{(1+n_{+1})(1+n_{-1})} \right\} - \frac{\Gamma}{2} (|\dot{\psi}_{+1}|^2 - |\dot{\psi}_{-1}|^2) - \frac{\varepsilon}{2i} (\dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{-1} - \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1}) \quad (\text{B.21})$$

Dado que $n_{\pm 1} = |\psi_{\pm 1}|^2$, se identifican S_z (Ec. B.5) y S_y (Ec. B.4), al sustituir:

$$\begin{aligned} \dot{S}_z &= \frac{S_z p}{(1+S)^2 - S_z^2} - \Gamma S_z - \varepsilon S_y \\ &= \frac{(1+S) S_z p - S S_z p}{(1+S)^2 - S_z^2} - \Gamma S_z - \frac{S S_z p}{(1+S)^2 - S_z^2} - \varepsilon S_y \\ &= \left[\frac{(1+S)p}{(1+S)^2 - S_z^2} - \Gamma \right] S_z - \frac{S_z}{(1+S)^2 - S_z^2} S - \varepsilon S_y \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Donde se identifica a Ec.B.12, y se hace

$$v(\mathbf{S}) = -\frac{S_z p}{(1+S)^2 - S_z^2} \quad (\text{B.23})$$

De tal manera que la derivada temporal de S_z queda:

$$\dot{S}_z = [u(\mathbf{S}) - \Gamma] S_z + v(\mathbf{S}) S - \varepsilon S_y \quad (\text{B.24})$$

Por último se determina la derivada temporal de S (Ec. B.6).

$$S = \frac{n_{+1} + n_{-1}}{2} = \frac{|\psi_{+1}|^2 + |\psi_{-1}|^2}{2} = \frac{\psi_{+1}^\dagger \psi_{+1} + \psi_{-1}^\dagger \psi_{-1}}{2} \quad (\text{B.25})$$

$$\dot{S} = \frac{\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} + \dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{+1} + \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} + \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{-1}}{2} \quad (\text{B.26})$$

Reemplazando las ecuaciones 2.7 y B.8 en B.26.

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right] \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} - \frac{1}{2} (\gamma + i\varepsilon) \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} + \frac{i}{2} [\alpha_1 |\psi_{+1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{-1}|^2] \dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{+1} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right] \dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{+1} - \frac{1}{2} (\gamma - i\varepsilon) \dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{-1} - \frac{i}{2} [\alpha_1 |\psi_{+1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{-1}|^2] \dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{+1} \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right] \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \frac{1}{2} (\gamma + i\varepsilon) \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} + \frac{i}{2} [\alpha_1 |\psi_{-1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{+1}|^2] \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{-1} \\ &+ \left. \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right] \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{-1} - \frac{1}{2} (\gamma - i\varepsilon) \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1} - \frac{i}{2} [\alpha_1 |\psi_{-1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{+1}|^2] \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{-1} \right] \\ \dot{S} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right) |\dot{\psi}_{+1}|^2 + \left(\frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right) |\dot{\psi}_{-1}|^2 - \gamma \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1} - \gamma \dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{-1} \right] \\ \dot{S} &= \frac{p}{2} \left\{ \frac{1}{1+n_{+1}} |\dot{\psi}_{+1}|^2 + \frac{1}{1+n_{-1}} |\dot{\psi}_{-1}|^2 \right\} - \frac{\Gamma}{2} (|\dot{\psi}_{+1}|^2 + |\dot{\psi}_{-1}|^2) - \frac{\gamma}{2} (\dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{-1} + \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1}) \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Se identifica S_x (B.3) y S (B.25)

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \frac{p}{2} \left\{ \frac{|\dot{\psi}_{+1}|^2 (1+n_{-1}) + |\dot{\psi}_{-1}|^2 (1+n_{+1})}{(1+n_{+1})(1+n_{-1})} \right\} - \Gamma S - \gamma S_x \\ &= \frac{p}{2} \left\{ \frac{|\dot{\psi}_{+1}|^2 + |\dot{\psi}_{-1}|^2 + |\dot{\psi}_{-1}|^2 (n_{+1}) + |\dot{\psi}_{+1}|^2 (n_{-1})}{(1+n_{+1})(1+n_{-1})} \right\} - \Gamma S - \gamma S_x \\ &= p \frac{S + \frac{1}{2} (|\dot{\psi}_{+1}|^2 |\dot{\psi}_{-1}|^2 + |\dot{\psi}_{-1}|^2 |\dot{\psi}_{+1}|^2)}{(1+S)^2 - S_z^2} - \Gamma S - \gamma S_x \\ &= \frac{(1+S)S - S_z S_z}{(1+S)^2 - S_z^2} - \Gamma S - \gamma S_x = p \frac{(1+S)S}{(1+S^2) - S_z^2} - p S_z \frac{S_z}{(1+S^2) - S_z^2} - \Gamma S - \gamma S_x \\ &= \left[\frac{(1+S)p}{(1+S)^2 - S_z^2} - \Gamma \right] S - \left[\frac{S_z p}{(1+S)^2 - S_z^2} \right] S_z - \gamma S_x \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

En la Ec. B.28 se notan $u(\mathbf{S})$ (Ec.B.12) y $v(\mathbf{S})$ (Ec.B.23), entonces:

$$\dot{S} = [u(\mathbf{S}) - \Gamma] S - v(\mathbf{S}) S_z - \gamma S_x \quad (\text{B.29})$$

C. Espectro de Lyapunov

Se basa en la Ref. [33]

Considerando un sistema dinámico descrito por sus ecuaciones de movimiento

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (\text{C.1})$$

con condición inicial $x(t_0) = x_0$, cuyas ecuaciones variacionales de primer orden asociadas al sistema son

$$\dot{\xi} = (Df)(x(t)) \cdot \xi \quad (\text{C.2})$$

Donde $(Df)(x(t))$ es el Jacobiano de la función f respecto de la variable x , evaluada en el tiempo t , para una solución $x(t)$ (a la ecuación de movimiento) dada. La variable ξ denota a una matriz cuya condición inicial es $\xi(t_0) = 1_n$ (la matriz de identidad $n \times n$), n representa el número de grados de libertad o el número de variables dependientes x .

Para el cálculo del espectro de Lyapunov, durante la integración numérica de las ecuaciones de movimiento y las ecuaciones variacionales simultáneamente en un intervalo fijo de tiempo $t_k = k \cdot \Delta t$ (con $k = 1, 2, 3, \dots$) se realizó una descomposición en QR⁹ sobre $\xi(t_k)$ (la solución a las ecuaciones variacionales), $\xi(t) \rightarrow \xi(t) = Q_k \cdot R_k$, donde Q_k es una matriz ortogonal de dimensión $n \times n$ y R_k es una matriz triangular superior de dimensión $n \times n$ con elementos positivos en la diagonal.

Los elementos en la diagonal de $R_{ii,k}$ son los factores a partir de los cuales se calcula el i -ésimo exponente de Lyapunov en el tiempo t_k .

$$\lambda_l = \sum_{m=1}^k \frac{\log(R_{ll,m})}{t_k} = \sum_{m=1}^k \frac{\log(R_{ll,m})}{k \cdot \Delta t} \quad (\text{C.3})$$

A su vez, la matriz Q se sustituye en $\xi(t_k)$ como la nueva condición inicial. Las ecuaciones de movimiento junto con las ecuaciones variacionales son integradas hasta el tiempo t_{k+1} con el método de Taylor. Cada paso de tiempo de la integración se determina usando las derivadas normalizadas de x y la tolerancia ϵ_{tol} el proceso se repite hasta que t_{max} se alcanza.

⁹Es una descomposición de una matriz A en un producto $A = QR$ de una matriz ortogonal Q y una matriz triangular superior R . [34]

D. Computación Cuántica

D.1. Qubit

En computación clásica, el elemento fundamental se conoce con bit, que es la unidad mínima de información (el estado de un bit está definido porque puede tomar dos valores 0 o 1). En computación cuántica existe una unidad similar que se le denomina bit cuántico o **qubit** [35]. Un qubit puede ser cualquier sistema de dos niveles que reside en un espacio de Hilbert de dimensión dos.

Los dos estados posibles son $|0\rangle$ y $|1\rangle$ como en el caso clásico. Para que los dos estados formen un base de \mathbb{C}^2 se escogen dos vectores ortonormales:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

Los fenómenos cuánticos del qubit aparecen debido a que $|0\rangle$ y $|1\rangle$ no son los únicos estados posibles, un qubit puede estar en todo el rango del continuo de estados entre $|0\rangle$ y $|1\rangle$ (una superposición de estados)

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (\text{D.2})$$

donde α y β son números complejos denominados amplitudes. A su vez, $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$ determinan la probabilidad de que al medir el qubit se encuentre en el estado $|0\rangle$ o $|1\rangle$ respectivamente, cuya suma de probabilidades es igual a 1.

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (\text{D.3})$$

D.2. Esfera de Bloch

El conjunto de todos los estados posibles de un qubit corresponde a la superficie de una esfera de radio unidad en el espacio \mathbb{R}^3 . Esta esfera se conoce como **esfera de bloch**, en honor al físico Felix Bloch [36], y facilita la visualización de los estados de un qubit.

Partiendo de que α y β son números complejos, se pueden reescribir con la su notación de Euler $\alpha = r_\alpha e^{i\phi_\alpha}$, $\beta = r_\beta e^{i\phi_\beta}$ de modo que la Ec. D.2 se puede reescribir como

$$|\psi\rangle = r_\alpha e^{i\phi_\alpha} |0\rangle + r_\beta e^{i\phi_\beta} |1\rangle \quad (\text{D.4})$$

a efectos observables, las probabilidades de medir un cierto estado son $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$, $|\psi\rangle$ se puede multiplicar por un factor cualquiera $e^{i\gamma}$, ya que estas probabilidades no van a cambiar¹⁰.

Multiplicar a D.4 por un factor $e^{-i\phi_\alpha}$ no afecta el resultado:

$$|\psi\rangle = r_\alpha |0\rangle + r_\beta e^{i\phi} |1\rangle \quad (\text{D.5})$$

¹⁰ $|\alpha e^{i\gamma}|^2 = (\alpha e^{i\gamma})^* (\alpha e^{i\gamma}) = |\alpha|^2$

Donde $\varphi = \varphi_\beta - \varphi_\alpha$ expresando en coordenadas cartesianas:

$$|\psi\rangle = r_\alpha |0\rangle + (x + iy) |1\rangle \quad (\text{D.6})$$

Dado que se satisface la condición de normalización $\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$

$$r_\alpha^2 + |x + iy|^2 = 1 \longrightarrow r_\alpha^2 + x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{D.7})$$

D.7 representa la ecuación de una esfera de radio unidad en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 , lo que sugiere una representación en coordenadas esféricas¹¹.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos \theta |0\rangle + [\sin \theta \cos \varphi + i \sin \theta \sin \varphi] |1\rangle \\ &= \cos \theta |0\rangle + \sin \theta e^{i\varphi} |1\rangle \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Se observa que para $\theta = 0$ el estado es el $|0\rangle$, y para $\theta = \pi/2$ es $e^{i\varphi} |1\rangle$, lo que hace posible solo variar $0 \leq \theta \leq \pi/2$ para obtener todos los estados posibles de la superposición.

Si consideramos un estado $|\psi'\rangle$ en un lado opuesto de la esfera con coordenadas $(1, \pi - \theta, \varphi + \pi)$ entonces $|\psi'\rangle = \cos(\pi - \theta) |0\rangle + \sin(\pi - \theta) e^{i(\varphi + \pi)} |1\rangle = -|\psi'\rangle$

Se observa que la semi-esfera inferior y superior son iguales pero con signo opuesto, entonces reemplazamos Ec. D.8 por

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2) |0\rangle + \sin(\theta/2) e^{i\varphi} |1\rangle \quad (\text{D.9})$$

con $\theta \in [0, \pi]$ y $\varphi \in [0, 2\pi]$. Si calculamos un estado ortonormal cuya propiedad es $\langle\psi|\psi_\perp\rangle = 0$,

$$|\psi_\perp\rangle = -\sin(\theta/2) |0\rangle + \cos(\theta/2) e^{i\varphi} |1\rangle \quad (\text{D.10})$$

\therefore

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \left(\cos(\theta/2) |0\rangle, \quad \sin(\theta/2) e^{i\varphi} |1\rangle \right) \\ |\psi_\perp\rangle &= \left(-\sin(\theta/2) |0\rangle, \quad \cos(\theta/2) e^{i\varphi} |1\rangle \right) \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

D.11 Es en par de vectores ortonormales denominados como **estados de bloch** [20].

D.3. Espín

Es una propiedad física de las partículas, se dice que tienen un momento angular intrínseco asociado con un valor fijo. Contrario a la mecánica clásica el momento angular no se define como una rotación sobre su eje, en realidad es un término abstracto que añade un grado de libertad cuántico.

El valor que puede tomar el espín está cuantizado, es por lo cual resulta interesante como sistema físico en computación cuántica. Ahí, se emplea el estado $|0\rangle$ para representar la proyección de espín $+\hbar/2$ y $|1\rangle$ para la proyección de espín $-\hbar/2$.

¹¹ $x = \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \cos \theta$

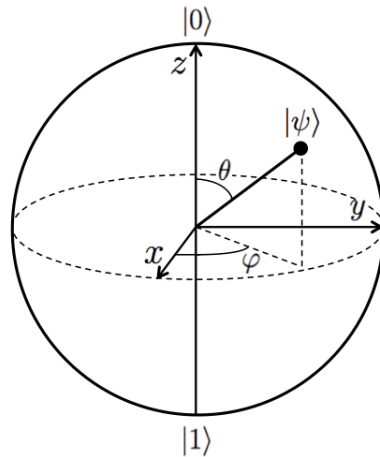


Figura 17: Representación gráfica de la esfera de Bloch.

El estado ψ se encuentra en la superficie de la esfera unitaria y esta caracterizado por los ángulos θ y φ . Gráfico tomado de [37]

El vector espín se define como $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ donde S_x, S_y y S_z son las proyecciones del observable espín sobre los ejes x, y y z . Las proyecciones como se vio en el apéndice B se definen como:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z, \quad (\text{D.12})$$

donde σ_x, σ_y y σ_z son las matrices de Pauli.

El espín se puede proyectar sobre un vector unitario \vec{n} de componentes (n_x, n_y, n_z)

$$S_n = \vec{S} \cdot \vec{n} = S_x n_x + S_y n_y + S_z n_z \quad (\text{D.13})$$

Expresando \vec{n} en coordenadas esféricas

$$\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \quad \sin \theta \sin \varphi, \quad \cos \theta) \quad (\text{D.14})$$

Considerando unidades unitarias ($\hbar = 1$) y reemplazando las matrices de Pauli en Ec. D.13:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cos \theta \right] \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \cos \varphi - i \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi + i \sin \theta \sin \varphi & -\cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Cuando se determinan los autovalores a S_n con el polinomio característico

$$\det|S_n - \lambda I| = 0 \quad (\text{D.16})$$

se obtienen que los autovalores son $+1/2$ y $-1/2$ que acuerdo a el postulado III [19]¹² de la mecánica cuántica son los únicas proyecciones posibles del espín. Cuyos autoestados

¹²Cuando se mide una magnitud física de un sistema cuántico, los únicos valores que se pueden obtener son los autovalores (o valores propios) asociados al Observable correspondiente a dicha magnitud.

correspondientes se obtienen al resolver

$$(S_n - \lambda I)v = 0 \quad (\text{D.17})$$

Donde $v = (v_x, v_y)$ considerando Ec. D.16, solo se tiene una ecuación linealmente independiente

$$\frac{\sin \theta e^{i\varphi}}{2} v_x - \left(\frac{\cos \theta}{2} + \lambda \right) v_y = 0 \quad (\text{D.18})$$

$$v_x = \frac{\cos \theta + 2\lambda}{\sin \theta e^{i\varphi}} v_y \quad (\text{D.19})$$

Si usamos que $v_y = \sin \theta e^{i\varphi} \rightarrow v_x = \cos \theta + 2\lambda$.

$|v_n\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta + 2\lambda \\ \sin \theta e^{i\varphi} \end{pmatrix}$ Sustituyendo los autovalores $(\pm 1/2)$ se obtienen los autoestados:

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta + 1 \\ \sin \theta e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 \\ \sin \theta e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.20})$$

Dado que todo estado tiene ser normalizado [36], se divide por su módulo $|v| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$

$$\begin{aligned} |v_1| &= \sqrt{(\cos \theta + 1)^2 + \sin^2 \theta} = 2 \cos(\theta/2), \\ |v_2| &= \sqrt{(\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta} = 2 \sin(\theta/2), \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

Los autoestados ya normalizados se escriben como:

$$|v_1\rangle = \frac{1}{2 \cos(\theta/2)} \begin{pmatrix} \cos \theta + 1 \\ \sin \theta e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad |v_2\rangle = \frac{1}{2 \sin(\theta/2)} \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 \\ \sin \theta e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.22})$$

Recordando las identidades $\cos \theta = 2 \cos^2(\frac{\theta}{2}) - 1$ y $\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}) = 2 \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})$. Los auto estados se reescriben como:

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2)e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (\text{D.23})$$

Se nota que v_1 y $|\psi\rangle$ D.11 son lo mismo (coinciden con los estados de Bloch), de igual manera v_2 y $|\psi_\perp\rangle$.

E. Matriz Jacobiana

La matriz siguiente se usa para estudiar la estabilidad de los puntos fijos. El equilibrio de los puntos fijos de un sistema dinámico tridimensional puede ser estudiado con la matriz Jacobiana (evaluada en el punto), de manera que cumple con las siguientes desigualdades si y solo si es linealmente estable.

$$\begin{aligned} |\det(J)| &< 1, \\ 1 &> [\sum M_i(J)] - [\text{tr}(J)][\det(J)] + [\det(J)]^2, \\ -(\sum M_i(J) + 1) &< \text{tr}(J) + \det(J) < (\sum M_i(J) + 1). \end{aligned}$$

La matriz Jacobiana del sistema de ecuaciones descritos en 2.9

$$JV(S) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V(S)_x}{\partial S_x} & \frac{\partial V(S)_x}{\partial S_y} & \frac{\partial V(S)_x}{\partial S_z} \\ \frac{\partial V(S)_y}{\partial S_x} & \frac{\partial V(S)_y}{\partial S_y} & \frac{\partial V(S)_y}{\partial S_z} \\ \frac{\partial V(S)_z}{\partial S_x} & \frac{\partial V(S)_z}{\partial S_y} & \frac{\partial V(S)_z}{\partial S_z} \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$

Donde

$$\frac{\partial V(S)_x}{\partial S_x} = S_x \cdot \left(\frac{pS_x}{S((S+1)^2 - S_z^2)} - \frac{2pS_x \cdot (S+1)^2}{S((S+1)^2 - S_z^2)^2} \right) + \frac{p \cdot (S+1)}{(S+1)^2 - S_z^2} - \frac{\gamma S_x}{S} - \Gamma \quad (\text{E.2})$$

$$\frac{\partial V(S)_x}{\partial S_y} = S_x \cdot \left(\frac{pS_y}{S((S+1)^2 - S_z^2)} - \frac{2pS_y \cdot (S+1)^2}{S((S+1)^2 - S_z^2)^2} \right) - \frac{\gamma S_y}{S} - \alpha S_z \quad (\text{E.3})$$

$$\frac{\partial V(S)_x}{\partial S_z} = S_x \cdot \left(\frac{pS_z}{S((S+1)^2 - S_z^2)} - \frac{p \cdot (S+1) \left(\frac{2S_z \cdot (S+1)}{S} - 2S_z \right)}{((S+1)^2 - S_z^2)^2} \right) - \frac{\gamma S_z}{S} - \alpha S_y \quad (\text{E.4})$$

$$\frac{\partial V(S)_y}{\partial S_x} = S_y \cdot \left(\frac{pS_x}{S((S+1)^2 - S_z^2)} - \frac{2pS_x \cdot (S+1)^2}{S((S+1)^2 - S_z^2)^2} \right) + \alpha S_z \quad (\text{E.5})$$

$$\frac{\partial V(S)_y}{\partial S_y} = S_y \cdot \left(\frac{pS_y}{S((S+1)^2 - S_z^2)} - \frac{2pS_y \cdot (S+1)^2}{S((S+1)^2 - S_z^2)^2} \right) + \frac{p \cdot (S+1)}{(S+1)^2 - S_z^2} - \Gamma \quad (\text{E.6})$$

$$\frac{\partial V(S)_y}{\partial S_z} = S_y \cdot \left(\frac{pS_z}{S((S+1)^2 - S_z^2)} - \frac{p \cdot (S+1) \left(\frac{2S_z \cdot (S+1)}{S} - 2S_z \right)}{((S+1)^2 - S_z^2)^2} \right) + \alpha S_x + \varepsilon \quad (\text{E.7})$$

$$\frac{\partial V(S)_z}{\partial S_x} = -\frac{2pS_z S_x \cdot (S+1)}{S(2S+S_x^2+S_y^2+1)^2} \quad (\text{E.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(S)_z}{\partial S_y} = & -\frac{\varepsilon \cdot S^5 + (6\varepsilon - 2\varepsilon S_z^2) S^3 + (2pS_z S_y + \varepsilon S_z^4 - 2\varepsilon S_z^2 + \varepsilon) S + 4\varepsilon S_y^4}{S(2S+S_y^2+S_x^2+1)^2} \\ & + \frac{(4\varepsilon S_z^2 + \varepsilon \cdot (8S_x^2 + 4)) S_y^2 + 2pS_z S_y + \varepsilon \cdot (4S_x^2 + 4) S_z^2 + \varepsilon \cdot (4S_x^4 + 4S_x^2)}{S(2S+S_y^2+S_x^2+1)^2} \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(S)_z}{\partial S_z} = & -\frac{\Gamma \cdot S^5 + S(\Gamma S_z^4 + (p - 2\Gamma) S_z^2 - p + \Gamma) + S^3(-2\Gamma S_z^2 - p + 6\Gamma)}{S(2S+S_y^2+S_x^2+1)^2} \\ & + \frac{\Gamma \cdot (4S_y^2 + 4S_x^2 + 4) S_z^2 + (-2S_y^2 - 2S_x^2) p + \Gamma \cdot (4S_y^4 + (8S_x^2 + 4) S_y^2 + 4S_x^4 + 4S_x^2)}{S(2S+S_y^2+S_x^2+1)^2} \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Referencias

- [1] R. Ruiz-Sánchez, R. Rechtman, and Y. G. Rubo. Autonomous chaos of exciton-polariton condensates. *Phys. Rev. B*, 101:155305, 2020.
- [2] L. Landau. Theory of the superfluidity of helium ii. *Phys. Rev.*, 60:356–358, 1941.
- [3] Charles Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. Wiley, 8 edition, 2004.
- [4] A. Amo, D. Sanvitto, Fabrice Laussy, and Ballarini. Collective fluid dynamics of a polariton condensate in a semiconductor microcavity. *Nature*, 457:291–5, 2009.
- [5] David W. Snoke and Jonathan Keeling. The new era of polariton condensates. *Physics Today*, 2017.
- [6] Paulo F Farinas. Feynman, a superfluidez e a supercondutividade. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 40(4), 2018.
- [7] A. Leggett. Bose-einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts. *Rev. Mod. Phys.*, 73:307–356, 2001.
- [8] J Rogel-Salazar. The gross-pitaevskii equation and bose-einstein condensates. *European Journal of Physics*, 34(2):247–257, 2013.
- [9] S. De Palo, C. Castellani, C. Di Castro, and B. K. Chakraverty. Effective action for superconductors and bcs-bose crossover. *Phys. Rev. B*, 60:564–573, 1999.
- [10] Iacopo Carusotto and Cristiano Ciuti. Quantum fluids of light. *Reviews of Modern Physics*, 85(1):299–366, 2013.
- [11] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2001.
- [12] Lukasz Zawitkowski, Mariusz Gajda, and Kazimierz Rzazewski. Dynamics of a relative superflow between a bose-einstein condensate and the thermal cloud. *Physical Review A*, 74(4), 2006.
- [13] Seman J. A. Seco G. B. Henn E. A. L. Bose-einstein condensation in 87rb characterization of the brazilian experiment. *Brazilian Journal of Physics*, 2008.
- [14] Yago Baltasar del Valle-Inclán Redondo. Spin and lattice properties of optically trapped exciton polaritons. *PhD thesis, University of Cambridge*, 2018.
- [15] Nataliya Bobrovska and Michał Matuszewski. Adiabatic approximation and fluctuations in exciton-polariton condensates. *Physical Review B*, 92(3), 2015.
- [16] Sven Höfling, Matthias Amthor, Arash Rahimi-Iman, Na Young Kim, Julian Fischer, Ivan G. Savenko, Vladimir D. Kulakovski, Ivan A. Shelykh, Stephan Reitzenstein, Alfred Forchel, Yoshihisa Yamamoto, Martin Kamp, and Christian Schneider. An electrically pumped polariton laser. In *2015 IEEE Photonics Conference (IPC)*, pages 613–614, 2015.

- [17] Elena Rozas, Alexey Yulin, Johannes Beierlein, Sebastian Klemmt, Sven Höfling, Oleg A. Egorov, Ulf Peschel, Ivan A. Shelykh, Manuel Gundin, Ignacio Robles-López, M. Dolores Martín, and Luis Viña. Effects of the linear polarization of polariton condensates in their propagation in codirectional couplers, 2021.
- [18] Manuel Salvador Cipriano Solis. Caos en fluidos polaritónicos. Proyecto Terminal 1 Investigación Teórica, 2021.
- [19] M. R. Dennis and M. A. Alonso. Swings and roundabouts: optical poincaré spheres for polarization and gaussian beams. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 375(2087):20150441, 2017.
- [20] Keiichi Edamatsu. Quantum measurement and uncertainty relations in photon polarization. *Physica Scripta*, 91(7):073001, 2016.
- [21] Florian Flossmann, Ulrich T. Schwarz, Max Maier, and Mark R. Dennis. Stokes parameters in the unfolding of an optical vortex through a birefringent crystal. *Opt. Express*, 14(23):11402–11411, 2006.
- [22] June Elizabeth Barrow-Green. Poincaré and the three body problem. Review, 1993.
- [23] Edward Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2 edition, 2002.
- [24] Bernard Brooks. Linear stability conditions for a first order 4-dimensional discrete dynamic. *Journal of Applied and Computational Mathematics*, 3, 07 2014.
- [25] E.N. Lorenz. *The Essence Of Chaos*. Jessie and John Danz lectures. Taylor & Francis, 1995.
- [26] Ch. Skokos. *The Lyapunov Characteristic Exponents and Their Computation*, pages 63–135. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [27] Paul Manneville. Chapter 7 - characterization of temporal chaos. In Paul Manneville, editor, *Dissipative Structures and Weak Turbulence*, pages 247–284. Academic Press, Boston, 1990.
- [28] Peter C. Müller. Calculation of lyapunov exponents for dynamic systems with discontinuities. *Chaos, Solitons Fractals*, 5(9):1671–1681, 1995. Some Nonlinear Oscillations Problems in Engineering Sciences.
- [29] Michael Barnsley. *Fractals Everywhere*, volume 97. 1989.
- [30] P.S. Addison. *Fractals and Chaos: An Illustrated Course*. Institute of Physics Publishing, 1997.
- [31] Igor V. Dzedolik and Olga Karakchieva. Polariton spectrum in nonlinear dielectric medium. *Appl. Opt.*, 52(13):3073–3078, 2013.
- [32] Jesús Gerardo Huerta Escobar. Notas de apoyo a la investigación en transistores polaritónicos, 2021. Servicio Social.

- [33] Jorge A. Pérez and Luis Benet. `Taylorintegration.jl`: Taylor integration in julia. *MIT Expat license*, 2016.
- [34] David Poole. *Álgebra lineal*. Brooks Cole, 3 edition, 2010.
- [35] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. Quantum computation and quantum information. *Cambridge University Press*, 2010.
- [36] Giuliano Benenti, Giulio Casati, and Giulino Strini. *Principles of Quantum Computation and Information*, volume 1. World Scientific, 2004.
- [37] Diego Quiñones. *Síntesis de Circuitos Cuánticos*. PhD thesis, UASLP, 2012.