



LA MÁQUINA TÉRMICA DE FAESONIO

Autor:

Yael Morales Venegas

Asesor:

Dr. Miguel Angel Bastarrachea Magnani

PROYECTO TERMINAL II: INVESTIGACIÓN TEÓRICA
CLAVE 2111109. TRIMESTRE 22-O.

Licenciatura en Física
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

16 de Enero 2023

Índice

1. Introducción	2
2. Conceptos básicos	4
2.1. Eficiencia de una máquina térmica clásica	4
2.2. La máquina térmica de Carnot	5
2.3. Operador de densidad	7
3. Interacción átomo-campo	9
3.1. Cuantización de campo electromagnético	9
3.2. Hamiltoniano de interacción átomo-campo	11
3.3. Ecuación maestra de matriz de densidad	17
4. La máquina térmica de <i>faesonio</i>	22
4.1. Presión de radiación	23
4.2. Resultados fenomenológicos	27
4.2.1. Eficiencia de la máquina térmica de <i>faesonio</i>	31
4.3. Ciclo termodinámico	34
4.4. Reservorios correlacionados	35
5. Conclusiones	37
A. Oscilador armónico electromagnético	38

1. Introducción

El avance tecnológico dentro del computo cuántico, la teoría de la información cuántica, así como la experimentación con sistemas cuánticos, ha fomentado el desarrollo del campo de la termodinámica cuántica [1, 2, 3, 4]. Ésta consiste en el estudio de la emergencia de las leyes termodinámicas desde el punto fundamental de la teoría cuántica. En general, se concentra en el estudio de procesos termodinámicos donde las propiedades cuánticas como las correlaciones puedan ser significativas. También, dada la imposibilidad de aislar completamente a los sistemas reales, la termodinámica cuántica se relaciona con la teoría de los sistemas cuánticos abiertos [2, 4].

Poniendo especial énfasis en la segunda ley de la termodinámica, se conoce que ésta procede originalmente del estudio de la eficiencia de las máquinas térmicas clásicas iniciado por Sadi Carnot y que derivó en los postulados de Kelvin-Planck y Clausius [5]. Una de las motivaciones principales de la termodinámica cuántica es establecer relaciones entre el mundo cuántico y el clásico a partir de la segunda ley. De ahí la importancia de las máquinas térmicas cuánticas (*Quantum Heat Engines*) [3, 6, 7, 8, 9, 10]. Una máquina térmica cuántica, o QHE por sus siglas en inglés, es un modelo paradigmático que consiste en un sistema cuántico abierto capaz de intercambiar información y energía con los baños térmicos (reservorios) que se encuentran en contacto con él. Se diferencia de una máquina térmica clásica en que la sustancia de trabajo contenida en ella posee una descripción cuántica, de tal forma que atraviesan una serie de procesos termodinámico-cuánticos [9].

Cuando los baños térmicos que se encuentran en contacto con una QHE también poseen una naturaleza cuántica, se puede hacer uso de correlaciones cuánticas, como la coherencia cuántica [11]. La coherencia cuántica se presenta como una propiedad del sistema que surge de la superposición cuántica de estados y tiene una relación cercana con otras correlaciones cuánticas, tales como el entrelazamiento y la discordia [12, 13]. En este sentido, la naturaleza cuántica de la sustancia de trabajo, la de los baños térmicos y el uso de las correlaciones cuánticas, provocan que las QHE puedan presentar propiedades inusuales que alteran su funcionamiento [14, 13]. Por ejemplo, se pretende que el uso de la coherencia cuántica como un recurso permita que, bajo ciertas condiciones, una QHE pueda alcanzar una eficiencia mayor a la de una máquina térmica clásica, por lo que se podría obtener trabajo a partir de un solo baño térmico. Este resultado aplicado de vuelta a la teoría de la información cuántica, representaría un incremento en la eficiencia del procesamiento de la información [1, 13].

En este trabajo el interés se centra en un modelo de QHE planteado por Scully et al. [14] denominado máquina de Carnot fotónica o máquina térmica de *faesonio*. En ella tanto la sustancia de trabajo como el baño térmico de alta temperatura poseen una descripción cuántica. En términos generales, el modelo consta de una cavidad óptica de microlaser que contiene un campo de fotones de un modo y donde la presión de radiación del campo excitado térmicamente impulsa una de las paredes de la cavidad que se comporta como un pistón. Cabe resaltar que para este modelo, la naturaleza y características del baño térmico de alta temperatura son de gran importancia en el funcionamiento de la QHE. Dicho baño está constituido por *faesonio*, originalmente introducido por Scully y Zubairy en [15] y denominado así debido a que se trata de un *ensamble* de átomos térmicos de tres niveles,

resonantes con el campo dentro de la cavidad, que presentan coherencia de fase entre los niveles de energía más bajos. En un inicio, los átomos de tres niveles del *ensamble* se encuentran en estados no coherentes, de forma que para adquirir la coherencia cuántica en los niveles de energía más bajos $|b\rangle$ y $|c\rangle$ pasan a través de un campo de microondas.

Para iniciar con el análisis de la máquina de Carnot fotónica propuesta por Scully et al. [14], se realiza un repaso de las características de una máquina de Carnot clásica. El conocimiento de sus procesos termodinámicos, así como de su eficiencia, permitirá más adelante establecer una comparación entre la eficiencia de la máquina de Carnot fotónica e identificar los beneficios de las correlaciones cuánticas como recurso. En seguida, se hace una revisión de la teoría cuántica de la interacción entre un sistema atómico y un campo electromagnético comenzando con la cuantización del campo electromagnético. Esto se hace con la finalidad de entender el trasfondo teórico de la máquina de Carnot fotónica de Scully et al. [14]. El estudio de la cuantización del campo electromagnético y su uso en la posterior obtención de la descripción termodinámica de la sustancia de trabajo, permite entender los procesos que ésta última atraviesa dentro de la cavidad. Por otro lado, mediante el conocimiento del hamiltoniano de interacción átomo-campo para un átomo de dos niveles (Hamiltoniano de Jaynes-Cummings), se desarrolla el procedimiento para obtener la ecuación maestra para la matriz de densidad del campo electromagnético y posteriormente extender su uso a un átomo de tres niveles, como los que conforman el *faesonio*.

La finalidad de haber introducido la teoría cuántica de interacción átomo-campo, recae en los resultados fenomenológicos obtenidos por Scully et al. [14]. El modelo de máquina de Carnot fotónica es analizada por medio de resultados fenomenológicos y posteriormente contrastada con resultados de la teoría cuántica de interacción para la obtención de la eficiencia de la máquina. Una vez discutido el modelo de Scully et al. [14], será de utilidad realizar una comparación con el modelo de QHE establecido por Dillenschneider y Lutz [13], para un reservorio que consiste en un *ensamble* de parejas de átomos de dos niveles térmicamente entrelazados y que interactúan resonantemente con la cavidad. Esta comparación es importante en la identificación de los beneficios en la eficiencia del uso de las correlaciones cuánticas como recurso en una QHE.

Antes de abrir paso al análisis de la máquina de Carnot fotónica de Scully et al. [14], se hace un breve repaso de algunos conceptos termodinámicos, tales como la eficiencia de una máquina térmica clásica y la máquina de Carnot. En la sección 3 se resume la teoría cuántica sobre la interacción átomo-campo, donde se detalla la cuantización del campo electromagnético y el hamiltoniano que describe dicha interacción. Luego, en la sección 4 se hablará acerca de las características de la máquina térmica de *faesonio* de Scully et al. [14]; la presión de radiación, importante en la descripción de la sustancia de trabajo de la QHE; su ciclo termodinámico; y los resultados fenomenológicos obtenidos por los autores. También se realizará un breve análisis sobre un modelo de QHE presentado por Dillenschneider y Lutz en Ref. [13]. Finalmente, se discutirán perspectivas sobre las correlaciones cuánticas relacionadas con los modelos de QHE estudiados aquí, así como las consecuencias termodinámicas de los resultados obtenidos por Scully et al. [14] para la máquina de Carnot fotónica.

2. Conceptos básicos

2.1. Eficiencia de una máquina térmica clásica

Para entender los principales resultados obtenidos de la máquina térmica de faesonio propuesta por Scully et al. [14], es necesario tomar en cuenta primero el estudio de las máquinas térmicas clásicas. La revisión de esta subsección y la siguiente parte del contenido se basa en las Refs. [16, 17].

Una máquina térmica clásica es un mecanismo que funciona mediante una serie de procesos reversibles o ciclo termodinámico, cuyo propósito es convertir energía en forma de calor, transferida desde un baño térmico a alta temperatura, en trabajo mecánico. De acuerdo con la primera ley de la termodinámica para un ciclo, todo el calor que sea transferido desde el baño térmico se convierte en trabajo mecánico. No obstante, el postulado de Kelvin-Plack no lo permite, por lo que solo parte del calor transferido se convierte en trabajo mecánico, mientras que la parte restante es transferida en forma de calor a un baño térmico de baja temperatura.

Una máquina térmica opera mediante una sustancia de trabajo y dos fuentes térmicas: una fuente de calor o baño térmico a alta temperatura T_H y un baño térmico a baja temperatura T_C . El baño a alta temperatura transfiere una cantidad Q_H de calor a la sustancia y al producirse cambios termodinámicos en ella, una cierta cantidad Q_C de calor es expulsado y depositado el baño de baja temperatura al mismo tiempo que se produce trabajo mecánico W . Por lo tanto, de la primera ley de la termodinámica se obtiene

$$W = Q_H - Q_C. \quad (2.1)$$

Ya que no todo el calor transferido Q_H puede convertirse en trabajo, una cantidad relevante que describe el comportamiento de una máquina térmica es la eficiencia η , dada por la razón entre el trabajo producido en el ciclo y el calor que se transfirió desde el baño térmico a alta temperatura

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H}, \quad (2.2)$$

y sustituyendo la ecuación (2.1), se puede escribir la eficiencia η en términos del calor como

$$\eta = \frac{Q_H - Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H}. \quad (2.3)$$

El caso en el que la eficiencia es igual a 1 no está permitido por el postulado de Kelvin-Plack. De ser así, esto significaría que el calor Q_C es nulo porque la máquina estaría convirtiendo en trabajo todo el calor Q_H que entra al sistema.

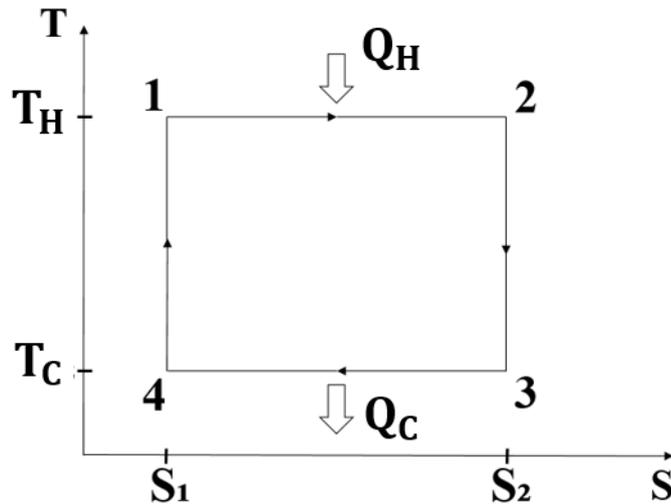


Figura 1: Diagrama T-S del ciclo de Carnot.

2.2. La máquina térmica de Carnot

Las máquinas térmicas reales no funcionan por medio de procesos reversibles, pero se pueden modelar mediante ellos. El físico francés Sadi Carnot, desarrolló una máquina térmica reversible que lleva su nombre y consiste en una serie de procesos cuasi-estáticos que representa el ciclo con mayor eficiencia η que opera entre dos baños térmicos a diferentes temperaturas [5]. Tradicionalmente, se considera que el ciclo de Carnot impone el límite máximo de eficiencia para las máquinas térmicas clásicas.

La máquina térmica de Carnot consta de un cilindro que contiene gas ideal como sustancia de trabajo, el cual sufre cambios termodinámicos por estar en contacto con un baño térmico a temperatura T_H . Una de las paredes del cilindro es un pistón, el cual se mueve debido a los cambios que sufre la sustancia de trabajo. El ciclo que la hace funcionar consta de cuatro procesos reversibles, que son:

- expansión isotérmica, donde la sustancia de trabajo se pone en contacto con el baño térmico a temperatura T_H . Debido a la expansión, se extrae trabajo del sistema que es compensado con la entrada de calor Q_H ;
- expansión adiabática, donde el sistema se aísla y aumenta el volumen realizando trabajo adicional que no es compensado con entrada de calor, por lo que la temperatura disminuye a T_C y la sustancia de trabajo empuja el pistón;
- compresión isotérmica, donde el sistema se pone en contacto con el baño térmico a temperatura T_C y disminuye el volumen. La compresión implica que la sustancia de trabajo se calienta por encima de la temperatura T_C por lo que para mantener el proceso a temperatura constante, se libera calor Q_C al baño térmico;
- compresión adiabática, donde se aísla nuevamente al sistema y continúa disminuyendo el volumen. Debido a que el sistema está aislado, la temperatura aumenta a T_H .

De la aplicación de la primera ley de la termodinámica a cada proceso, se obtiene que el trabajo mecánico producido en el ciclo es [16]

$$W = Q_H - Q_C = Nk_B \left[T_H \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) - T_C \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right) \right], \quad (2.4)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann, V_1, V_2, V_3 y V_4 son los volúmenes correspondientes con cada uno de los cuatro procesos que conforman el ciclo. De esta forma, la eficiencia η puede escribirse en términos de las temperaturas T_H y T_C como

$$\eta = \frac{Nk_B \left[T_H \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) - T_C \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right) \right]}{Nk_B T_H \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)},$$

$$\eta = 1 - \frac{T_C \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right)}{T_H \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)}, \quad (2.5)$$

y ya que a lo largo de las adiabáticas

$$Nk_B \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right) = C_V \ln \left(\frac{T_H}{T_L} \right), \quad (2.6)$$

$$Nk_B \ln \left(\frac{V_4}{V_1} \right) = C_V \ln \left(\frac{T_H}{T_L} \right), \quad (2.7)$$

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1}, \quad (2.8)$$

entonces

$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_H}. \quad (2.9)$$

Así se obtiene que la eficiencia está únicamente determinada por las temperaturas de los baños térmicos y en el caso en que $T_H = T_C$, la eficiencia de la máquina es nula, por lo que no se puede extraer trabajo de un solo baño térmico. Luego, igualando (2.3) y (2.9)

$$\frac{Q_H}{T_H} = \frac{Q_C}{T_C}, \quad (2.10)$$

y si se considera que cada ciclo termodinámico puede dividirse en ciclos de Carnot infinitesimales para su simplificación, se puede escribir

$$\frac{dQ_H}{T_H} - \frac{dQ_C}{T_C} = 0. \quad (2.11)$$

Sumando todas las contribuciones a lo largo de una trayectoria de un ciclo termodinámico reversible se obtiene

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0, \quad (2.12)$$

la cual es una función de estado independiente de la trayectoria, la entropía S , tal que para un ciclo $\Delta S = 0$ [16].

2.3. Operador de densidad

Un elemento que se necesita añadir para poder describir un sistema cuántico es el de la matriz de densidad. En muchas ocasiones, cuando se realiza una descripción de los estados cuánticos de un sistema, resulta conveniente el uso del operador de densidad o matriz de densidad. En esta subsección se realiza una breve revisión del operador de densidad, así como de sus propiedades más importantes basándose en las Refs. [1, 18].

El operador de densidad resulta principalmente útil en la caracterización de *ensambles* de estados cuánticos ya que contiene toda la información que se puede conocer acerca de éste, además de incorporar probabilidades clásicas. Aquellos *ensambles* donde se considera un conjunto de sistemas idénticamente preparados y caracterizados con el mismo estado cuántico o ket $|\varphi\rangle$, se denominan *ensambles* puros. Para un *ensamble* puro, el operador de densidad está dado por

$$\hat{\rho} = |\varphi\rangle\langle\varphi|. \quad (2.13)$$

Aquellos *ensambles* que constituyen una mezcla de sistemas en estados puros, reciben el nombre de *ensambles* mixtos. En un *ensamble* mixto, el conjunto de sistemas que lo conforman puede encontrarse en cualquiera de los estados $\{|\varphi_i\rangle\}_{1,2..}$ con un peso probabilístico o población fraccional w_i , por lo que el operador de densidad está definido como

$$\hat{\rho} = \sum_i^N w_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|. \quad (2.14)$$

donde la suma es sobre todos los elementos del *ensamble* de estados. El operador de densidad debe satisfacer las condiciones de traza unitaria, $tr(\hat{\rho}) = 1$, de normalización y ser positivo. El operador de densidad posee la representación matricial dada por

$$\hat{\rho} = \sum_{i,j=1}^N \rho_{ij} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_j|, \quad (2.15)$$

o bien

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} & \cdots & \rho_{0N} \\ \rho_{10} & \rho_{11} & \cdots & \rho_{1N} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \rho_{N0} & \rho_{N1} & \cdots & \rho_{NN} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

donde ρ_{ij} son los elementos matriciales. Los elementos diagonales $\rho_{i=j}$ reciben el nombre de poblaciones, ya que representan las probabilidades de ocupar un determinado estado cuántico puro en el *ensamble* mixto. Por otro lado, los elementos no diagonales $\rho_{i \neq j}$ se denominan coherencias, por lo que tienen un factor de fase. Los elementos no diagonales describen el comportamiento oscilatorio de las superposiciones coherentes en el sistema. Como el operador de densidad es un operador hermítico, se satisface que $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$, tal que los elementos matriciales cumplen la relación

$$\rho_{ij} = \langle \varphi_i | \hat{\rho} | \varphi_j \rangle = \langle \varphi_j | \hat{\rho} | \varphi_i \rangle^*. \quad (2.17)$$

Si se realiza una medición de una observable \hat{A} sobre un estado puro, el valor esperado de \hat{A} está definido por

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \varphi_i | \hat{A} | \varphi_i \rangle. \quad (2.18)$$

Considerando el valor esperado sobre el *ensamble* mixto

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_i^N w_i \langle \varphi_i | \hat{A} | \varphi_i \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{A}). \quad (2.19)$$

La formulación del operador de densidad para la descripción de los sistemas cuánticos es importante en la termodinámica y óptica cuántica [16], donde el interés se centra en los sistemas termodinámicos que están acoplados cuánticamente con sus alrededores, como un sistema cuántico de partículas que se encuentra entrelazado con su entorno. El operador de densidad para estados mixtos provee una correcta descripción para este acoplamiento así como sus consecuencias [16] debido a que, a diferencia de los estados puros, los estados mixtos no se pueden expresar como una función de estado solución de la ecuación de Schrödinger [16], sino de una ecuación maestra.

A continuación, en la sección 3, se introducirá la teoría cuántica de interacción átomo-campo que incluye la cuantización del campo electromagnético de un modo y la descripción del hamiltoniano de interacción. También se hará uso del concepto de matriz de densidad aplicado a un campo de fotones.

3. Interacción átomo-campo

En esta sección se presenta la descripción de la interacción entre un campo de radiación de un solo modo y un sistema atómico de dos niveles en una cavidad óptica, donde ambos presentan una descripción cuántica. La finalidad es introducir la ecuación maestra para la matriz de densidad del campo de fotones que está impulsado por un haz de átomos térmicos de dos niveles y utilizarla para aplicar una extensión a un haz de átomos de tres niveles que presentan coherencia cuántica.

La presente sección se basa en las Refs. [15, 19, 20, 21]. De esta forma, primero se realiza un repaso sobre la cuantización del campo electromagnético, seguido del Hamiltoniano de Jaynes-Cummings para describir la interacción átomo-campo para un átomo de dos niveles y un campo de un solo modo. Finalmente se introduce la interacción campo-reservorio donde éste último consiste en un ensamble atómico.

3.1. Cuantización de campo electromagnético

Para comprender la interacción átomo-campo, en primer lugar es importante entender las propiedades del campo electromagnético cuantizado. Para dicho propósito se supone un campo de radiación que se encuentra confinado en una cavidad de una dimensión o bien, un pozo cuadrado unidimensional. La cavidad es de longitud L , de tal forma que las paredes se encuentran entre $z = 0$ y $z = L$ y el campo eléctrico transversal desaparece en la frontera [15]. El campo debe satisfacer las ecuaciones de Maxwell sin fuentes

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (3.2)$$

Asumiendo un campo electromagnético monocromático, de un solo modo y polarizado en la dirección \hat{x} [15], se obtienen las soluciones para el campo eléctrico \vec{E} y el magnético \vec{B} , que oscilan en la dirección \hat{x} y \hat{y} , respectivamente. En términos de las variables canónicas para la posición q y el momento p , las soluciones son [19]

$$\vec{E}(z, t) = \hat{x} \left(\frac{2\Omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} q(t) \sin(kz), \quad (3.3)$$

$$\vec{B}(z, t) = \hat{y} \left(\frac{\mu_0\epsilon_0}{k} \right) \left(\frac{2\Omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} p(t) \cos(kz), \quad (3.4)$$

donde V es el volumen de la cavidad, Ω es la frecuencia de de oscilación del campo, ϵ_0 es la permitividad del vacío, μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío y el número de onda es

$$k = \frac{\Omega}{c}. \quad (3.5)$$

Usando las condiciones a la frontera, los valores de k están dados por

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

y en términos de las frecuencias

$$\Omega = c\left(\frac{n\pi}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Por otro lado, el hamiltoniano del campo estaría dado por [19]

$$H = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \left[\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right]. \quad (3.8)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones 3.3 y 3.4

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 E^2 &= \frac{2\Omega^2 \varepsilon_0}{V \varepsilon_0} q^2(t) \text{sen}^2(kz), \\ &= \frac{2\Omega^2}{V} q^2(t) \text{sen}^2(kz), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} B^2 &= \frac{\mu_0^2 \varepsilon_0^2 \Omega^2}{k^2 \mu_0 \varepsilon_0} \frac{2}{V} p^2(t) \text{cos}^2(kz), \\ &= \mu_0 \varepsilon_0 c^2 \frac{2}{V} p^2(t) \text{cos}^2(kz), \\ &= \frac{2}{V} p^2(t) \text{cos}^2(kz). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Sustituyendo 3.9 y 3.10 en 3.8, se obtiene

$$H = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \left[\frac{2\Omega^2}{V} q^2(t) \text{sen}^2(kz) + \frac{2}{V} p^2(t) \text{cos}^2(kz) \right]. \quad (3.11)$$

De las identidades trigonométricas

$$\text{cos}^2(kz) = \frac{1 + \text{cos}(2kz)}{2}, \quad (3.12)$$

$$\text{sen}^2(kz) = \frac{1 - \cos(2kz)}{2}, \quad (3.13)$$

la ecuación 3.11 se puede reescribir como

$$H = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \left[\frac{\Omega^2}{V} q^2(t)(1 - \cos(2kz)) + \frac{1}{V} p^2(t)(1 + \cos(2kz)) \right], \quad (3.14)$$

donde se elimina el coseno debido a las condiciones de frontera periodicas, tal que

$$H = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \frac{1}{V} \left[\Omega^2 q^2(t) + p^2(t) \right], \quad (3.15)$$

e integrando sobre el volumen

$$H = \frac{1}{2} \left[p^2(t) + \Omega^2 q^2(t) \right], \quad (3.16)$$

se obtiene el hamiltoniano clásico del oscilador armónico de masa unitaria. Para cuantizar el hamiltoniano se requiere que los operadores \hat{q} y \hat{p} cumplan la relación canónica de conmutación

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar, \quad (3.17)$$

por lo que el operador hamiltoniano para el campo queda

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left[\hat{p}^2(t) + \Omega^2 \hat{q}^2(t) \right]. \quad (3.18)$$

Conviene reescribir el hamiltoniano en términos de los operadores escalera (Apéndice A) para obtener el hamiltoniano de oscilador armónico

$$\hat{H} = \hbar\Omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (3.19)$$

cuyos estados están dados por $\{|n\rangle\}_{0,1,\dots}$ y las energías son

$$E_n = \hbar\Omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.20)$$

3.2. Hamiltoniano de interacción átomo-campo

La interacción entre el campo de radiación cuantizado y un sistema atómico de un electrón está descrita por medio del acoplamiento del átomo con una onda electromagnética usando la aproximación de dipolo y aproximación de onda rotante (RWA por sus siglas en inglés) [19]. Entonces, el hamiltoniano de interacción es [15]

$$H = H_A + H_F + \mathcal{V}. \quad (3.21)$$

El término H_F describe al campo de un solo modo en ausencia de interacción dado por 3.19, con frecuencia propia Ω

$$H_F = \hbar\Omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right). \quad (3.22)$$

La energía H_A , que corresponde a la energía del átomo en ausencia de interacción, se puede expresar por medio de los operadores de transición atómica

$$\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|, \quad (3.23)$$

y tomándo en cuenta que $\{|i\rangle\}_{0,1..}$ forma un conjunto completo de eigenestados de H_A

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = 1, \quad (3.24)$$

por lo que, de la ecuación de valores propios se tiene

$$\begin{aligned} H_A|i\rangle &= E_i|i\rangle, \\ H_A|i\rangle\langle i| &= E_i|i\rangle\langle i|, \end{aligned} \quad (3.25)$$

y sumando para cada estado propio del sistema

$$H_A \sum_i |i\rangle\langle i| = \sum_i E_i |i\rangle\langle i|. \quad (3.26)$$

$$H_A = \sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii}. \quad (3.27)$$

Por otro lado, si se considera al átomo como un dipolo con momento dipolar $e\vec{r}$ y se aplica la aproximación dipolar, la energía potencial del dipolo interactuando con el campo electromagnético \mathcal{V} está dada por [19]

$$\mathcal{V} = -e\vec{r} \cdot \vec{E}, \quad (3.28)$$

donde e es la carga y \vec{r} es el vector de posición del electrón dirigido hacia el protón. Para escribir \mathcal{V} en términos del operador de transición atómica, se tiene que

$$\begin{aligned} e\vec{r} &= \sum_{ij} e|i\rangle\langle i|\vec{r}|j\rangle\langle j|, \\ e\vec{r} &= \sum_{ij} \wp_{ij} \hat{\sigma}_{ij}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

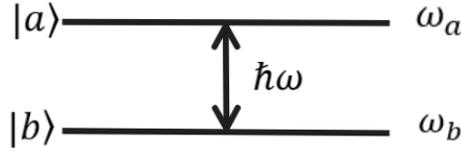


Figura 2: Diagrama de un átomo de dos niveles acoplado a un campo electromagnético de un modo. Las frecuencias de los niveles $|a\rangle$ y $|b\rangle$ son ω_a y ω_b , mientras que la frecuencia ω es la diferencia de frecuencia entre los niveles.

donde $\wp_{ij} = e\langle i|\vec{r}|j\rangle$ es el elemento de la matriz de transición eléctrica-dipolo. El operador de campo eléctrico, para un solo modo, evaluado en la aproximación dipolar en la posición del átomo es [15]

$$\vec{E} = \mathcal{E}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\hat{\epsilon}, \quad (3.30)$$

donde $\hat{\epsilon}$ es un vector unitario de polarización. Por lo tanto, la energía de interacción se puede escribir en términos de 3.30 como

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= -e\vec{r} \cdot \vec{E} = \sum_{ij} \wp_{ij} \hat{\sigma}_{ij} \cdot \mathcal{E}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\hat{\epsilon}, \\ &= \sum_{ij} (\wp_{ij} \cdot \mathcal{E}\hat{\epsilon}) \hat{\sigma}_{ij} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde se define la constante de acoplamiento átomo-campo

$$g^{ij} = -\frac{\wp_{ij} \cdot \mathcal{E}\hat{\epsilon}}{\hbar}, \quad (3.32)$$

de forma que

$$\mathcal{V} = -e\vec{r} \cdot \vec{E} = -\hbar \sum_{ij} g^{ij} \hat{\sigma}_{ij} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (3.33)$$

A partir de 3.22, 3.27 y 3.33, omitiendo el punto cero de energía, el hamiltoniano de interacción para un solo modo se escribe

$$H = \sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii} + \hbar\Omega(\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \hbar \sum_{ij} g^{ij} \hat{\sigma}_{ij} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (3.34)$$

Para un átomo de dos niveles $|a\rangle$ y $|b\rangle$ como el que se observa en la figura 2, con frecuencias ω_a y ω_b respectivamente, la diferencia de energías es $\hbar\omega$ tal que $\omega = \omega_a - \omega_b$. Si se considera que $\wp_{ab} = \wp_{ba}$, a partir de 3.32 se tiene

$$g^{ab} = -\frac{\wp_{ab} \cdot \mathcal{E}\hat{\epsilon}}{\hbar} = -\frac{\wp_{ba} \cdot \mathcal{E}\hat{\epsilon}}{\hbar} = g^{ba}, \quad (3.35)$$

de modo que se puede definir una sola constante de acoplamiento átomo-campo

$$g = g^{ab} = g^{ba}. \quad (3.36)$$

Desarrollando el primer término del hamiltoniano 3.34 para los dos niveles, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii} &= E_a \hat{\sigma}_{aa} + E_b \hat{\sigma}_{bb}, \\ &= \frac{1}{2}(E_a + E_b)(\hat{\sigma}_{aa} + \hat{\sigma}_{bb}) + \frac{1}{2}(E_a - E_b)(\hat{\sigma}_{aa} - \hat{\sigma}_{bb}), \\ &= \frac{1}{2}(E_a + E_b)(\hat{\sigma}_{aa} + \hat{\sigma}_{bb}) + \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{\sigma}_{aa} - \hat{\sigma}_{bb}), \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde, usando 3.24

$$\sum_{i=a,b} |i\rangle\langle i| = |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| = 1, \quad (3.38)$$

de forma que $(\sigma_{aa} + \sigma_{bb}) = 1$. Por lo tanto, el primer término se puede escribir como

$$\sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii} = \frac{1}{2}(E_a + E_b) + \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{\sigma}_{aa} - \hat{\sigma}_{bb}), \quad (3.39)$$

y si se desprecia el término constante

$$\sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii} = \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{\sigma}_{aa} - \hat{\sigma}_{bb}). \quad (3.40)$$

Desarrollando el tercer término del hamiltoniano 3.34, se obtiene

$$\sum_{ij} g^{ij} \hat{\sigma}_{ij} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = (g^{ab} \hat{\sigma}_{ab} + g^{ba} \hat{\sigma}_{ba}) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = g(\hat{\sigma}_{ab} + \hat{\sigma}_{ba}) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (3.41)$$

Sustituyendo 3.40 y 3.41 en 3.34

$$H = \hbar \left[\frac{1}{2}\omega(\hat{\sigma}_{aa} - \hat{\sigma}_{bb}) + \Omega(\hat{a}^\dagger \hat{a}) + g(\hat{\sigma}_{ab} + \hat{\sigma}_{ba})(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \right]. \quad (3.42)$$

Se puede definir una nueva notación

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_z &= (\hat{\sigma}_{aa} - \hat{\sigma}_{bb}), \\ \hat{\sigma}_+ &= \hat{\sigma}_{ab}, \\ \hat{\sigma}_- &= \hat{\sigma}_{ba}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

de forma que el hamiltoniano se puede reescribir como

$$H = \hbar \left[\frac{1}{2} \omega \sigma_z + \Omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + g(\sigma_+ + \sigma_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \right], \quad (3.44)$$

que se denomina Hamiltoniano de Rabi [21]. Se tiene que el operador $\hat{\sigma}_+$ toma un átomo que se encuentra en un estado inferior a un estado superior, mientras que el operador $\hat{\sigma}_-$ lo lleva de un estado superior a uno inferior [15]. Distribuyendo en 3.44 el tercer término, el cual corresponde a la energía de interacción \mathcal{V} ,

$$H = \hbar \left[\frac{1}{2} \omega \sigma_z + \Omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + g(\hat{a} \sigma_+ + \hat{a}^\dagger \sigma_+ + \hat{a} \sigma_- + \hat{a}^\dagger \sigma_-) \right]. \quad (3.45)$$

El término $\hat{a}^\dagger \sigma_+$ describe el proceso en el que un átomo es llevado de un estado inferior a uno superior y como consecuencia se crea un fotón y ocurre una ganancia de energía de $2\hbar\omega$ [15]. Por otra parte, para el término $\hat{a} \sigma_-$ el átomo hace una transición de un estado superior a uno inferior y un fotón es aniquilado, resultando en la pérdida de energía igual a $2\hbar\omega$ [15]. Estos términos, $\hat{a}^\dagger \sigma_+$ y $\hat{a} \sigma_-$, se denominan anti-resonantes y no conservan la energía por lo que se pueden despreciar debido a la aproximación de onda rotante (RWA) [15]. Por lo que la ecuación 3.45 se puede reducir al Hamiltoniano de Jaynes-Cummings para un campo de un solo modo [21]

$$H = \hbar \left[\frac{1}{2} \omega \sigma_z + \Omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + g(\hat{a} \sigma_+ + \hat{a}^\dagger \sigma_-) \right]. \quad (3.46)$$

En este hamiltoniano, el término $\hat{a} \sigma_+$ describe el proceso en el que un átomo es llevado de un estado inferior a uno superior y se aniquila un fotón de un modo, mientras que $\hat{a}^\dagger \sigma_-$ lleva un átomo de un estado superior a uno inferior y crea un fotón [15]. Para ambos procesos la energía se conserva. Dividiendo la Eq. 3.46 en dos términos, se define

$$H = H_0 + H_1 \quad (3.47)$$

donde

$$H_0 = \hbar \left[\frac{1}{2} \omega \sigma_z + \Omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \right], \quad (3.48)$$

$$H_1 = \hbar g(\hat{a} \sigma_+ + \hat{a}^\dagger \sigma_-). \quad (3.49)$$

Resulta conveniente escribir el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings, Eq. 3.46, en la imagen de interacción, el cual está dado por [15]

$$\mathcal{H} = \exp\left(\frac{iH_0 t}{\hbar}\right) H_1 \exp\left(-\frac{iH_0 t}{\hbar}\right), \quad (3.50)$$

o bien

$$\mathcal{H} = \hbar g(\sigma_+ \hat{a} e^{i\Delta t} + \hat{a}^\dagger \sigma_- e^{-i\Delta t}), \quad (3.51)$$

donde $\Delta = \omega - \Omega$.

Un método para resolver el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings para la interacción entre un átomo de dos niveles y un campo de un solo modo es mediante el uso del operador unitario de evolución temporal [15] dado por

$$U(t) = \exp(-i\mathcal{H}t/\hbar). \quad (3.52)$$

El Hamiltoniano de interacción \mathcal{H} , a resonancia exacta $\Delta = 0$, está dado por

$$\mathcal{H} = \hbar g(\sigma_+ \hat{a} + \hat{a}^\dagger \sigma_-). \quad (3.53)$$

Luego, para el átomo de dos niveles $|a\rangle$ y $|b\rangle$, se tienen las relaciones

$$(\sigma_+ \hat{a} + \hat{a}^\dagger \sigma_-)^{2l} = (\hat{a} \hat{a}^\dagger)^l |a\rangle \langle a| + (\hat{a}^\dagger \hat{a})^l |b\rangle \langle b|, \quad (3.54)$$

$$(\sigma_+ \hat{a} + \hat{a}^\dagger \sigma_-)^{2l+1} = (\hat{a} \hat{a}^\dagger)^l |a\rangle \langle b| + (\hat{a}^\dagger \hat{a})^l |b\rangle \langle a|, \quad (3.55)$$

por lo que el operador unitario puede escribirse como [15]

$$\begin{aligned} U(t) = & \cos\left(gt\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1}\right) |a\rangle \langle a| + \cos\left(gt\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a}}\right) |b\rangle \langle b| \\ & -i \frac{\sin\left(gt\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1}\right)}{\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1}} \hat{a} |a\rangle \langle b| - i \hat{a}^\dagger \frac{\sin\left(gt\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a}}\right)}{\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a}}} |b\rangle \langle a|. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Por otra parte, el vector de estado del campo de fotones se escribe como una superposición de los estados número $|n\rangle$

$$|\Psi_c(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |n\rangle, \quad (3.57)$$

de forma que el vector de estado átomo-campo está dado por el producto externo

$$\begin{aligned} |\Psi_{a-c}(t)\rangle &= |\Psi_a(t)\rangle |\Psi_c(t)\rangle, \\ &= |\Psi_a(t)\rangle \sum_n c_n(t) |n\rangle, \end{aligned} \quad (3.58)$$

y en términos del operador de evolución temporal $U(t)$, a un tiempo t , y del vector de estado inicial $|\Psi_{a-c}(0)\rangle$ a tiempo $(t = 0)$ se escribe

$$|\Psi_{a-c}(t)\rangle = U(t)|\Psi_{a-c}(0)\rangle. \quad (3.59)$$

Si se considera que el vector de estado inicial del sistema átomo-campo $|\Psi_{a-c}(0)\rangle$, para un átomo que se encuentra inicialmente en el estado $|a\rangle$, es

$$|\Psi_{a-c}(0)\rangle = \sum_n c_n(0)|a, n\rangle, \quad (3.60)$$

entonces, sustituyendo la Eq. 3.60 en Eq. 3.59

$$|\Psi_{a-c}(t)\rangle = U(t) \sum_n c_n(0)|a, n\rangle. \quad (3.61)$$

Para evaluar las amplitudes de probabilidad $c_{a,n}$ y $c_{b,n+1}$, se sustituye el operador $U(t)$, Eq. 3.56, en la Eq. 3.61 se obtiene [15]

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(0)[\cos(gt\sqrt{n+1})|a, n\rangle - i \sin(gt\sqrt{n+1})|b, n+1\rangle] \quad (3.62)$$

donde las amplitudes de probabilidad son [15]

$$c_{a,n}(t) = \langle a, n|\Psi(t)\rangle = c_n(0) \cos(gt\sqrt{n+1}) \langle a, n|a, n\rangle, \quad (3.63)$$

$$c_{a,n}(t) = c_n(0) \cos(gt\sqrt{n+1}), \quad (3.64)$$

$$c_{b,n+1}(t) = \langle b, n+1|\Psi(t)\rangle = -i \sin(gt\sqrt{n+1}) \langle b, n+1|b, n+1\rangle, \quad (3.65)$$

$$c_{b,n+1}(t) = -ic_n(0) \sin(gt\sqrt{n+1}). \quad (3.66)$$

3.3. Ecuación maestra de matriz de densidad

Después de haber revisado el Hamiltoniano de Jaynes Cummings, Eq. 3.46, ahora corresponde introducir la ecuación maestra de la matriz de densidad que describe la interacción de un campo de fotones con un baño térmico atómico o reservorio. Continuando con la idea de la interacción átomo-campo, donde el campo es de un solo modo y el átomo es de dos niveles, se usan las amplitudes de probabilidad revisadas en la subsección anterior para calcular la matriz de densidad. Inicialmente, se tiene que la distribución de energía atómica, caracterizada por la temperatura T , está dada por la distribución de Boltzmann [20]

$$\frac{r_a}{r_b} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right), \quad (3.67)$$

donde r_a es el número de átomos por segundo que pasan a través de la cavidad y que se encuentran en el nivel superior $|a\rangle$; r_b es el número de átomos por segundo que pasan a través de la cavidad y se encuentran en el nivel inferior $|b\rangle$. El efecto de la interacción entre el campo y el átomo, es que el campo adquiere la misma temperatura de equilibrio T que el átomo [20].

Como se vio en la subsección 2.3, el operador de densidad para un *ensamble* mixto está dado por Eq. 2.14. Aplicando el concepto para el campo de fotones, que se puede describir por medio de una mezcla de estados [20], se tiene

$$\hat{\rho}(t) = \sum_c |\Psi_{c_i}(t)\rangle \langle \Psi_{c_i}(t)|, \quad (3.68)$$

donde w_i es la probabilidad de que el campo se encuentre en el estado $|\Psi_{c_i}(t)\rangle$. Además, el vector de estado inicial del campo está dado por la Eq. 3.56

$$|\Psi_c(t)\rangle = \sum_n C_n(t)|n\rangle, \quad (3.69)$$

donde, debido a que se está usando la imagen de interacción, las amplitudes de probabilidad c_n se pueden reemplazar por C_n . Entonces la Eq. 3.67 puede reescribirse como

$$\hat{\rho}(t) = \sum_i w_i \sum_{n,m} C_n C_m^* |n\rangle \langle m| = \sum_{n,m} \rho_{nm}(t) |n\rangle \langle m|. \quad (3.70)$$

Luego, el vector de estado átomo-campo está dado por el producto externo, Eq 3.58, para un tiempo t

$$|\Psi_{a-c}(t)\rangle = |\Psi_a(t)\rangle \sum_n C_n(t)|n\rangle. \quad (3.71)$$

Con el vector de estado atómico $|\Psi_a(t)\rangle$ para dos niveles

$$|\Psi_a(t)\rangle = C_a(t)|a\rangle + C_b(t)|b\rangle, \quad (3.72)$$

la Eq. 3.71 se puede reescribir como

$$|\Psi_{a-c}(t)\rangle = \sum_n [C_{a,n}(t)|a, n\rangle + C_{b,n}(t)|b, n\rangle], \quad (3.73)$$

y para un tiempo posterior $t + \tau$ [20]

$$|\Psi_{a-c}(t + \tau)\rangle = \sum_n [C_{a,n}(t + \tau)|a, n\rangle + C_{b,n+1}(t + \tau)|b, n + 1\rangle], \quad (3.74)$$

con el operador de densidad dado por

$$\hat{\rho}(t + \tau) = \sum_i w_i |\Psi_{a-c}(t + \tau)\rangle \langle \Psi_{a-c}(t + \tau)|. \quad (3.75)$$

Suponiendo que inicialmente los átomos se encuentran en el nivel inferior

$$|\Psi_a(t)\rangle = |b\rangle, \quad (3.76)$$

el vector de estado átomo-campo inicial está dado por

$$|\Psi_{a-c}(t)\rangle = \sum_n C_{n+1}(t) |b, n + 1\rangle, \quad (3.77)$$

donde se usaron las condiciones iniciales para las amplitudes de probabilidad

$$C_{a,n}(t) = 0, \quad (3.78)$$

$$C_{b,n+1}(t) = C_{n+1}(t). \quad (3.79)$$

De las aproximaciones a primer y segundo orden, respectivamente, de las amplitudes de probabilidad $C_{a,n}$ y $C_{b,n+1}$ para un tiempo $(t + \tau)$ [20], se tiene para el estado superior

$$\begin{aligned} C_{a,n}(t + \tau) &\approx -ig\sqrt{n+1}\tau C_{b,n+1}(t) \\ &= -ig\tau\sqrt{n+1}C_{n+1}(t), \end{aligned} \quad (3.80)$$

y para el estado inferior

$$\begin{aligned} C_{b,n+1}(t + \tau) &\approx [1 - \frac{1}{2}g^2\tau^2(n+1)]C_{b,n+1}(t) \\ &= [1 - \frac{1}{2}g^2\tau^2(n+1)]C_{n+1}(t). \end{aligned} \quad (3.81)$$

A partir de las Eqs. 3.80y 3.81, se pueden obtener los elementos de matriz de densidad del campo de la Eq. 3.75 [20]

$$\rho_{a,n;a,m}(t + \tau) = \sum_i w_i C_{a,n}(t + \tau) C_{a,m}^*(t + \tau) \quad (3.82)$$

$$\rho_{a,n;a,m}(t + \tau) \simeq g^2\tau^2\sqrt{(n+1)(m+1)}\rho_{n+1,m+1}(t)$$

$$\rho_{b,n;b,m}(t + \tau) \simeq (1 - \frac{1}{2}g^2\tau^2n)(1 - \frac{1}{2}g^2\tau^2(n+m))\rho_{nm}(t) \quad (3.83)$$

$$\rho_{b,n;b,m}(t + \tau) \simeq [1 - \frac{1}{2}g^2\tau^2(n+m)]\rho_{nm}(t).$$

$$\rho_{n,m}(t + \tau) \simeq g^2 \tau^2 \sqrt{(n+a)(m+a)} \rho_{n+1,m+1}(t) + [1 - \frac{1}{2} g^2 \tau^2 (n+m)] \rho_{nm}(t). \quad (3.84)$$

Luego, la tasa de cambio de los elementos de matriz $\rho_{nm}(t)$ debido a los átomos que inicialmente se encuentran en el estado inferior $|b\rangle$ está dada por [20]

$$\dot{\rho}_{n,m}(t)|_{|b\rangle_a} = r_b [\rho_{nm}(t + \tau) - \rho_{nm}(t)]|_{|b\rangle_a}, \quad (3.85)$$

$$\dot{\rho}_{n,m}(t)|_{|b\rangle_a} = -\frac{1}{2} \mathcal{R}_b (n+m) \rho_{nm} + \mathcal{R}_b [(n+1)(m+1)]^{1/2} \rho_{n+1,m+1}, \quad (3.86)$$

donde el coeficiente $\mathcal{R}_b = r_b g^2 \tau^2$. De forma similar, para los átomos que se encuentran inicialmente en el estado $|a\rangle$, las amplitudes de probabilidad están dadas por [20]

$$C_{a,n}(t + \tau) = [1 - \frac{1}{2} g^2 \tau^2 (n+a)] C_n(t), \quad (3.87)$$

$$C_{b,n+1}(t + \tau) = i g \tau (n+1)^{1/2} C_n(t), \quad (3.88)$$

de forma que los elementos de matriz $\rho_{nm}(t)$ debido a los átomos que inicialmente se encuentran en el estado superior $|a\rangle$ está dada por [20]

$$\dot{\rho}_{n,m}(t)|_{|a\rangle_a} = -\frac{1}{2} \mathcal{R}_a (n+1+m+1) \rho_{nm} + \mathcal{R}_a \sqrt{nm} \rho_{n-1,m-1}, \quad (3.89)$$

con el coeficiente $\mathcal{R}_a = r_a g^2 \tau^2$.

Finalmente, la tasa de cambio de los elementos de la matriz de densidad está dada por [20]

$$\dot{\rho}_{n,m}(t) = \dot{\rho}_{mn}|_{|a\rangle_a} + \dot{\rho}_{n,m}|_{|b\rangle_a}, \quad (3.90)$$

y sustituyendo las Eq. 3.86 y 3.89

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{n,m}(t) = & -\frac{1}{2} [\mathcal{R}_a (n+1+m+1) + \mathcal{R}_b (n+m)] \rho_{nm} + \mathcal{R}_a \sqrt{nm} \rho_{n-1,m-1} \\ & + \mathcal{R}_b [(n+1)(m+1)]^{1/2} \rho_{n+1,m+1}, \end{aligned} \quad (3.91)$$

Particularmente, para $n = m$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{n,n}(t) = & -[\mathcal{R}_a (n+1) + \mathcal{R}_b n] \rho_{nn} + \mathcal{R}_a n \rho_{n-1,n-1} \\ & + \mathcal{R}_b (n+1) \rho_{n+1,n+1}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

y reacomodando, la ecuación maestra para la matriz de densidad del campo de fotones es [20]

$$\dot{\rho}_{n,m}(t) = -\mathcal{R}_a[(n+1)\rho_{nn} - n\rho_{n-1,n-1}] + \mathcal{R}_b[n\rho_{n,n} - (n+1)\rho_{n+1,n+1}]. \quad (3.93)$$

4. La máquina térmica de *faesonio*

En la búsqueda de una extensión cuántica de las máquinas térmicas, en la Ref. [14] se propone la máquina térmica de Carnot fotónica o máquina térmica de *faesonio*, que se observa en la Figura 3. Es un tipo de QHE que opera mediante el ciclo de Carnot y que se caracteriza por la naturaleza cuántica de su baño térmico a alta temperatura, denominado *faesonio*. A diferencia de la máquina de Carnot clásica, que funciona por medio de un gas ideal como sustancia de trabajo, la máquina de Carnot fotónica consta de una cavidad óptica perfectamente reflectante por la cual fluye un gas de fotones de un solo modo que genera un campo de radiación. Cuando el campo de radiación es excitado térmicamente a través de un baño térmico a temperatura T_H , una de las paredes de la cavidad se mueve como un pistón impulsado por la presión de radiación del campo.

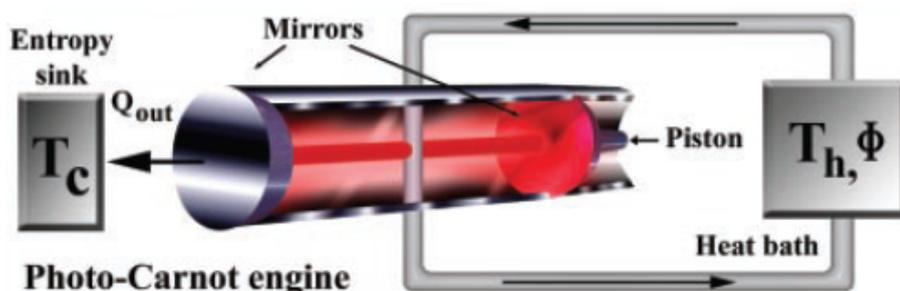


Figura 3: Máquina de Carnot fotónica. Consta de una cavidad óptica perfectamente reflectante, donde uno de sus espejos funciona como un pistón que es impulsado por la presión de radiación del campo contenido en ella. El reservorio atómico de *faesonio* a temperatura T_H se encuentra en contacto con la cavidad mientras que el otro espejo está en contacto con un sumidero de entropía. Imagen tomada de Scully et al. [14].

El baño térmico atómico o *faesonio*, Figura 4, consiste en un *ensamble* de átomos térmicos de tres niveles $|a\rangle$, $|b\rangle$ y $|c\rangle$, los cuales presentan ligera coherencia cuántica entre sus niveles inferiores. Es precisamente la presencia de la coherencia cuántica lo que le otorga el nombre al *ensamble*, pues los átomos constituyen un medio de fase ϕ coherente; en inglés *phase-coherent medium (phaesonium)*. Este reservorio atómico determina la temperatura de la radiación contenida en la cavidad y es resonante con el campo. El uso del *faesonio* como combustible para la máquina de Carnot fotónica, permite que los átomos calientes que lo componen emitan fotones a la vez que los átomos fríos absorban menos. Por otro lado, debido a la coherencia cuántica del *faesonio*, para describir a la máquina fotónica se debe añadir como parámetro a la fase ϕ , que es la fase relativa entre los niveles $|b\rangle$ y $|c\rangle$.

En la Figura 5 se muestra un esquema general de la máquina de Carnot fotónica de Scully et al. [14]. Inicialmente un *ensamble* de átomos sale de un *hohlraum* es decir, un dispositivo hueco o una cavidad idealizada que es utilizado para controlar la radiación que pase a través de él. Los átomos que escapan del *hohlraum* a temperatura T_H no presentan coherencia cuántica, sino que la adquieren después de pasar a través de una cavidad de

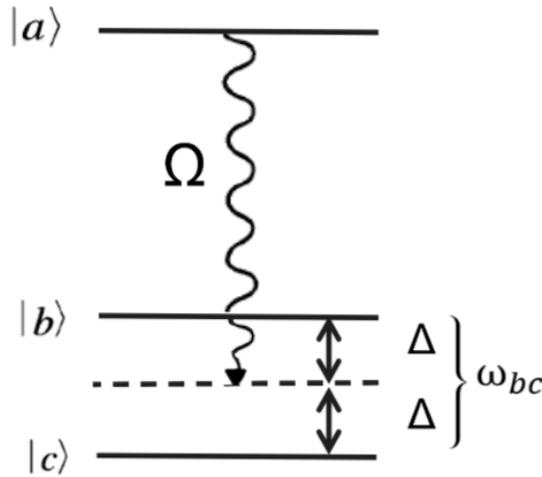


Figura 4: Esquema de un átomo de tres niveles con presencia de una ligera coherencia atómica entre los niveles más bajos. Las poblaciones de los niveles $|a\rangle$, $|b\rangle$ y $|c\rangle$ están dadas por ρ_{aa} , ρ_{bb} y ρ_{cc} . La frecuencia ω_{bc} es la diferencia de frecuencias entre los niveles $|b\rangle$ y $|c\rangle$ y el sistema interactúa con un campo de fotones de frecuencia Ω .

microondas que es resonante con la transición $|b\rangle \rightarrow |c\rangle$. De este modo se produce el *faesonio*, donde los átomos tienen coherencia ρ_{bc} de fase ϕ entre los niveles inferiores $|b\rangle$ y $|c\rangle$ que se encuentran casi degenerados. Cuando los átomos han adquirido coherencia, entran a la cavidad óptica donde se encuentra contenido el campo de radiación y se lleva a cabo el ciclo de Carnot mediante la interacción de los átomos del *faesonio* con los fotones. Al salir de la cavidad, los átomos han perdido la coherencia cuántica que habían adquirido y se encuentran a una temperatura menor a la que entraron debido a que el sistema atraviesa el ciclo de Carnot. En el ciclo, el *faesonio* cede calor al gas de fotones aumentando su temperatura y la entropía. Para que el ciclo continúe, en *ensamble* de átomos vuelve a ingresar al *hohlraum* y a la cavidad de microondas.

El análisis de los resultados obtenidos por Scully et al. [14] para la máquina de térmica de *faesonio*, comienza en la siguiente subsección con el estudio de la presión de radiación del campo de fotones, el cual opera como sustancia de trabajo. Posteriormente se introduce a los resultados fenomenológicos obtenidos por los autores, así como su contraste con los resultados derivados de la teoría cuántica de interacción átomo-campo para la obtención de la eficiencia de la QHE.

4.1. Presión de radiación

Dentro de la cavidad, los fotones actúan como sustancia donde operará el ciclo de la QHE fotónica de Scully et al. [14] siendo la presión de radiación la forma en que se transmite el trabajo mecánico a un pistón. Está descrita por la ecuación de estado para el gas de fotones de un modo deducida por Kim et al. en [22]. El cálculo de dicha ecuación proviene de considerar el hamiltoniano para un campo de radiación cuantizado con frecuencia propia de la cavidad Ω para un solo modo de radiación. A partir de la Eq. 3.19

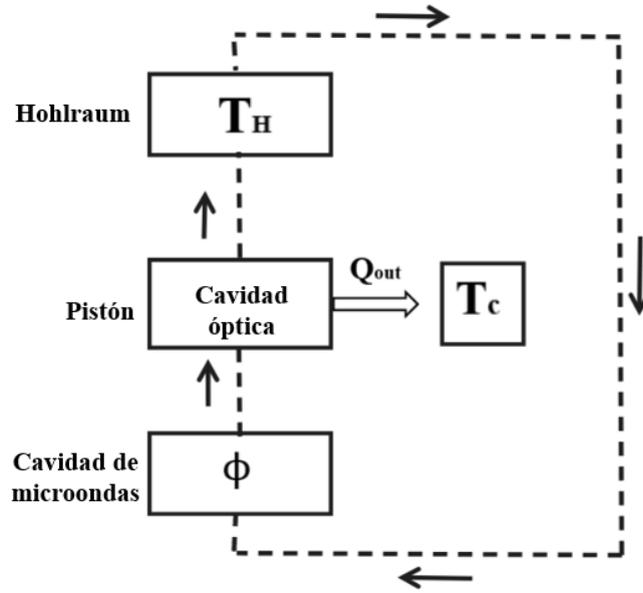


Figura 5: El ensamble de átomos de tres niveles sale del *hohlraum* a temperatura T_H . Posteriormente, el faesonio se obtiene después de que el ensamble entra en una cavidad de microondas y adquieren coherencia cuántica entre los niveles inferiores $|b\rangle$ y $|c\rangle$. Finalmente un haz de faesonio interacciona con el campo de fotones dentro de la cavidad.

$$\hat{H} = \hbar\Omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right), \quad (4.1)$$

se tiene que la energía del n -ésimo estado está dada por 3.20

$$E_n = \hbar\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (4.2)$$

Dado que el campo se encuentra en equilibrio térmico con las paredes de la cavidad [11] a una temperatura T , el operador de densidad para el sistema es

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta\hat{H}}}{Z}, \quad (4.3)$$

donde Z es el coeficiente de normalización escogido para que la traza de ρ sea unitaria, al mismo tiempo que se identifica en mecánica estadística como la función de partición canónica del sistema en equilibrio

$$Z = \text{tr}(e^{-\beta\hat{H}}) = \sum_n e^{-\beta E_n}. \quad (4.4)$$

Entonces, la población fraccional en la base de los eigenvectores de \hat{H} , $\{|\varphi_n\rangle\}$, está dada por

$$\rho_{nk} = \langle \varphi_n | \rho | \varphi_k \rangle = Z^{-1} \langle \varphi_n | e^{-\beta \hat{H}} | \varphi_k \rangle. \quad (4.5)$$

Para los elementos diagonales, $n = k$, se tiene

$$\begin{aligned} \rho_{nn} &= Z^{-1} \langle \varphi_n | e^{-\beta \hat{H}} | \varphi_n \rangle = Z^{-1} e^{-\beta E_n} \\ &= Z^{-1} e^{-n\beta \hbar \Omega} e^{-\frac{1}{2}\beta \hbar \Omega}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde la función de partición es

$$Z = e^{-\frac{1}{2}\beta \hbar \Omega} \sum_n e^{-n\beta \hbar \Omega}. \quad (4.7)$$

Considerando la convergencia de la suma

$$\sum_n e^{-n\beta \hbar \Omega} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \Omega}}, \quad (4.8)$$

los elementos diagonales se pueden escribir como

$$\rho_{nn} = e^{-n\beta \hbar \Omega} (1 - e^{-\beta \hbar \Omega}). \quad (4.9)$$

Luego, para los elementos fuera de la diagonal, se tiene

$$\begin{aligned} \rho_{nk} &= Z^{-1} \langle \varphi_n | e^{-\beta \hat{H}} | \varphi_k \rangle \\ &= Z^{-1} e^{-\beta E_k} \langle \varphi_n | \varphi_k \rangle, \end{aligned} \quad (4.10)$$

y como la base de eigenvectores es ortogonal, $\langle \varphi_n | \varphi_k \rangle = 0$, la matriz de densidad es diagonal, lo cual muestra que no hay coherencia entre estados estacionarios. Por otra parte, el número promedio de fotones para un solo modo del campo de radiación \bar{n} está dado por

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho_{nn} = (1 - e^{-\hbar \Omega / k_B T}) \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\hbar \Omega / k_B T}, \quad (4.11)$$

y considerando que la suma puede escribirse como

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} = -\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}, \quad (4.12)$$

y tomando en cuenta su convergencia, el número promedio de fotones es

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{h\beta\Omega} - 1}. \quad (4.13)$$

Es decir, la distribución de Bose-Einstein [19]. A partir de número promedio de fotones y el operador de densidad, se puede calcular la energía interna del gas de fotones

$$U = \langle \hat{H} \rangle = \bar{n}h\Omega = \frac{h\Omega}{e^{h\beta\Omega} - 1}, \quad (4.14)$$

y la entropía de von Neumann

$$S = -k_B \operatorname{tr}(\rho \ln \rho). \quad (4.15)$$

La entropía de von Neumann, introducida por John von Neumann al desarrollar su trabajo sobre la teoría de mediciones cuánticas [23], es una extensión mecánico-cuántica del concepto clásico de entropía. En este sentido, la entropía puede entenderse como una medida de la pérdida de información de un sistema cuántico [21] o una cantidad que mide el grado de correlación que presenta dicho sistema [24]. Para calcularla se sustituye el operador de densidad, tal que

$$\begin{aligned} S &= -k_B \operatorname{tr} \left\{ \rho \left[\ln \left(\frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z} \right) \right] \right\} = -k_B \operatorname{tr} \left\{ \rho \left[\ln(e^{-\beta \hat{H}}) - \ln Z \right] \right\} \\ &= -k_B \operatorname{tr} \left\{ \rho \left[-\beta \hat{H} - \ln Z \right] \right\} = k_B \operatorname{tr}(\rho \beta \hat{H}) + k_B \operatorname{tr}(\rho \ln Z), \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde, tomando de cuenta que $\operatorname{tr}(\rho) = 1$ y la definición 2.15

$$\operatorname{tr}(\rho \hat{H}) = \langle \hat{H} \rangle, \quad \operatorname{tr}(\rho \ln Z) = \ln Z, \quad (4.17)$$

entonces, la entropía es

$$S = k_B \beta \langle \hat{H} \rangle + k_B \ln Z. \quad (4.18)$$

Dado que la energía libre de Helmholtz está dada por

$$F = \langle \hat{H} \rangle - TS = \langle \hat{H} \rangle - T(k_B \beta \langle \hat{H} \rangle + k_B \ln Z), \quad (4.19)$$

y ya que $\beta = 1/k_B T$ y $\Omega = \frac{s\pi c}{L}$, se obtiene

$$F = -k_B T \ln Z = \frac{1}{2} \hbar s \pi c L^{-1} + k_B T \ln(1 - e^{\beta \hbar s \pi c L^{-1}}). \quad (4.20)$$

Finalmente, suponiendo que la cavidad óptica tiene una longitud L , un área transversal A y el cambio de volumen ocurre a lo largo de esta longitud,

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_T. \quad (4.21)$$

Calculando la derivada de la energía libre de Helmholtz F , se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial L} = -\frac{\hbar\Omega}{2L} - \frac{\hbar\Omega\bar{n}}{L} = -\frac{\hbar\Omega}{L}\left(\frac{1}{2} + \bar{n}\right), \quad (4.22)$$

tal que la ecuación de estado para la presión de radiación es

$$P = \frac{\hbar\Omega}{V}\left(\bar{n} + \frac{1}{2}\right). \quad (4.23)$$

Si se ignora el estado base, la presión de radiación está dada simplemente por

$$PV = \bar{n}\hbar\Omega. \quad (4.24)$$

Es decir, se puede considerar a la sustancia donde opera el ciclo como un gas ideal de fotones para propósitos del trabajo mecánico.

4.2. Resultados fenomenológicos

A continuación se presentan los resultados fenomenológicos obtenidos para la máquina de Carnot fotónica propuesta por Scully et al. [14]. Inicialmente, se describe que la tasa de cambio del número promedio de fotones \bar{n}_ϕ generados por el *faesonio*, es decir, en presencia de coherencia atómica, es

$$\dot{\bar{n}}_\phi = \alpha[2P_a(\bar{n}_\phi + 1) - (P_b + P_c)(1 + \epsilon \cos \phi)\bar{n}_\phi], \quad (4.25)$$

donde α es un factor de tasa, ϵ es proporcional a la magnitud de la coherencia atómica en los niveles inferiores $|b\rangle$ y $|c\rangle$, ϕ es la fase y P_a, P_b, P_c son los factores de Boltzmann o poblaciones térmicas dados por

$$P_i = \frac{\exp\left(\frac{E_i}{k_B T}\right)}{\sum_i \exp\left(\frac{E_i}{k_B T}\right)}, \quad (4.26)$$

para los niveles $|a\rangle, |b\rangle$ y $|c\rangle$. Este factor P_i determina la probabilidad relativa de un estado i en un sistema en equilibrio térmico a temperatura T [19].

La Eq. 4.25 es una ecuación maestra derivada fenomenológicamente donde los parámetros importantes son la fase ϕ y la coherencia ϵ . Resolviendo para el caso estacionario $\dot{\bar{n}}_\phi = 0$

$$2P_a(\bar{n}_\phi + 1) - (P_b + P_c)(1 + \epsilon \cos \phi)\bar{n}_\phi = 0, \quad (4.27)$$

luego

$$2P_a\bar{n}_\phi + 2P_a - (P_b + P_c)(1 + \epsilon \cos \phi)\bar{n}_\phi = 0, \quad (4.28)$$

$$2P_a = [(P_b + P_c)(1 + \epsilon \cos \phi) - 2P_a]\bar{n}_\phi, \quad (4.29)$$

por lo que despejando \bar{n}_ϕ , se obtiene que el número promedio de fotones producidos por el *faesonio* está dado por

$$\bar{n}_\phi = \left[\frac{2P_a}{(P_b + P_c)(1 + \epsilon \cos \phi) - 2P_a} \right] = \left[\frac{(P_b + P_c)(1 + \epsilon \cos \phi) - 2P_a}{2P_a} \right]^{-1}. \quad (4.30)$$

Reacomodando 4.30 como

$$\bar{n}_\phi = \left[\frac{P_b + P_c}{2P_a}(1 + \epsilon \cos \phi) - 1 \right]^{-1} = \left[\left(\frac{P_b + P_c}{2P_a} - 1 \right) + \frac{P_b + P_c}{2P_a}(\epsilon \cos \phi) \right]^{-1}, \quad (4.31)$$

se puede realizar una aproximación mediante la expansión binomial, tal que los dos primeros términos son

$$\bar{n}_\phi \cong \left(\frac{P_b + P_c}{2P_a} - 1 \right)^{-1} - \left(\frac{P_b + P_c}{2P_a} - 1 \right)^{-2} \left(\frac{P_b + P_c}{2P_a} \epsilon \cos \phi \right) + \dots \quad (4.32)$$

Nuevamente, reacomodando los términos se tiene que

$$\bar{n}_\phi \cong \left(\frac{P_b + P_c}{2P_a} - 1 \right)^{-1} \left[1 - \left(\frac{P_b + P_c}{2P_a} - 1 \right)^{-1} \left(\frac{P_b + P_c}{2P_a} \right) \epsilon \cos \phi \right]. \quad (4.33)$$

Por otro lado, si se toma en cuenta la razón de cambio fenomenológica del número promedio de fotones en ausencia de coherencia cuántica dada por

$$\dot{\bar{n}} = \alpha[2P_a(\bar{n} + 1) - (P_b + P_c)\bar{n}], \quad (4.34)$$

donde α es un factor de tasa, y se resuelve para el caso estacionario $\dot{\bar{n}} = 0$

$$2P_a(\bar{n} + 1) - (P_b + P_c)\bar{n} = 0, \quad (4.35)$$

$$2P_a\bar{n} + 2P_a - (P_b + P_c)\bar{n} = 0, \quad (4.36)$$

$$2P_a = [(P_b + P_c) - 2P_a]\bar{n}. \quad (4.37)$$

De despejar \bar{n} se obtiene

$$\bar{n} = \frac{2P_a}{(P_b + P_c) - 2P_a}, \quad (4.38)$$

y reacomodando, el número promedio de fotones en ausencia de coherencia cuántica es

$$\bar{n} = \left[\frac{(P_b + P_c)}{2P_a} - 1 \right]^{-1}. \quad (4.39)$$

Por lo tanto, la Eq. 4.33 se puede reescribir en términos de \bar{n} como

$$\bar{n}_\phi \cong \bar{n} \left[1 - \bar{n} \left(\frac{P_b + P_c}{2P_a} \right) \epsilon \cos \phi \right]. \quad (4.40)$$

Considerando que en el límite de alta temperatura todos los estados se vuelven igualmente probables, para el sistema de 3 niveles

$$P_a \sim P_b \sim P_c \sim \frac{1}{3}, \quad (4.41)$$

por lo que

$$P_b + P_c = \frac{2}{3}. \quad (4.42)$$

Entonces, ya que

$$\frac{P_b + P_c}{2P_a} = 1, \quad (4.43)$$

nuevamente se puede reescribir la Eq. 4.40, de forma que se obtiene como resultado que el número promedio de fotones producidos por el *faesonio* \bar{n}_ϕ está dado por

$$\bar{n}_\phi \cong \bar{n}(1 - \bar{n}\epsilon \cos \phi). \quad (4.44)$$

Luego, como el campo de radiación continúa siendo un campo térmico después de interactuar con los átomos coherentes en fase, el número promedio de fotones \bar{n}_ϕ está caracterizado por una sola temperatura T_ϕ . Para una máquina térmica de un solo átomo, la ecuación de estado está dada por [11]

$$PV = k_B T, \quad (4.45)$$

y a partir de 4.24, se obtiene para \bar{n}_ϕ

$$\bar{n}_\phi = \frac{k_B T_\phi}{\hbar \Omega}. \quad (4.46)$$

Posteriormente, como el número promedio de fotones, sin presencia de coherencia cuántica, está dado por la distribución de Bose-Einstein 4.13, se puede aproximar \bar{n} en términos de la temperatura T_H . Recordemos que inicialmente el *ensamble* de átomos de tres niveles carece de coherencia. Al entrar al *hohlraum* alcanza la temperatura T_H y posteriormente entra a la microcavidad donde adquiere la coherencia cuántica. Haciendo el desarrollo en serie de la función exponencial hasta el segundo término

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\beta\Omega} - 1}, \quad (4.47)$$

$$e^{\hbar\beta\Omega} \cong 1 + \hbar\beta\Omega + \dots,$$

se tiene que \bar{n} se puede aproximar como

$$\bar{n} \cong \frac{1}{\hbar\beta\Omega} = \frac{kT_H}{\hbar\Omega}. \quad (4.48)$$

Sustituyendo la Eq. 4.48 en la Eq. 4.44

$$\bar{n}_\phi \cong \frac{kT_H}{\hbar\Omega} (1 - \bar{n}\epsilon \cos \phi), \quad (4.49)$$

y en conjunto con 4.46

$$\frac{kT_\phi}{\hbar\Omega} = \frac{kT_H}{\hbar\Omega} (1 - \bar{n}\epsilon \cos \phi). \quad (4.50)$$

Despejando para T_ϕ

$$T_\phi = T_H (1 - \bar{n}\epsilon \cos \phi), \quad (4.51)$$

se obtiene la ecuación para la temperatura de radiación. A partir del resultado de la Eq. 4.51, se observa que la temperatura de la cavidad está determinada por la temperatura del baño térmico atómico, *faesonio*, la fase ϕ y ϵ , que es proporcional a la coherencia entre los niveles inferiores. Debido a que la Eq. 4.51 depende de la fase, se puede hacer una elección particular del valor de ésta, tal que si $\phi = \pi$ se obtiene

$$T_{\phi=\pi} = T_H(1 - \bar{n}\epsilon \cos \pi), \quad (4.52)$$

$$T_{\phi=\pi} = T_H(1 + \bar{n}\epsilon), \quad (4.53)$$

donde se observa que aunque ϵ sea muy pequeña, si \bar{n} es lo suficientemente grande, entonces

$$T_{\phi} > T_H. \quad (4.54)$$

Es decir, la temperatura que alcanza la cavidad es mayor a la temperatura a la que se prepara el baño térmico atómico, resultado que difiere de la máquina de Carnot clásica. En la máquina de Carnot clásica, ésta únicamente alcanza la temperatura del baño térmico a alta temperatura T_H . La Eq. 4.50 es el resultado principal obtenido por Scully et al. [14] y muestra que, mediante el uso de *faesonio* como combustible para la máquina de Carnot fotónica, así como una elección apropiada para la fase ϕ , la temperatura de la cavidad puede incrementarse. Lo que significaría que se puede modificar el comportamiento del gas de fotones mediante la fase de la coherencia cuántica del *faesonio*.

4.2.1. Eficiencia de la máquina térmica de *faesonio*

Para fundamentar el análisis heurístico anterior y hallar la eficiencia de la máquina térmica de *faesonio*, se hace uso de una extensión a tres niveles de la teoría cuántica para la interacción átomo-campo que se obtuvo para un átomo de dos niveles en la sección 3. Para calcular la eficiencia η_{ϕ} de la máquina térmica de *faesonio*, primero es importante determinar ϵ . Se tiene que la matriz de densidad está dada por

$$\hat{\rho} = \rho_{aa}|a\rangle\langle a| + \rho_{bb}|b\rangle\langle b| + \rho_{cc}|c\rangle\langle c| + \rho_{bc}|b\rangle\langle c| + \rho_{cb}|c\rangle\langle b|, \quad (4.55)$$

o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \rho_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{bb} & \rho_{bc} \\ 0 & \rho_{cb} & \rho_{cc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_a & 0 & 0 \\ 0 & P_b + \Delta & \rho_{bc} \\ 0 & \rho_{cb} & P_c - \Delta \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

donde los términos ρ_{aa} , ρ_{bb} y ρ_{cc} son las poblaciones de los niveles atómicos; ρ_{bc} y ρ_{cb} son las coherencias y Δ denota los cambios concomitantes en P_b y P_c . Por otro lado, la razón de cambio promedio de fotones es

$$\dot{\bar{n}}_{\phi} = \alpha[2\rho_{aa}(\bar{n}_{\phi} + 1) - (\rho_{bb} + \rho_{cc} + \rho_{bc} + \rho_{cb})\bar{n}_{\phi}]. \quad (4.57)$$

Comparando Eq. 4.56 con Eq. 4.57, de forma que Δ puede despreciarse, se obtiene

$$\dot{\bar{n}}_\phi = \alpha[2P_a(\bar{n}_\phi + 1) - (P_b + P_c + \rho_{bc} + \rho_{cb})\bar{n}_\phi], \quad (4.58)$$

e igualando con Eq. 4.25, obtenida fenomenológicamente para \bar{n}_ϕ , se tiene

$$2P_a(\bar{n}_\phi + 1) - (P_b + P_c)(1 + \epsilon \cos \phi)\bar{n}_\phi = 2P_a(\bar{n}_\phi + 1) - (P_b + P_c + \rho_{bc} + \rho_{cb})\bar{n}_\phi, \quad (4.59)$$

$$(P_b + P_c)(1 + \epsilon \cos \phi) = (P_b + P_c + \rho_{bc} + \rho_{cb}). \quad (4.60)$$

De la ecuación maestra para la matriz de densidad del campo de fotones impulsado por un haz atómico de dos niveles, dada en la sección 3, se hace una extensión para un baño térmico de *faesonio*. Se obtiene que la población fraccional es

$$\rho_{nn} = \left[\frac{2\rho_{aa}}{\rho_{bb} + \rho_{cc} + 2|\rho_{bc}| \cos \phi} \right]^n \left[1 - \frac{2\rho_{aa}}{\rho_{bb} + \rho_{cc} + 2|\rho_{bc}| \cos \phi} \right], \quad (4.61)$$

donde

$$\rho_{bc} + \rho_{cb} = 2|\rho_{bc}| \cos \phi, \quad (4.62)$$

de forma que la Eq. 4.60 se puede reescribir como

$$P_b + P_c + (P_b + P_c)\epsilon \cos \phi = P_b + P_c + 2|\rho_{bc}| \cos \phi, \quad (4.63)$$

$$(P_b + P_c)\epsilon \cos \phi = 2|\rho_{bc}| \cos \phi, \quad (4.64)$$

y despejando ϵ se obtiene

$$\epsilon = \frac{2|\rho_{bc}|}{P_b + P_c}, \quad (4.65)$$

Finalmente, sustituyendo Eq. 4.42 en Eq. 4.65, se obtiene que

$$\epsilon = 3|\rho_{bc}|, \quad (4.66)$$

y la temperatura de la cavidad en términos de la coherencia cuántica es

$$T_\phi = T_H(1 - 3\bar{n}|\rho_{bc}| \cos \phi). \quad (4.67)$$

Cuando la máquina térmica funciona por medio de átomos termales usuales, la eficiencia se calcula con la Eq. 2.9. Para ésta máquina térmica de *faesonio*, se tiene que $T_H \rightarrow T_\phi$,

por lo que, sustituyendo Eq. 4.67 en Eq. 2.9, se obtiene que la eficiencia de la máquina está dada por

$$\eta_\phi = 1 - \frac{T_C}{T_H} (1 - 3\bar{n}|\rho_{bc}|\cos\phi), \quad (4.68)$$

$$\eta_\phi = \eta_c - \frac{T_C}{T_H} 3\bar{n}|\rho_{bc}|\cos\phi. \quad (4.69)$$

tal que $\eta_\phi > \eta_c$ donde η_c es la eficiencia de la máquina de Carnot clásica. Este es otro resultado importante obtenido por Scully et al. [14]. La Eq. 4.69 muestra que la eficiencia de la máquina de *faesonio* tiene una eficiencia mayor a la de la máquina de Carnot clásica. Además, η_ϕ se puede descomponer en dos términos, la eficiencia clásica η_c y las contribuciones de la coherencia cuántica. Nuevamente, haciendo una elección particular de la fase, tal que $\phi = \pi$, se obtiene que la temperatura de la cavidad T_ϕ es

$$T_{\phi=\pi} = T_H (1 - 3\bar{n}|\rho_{bc}|). \quad (4.70)$$

y la eficiencia

$$\eta_{\phi=\pi} = \eta + \frac{T_C}{T_H} 3\bar{n}|\rho_{bc}|, \quad (4.71)$$

A partir de la Eq. 4.71, se observa que para el caso en que $T_H = T_C$, la eficiencia es

$$\eta_{\phi=\pi} = 3\bar{n}|\rho_{bc}|, \quad (4.72)$$

resultado que justifica la elección de $\phi = \pi$, ya que con ese valor de fase la máquina térmica de *faesonio* sería capaz de producir trabajo a partir de un solo baño térmico. Este resultado contradice el resultado clásico, ya que si en una máquina de Carnot clásica las temperaturas de los baños térmicos que se encuentran en contacto con ella son iguales $T_H = T_C$, la eficiencia es nula

$$\eta_C = 1 - \frac{T_H}{T_H} = 0. \quad (4.73)$$

A pesar de los resultados obtenidos por Scully et al. [14], no se quebranta ninguno de los postulados de la segunda ley de la termodinámica. La máquina térmica de *faesonio* es capaz de extraer trabajo con un solo baño térmico y en el ciclo el calor fluye de un baño térmico atómico de menor temperatura a una cavidad de mayor temperatura. De acuerdo con el postulado de Clausius, esto solamente es posible si hay una fuente externa que le agregue trabajo al sistema. Recordemos, de la Figura 5, que debido a que el *faesonio* solamente puede usarse una vez, se necesita de una fuente de energía externa. Cuando el *faesonio* interactúa con los fotones dentro de la cavidad, pierde la coherencia cuántica y lo que sale de la cavidad hacia el *hohlraum* es un *ensamble* de átomos de tres niveles a

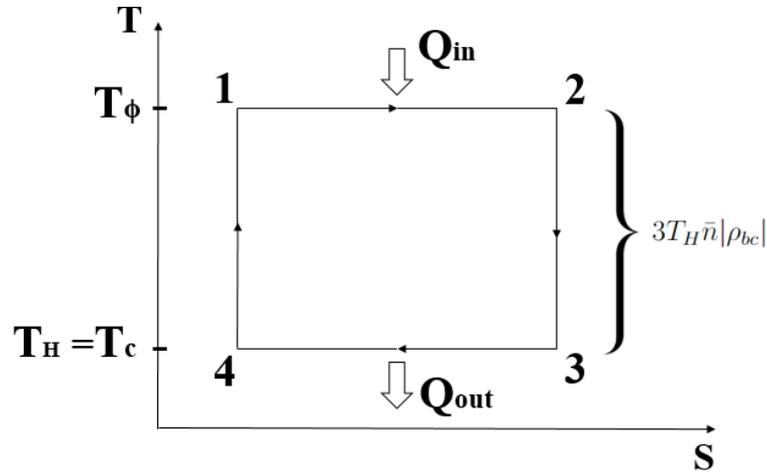


Figura 6: Diagrama T-S del ciclo de Carnot de la máquina de Carnot fotónica de Scully et al [14]. El ciclo consta de dos procesos isotermales ($1 \rightarrow 2$ y $3 \rightarrow 4$) y dos procesos adiabáticos ($2 \rightarrow 3$ y $4 \rightarrow 1$).

una menor temperatura y sin coherencia. Para volver a obtener *faesonio*, el *ensamble* pasa a través del *hohlraum* donde adquiere la temperatura T_H y luego pasa por la cavidad de microondas donde adquiere la coherencia. De esta forma está listo para entrar de nuevo a la cavidad óptica. La máquina térmica de *faesonio* no opera mediante un ciclo que extraiga calor del baño térmico a alta temperatura continuamente.

4.3. Ciclo termodinámico

Como se mencionó en un inicio, la máquina de Carnot fotónica funciona por medio del ciclo de Carnot. Tal como su análogo clásico, consta de cuatro procesos, dos isotermales y dos adiabáticos. En la Figura 6 se observa un diagrama T-S del ciclo para el caso donde $\phi = \pi$ y se tiene un solo reservorio $T_H = T_C$, caso para el cual ya se mostró que se puede obtener trabajo. En el proceso de expansión isoterma $1 \rightarrow 2$ el haz de *faesonio* a temperatura T_H se pone en contacto con el campo de un modo contenido en la cavidad. La excitación térmica del campo provoca que la presión de radiación mueva el pistón que se encuentra en uno de los extremos de la cavidad óptica, lo que constituye el proceso de expansión. Entra calor Q_{in} al sistema y a diferencia del caso clásico, la temperatura de la cavidad T_ϕ será mayor a la del baño térmico, relación que está dada por la Eq. 4.67. Posteriormente, al “apagar” el haz de *faesonio*, o bien aislar al sistema, ocurre una expansión adiabática donde ya no existe intercambio de calor, pero el pistón continúa moviéndose por lo que la temperatura del sistema disminuye de tal forma que la diferencia de temperatura entre el proceso isoterma $1 \rightarrow 2$ y el adiabático $2 \rightarrow 3$ es

$$T_\phi - T_H = 3T_H \bar{n} |\rho_{bc}|. \quad (4.74)$$

Luego, el ciclo continúa con una compresión isoterma $3 \rightarrow 4$, donde uno de los espejos de la cavidad se pone en contacto con otro baño térmico a temperatura T_C . Debido a la

compresión, el gas de fotones se calienta por encima de la temperatura T_C , por lo que se libera calor Q_{out} . Finalmente, ocurre un proceso de compresión adiabática $4 \rightarrow 1$, donde se aísla el sistema. Debido a la compresión y a que no hay intercambios de calor, la temperatura aumenta nuevamente a T_ϕ . De acuerdo con los resultados obtenidos por Scully et al. en [14], el *faesonio* logra que la máquina de Carnot fotónica opere entre el baño térmico atómico de temperatura T_H y otro a temperatura T_C incluso cuando se encuentran a la misma temperatura, $T_H = T_C$.

4.4. Reservorios correlacionados

A partir del modelo de máquina de Carnot fotónica de Scully et al. [14], Dillenschneider y Lutz [13] exploran los efectos de las correlaciones cuánticas para un baño térmico que presenta entrelazamiento cuántico. A diferencia de la máquina térmica de *faesonio*, en la Ref. [13] los autores proponen una máquina de Carnot fotónica que opera mediante un reservorio constituido por un haz de átomos de dos niveles que se encuentran correlacionados por pares y en estado termal entrelazado. La presencia de correlaciones cuánticas modifica el balance entre absorción y emisión de fotones en la cavidad a la vez que cambia su temperatura efectiva [13].

Se estudian dos casos: El primero consiste en que los dos átomos del par interactúan con la radiación dentro de la cavidad óptica, mientras que en el segundo caso únicamente interactúa uno de los átomos. En el primer caso, Figura 7, el haz de átomos de dos niveles cuánticamente correlacionados se encuentra a temperatura T_C y conforma el baño térmico a baja temperatura. El haz se envía a través de la cavidad y cada átomo interactúa con el campo de radiación produciendo un cambio en la temperatura de la cavidad. En este primer caso, la máquina realiza un ciclo inverso o de refrigeración, por lo que también considera la adición de trabajo al sistema y se pone en contacto la pared no móvil de la cavidad con un reservorio a alta temperatura T_H .

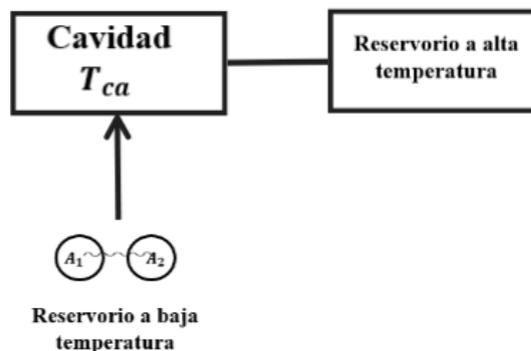


Figura 7: Primer caso: Un haz de átomos de dos niveles cuánticamente correlacionados que se encuentran a temperatura T_C entran a la cavidad óptica e interactúan con el campo de radiación. Una de las paredes de la cavidad se encuentra en contacto con un reservorio a alta temperatura.

Al igual que en la máquina térmica cuántica de [14], se observa que la eficiencia de la máquina se puede descomponer en la suma de la eficiencia clásica y las contribuciones obtenidas a partir de la presencia de las correlaciones cuánticas. La eficiencia térmica para el primer caso es

$$\eta = \eta_C + \frac{T_C}{T_H} \left(1 + \frac{1}{\beta \hbar \omega} \ln \mathcal{C} \right), \quad (4.75)$$

donde η_c es la eficiencia clásica, ω es la frecuencia del par de átomos y \mathcal{C} la concurrencia. Para el segundo caso, Figura 8, el reservorio atómico se encuentra a temperatura T_H , por lo que constituye el reservorio a alta temperatura. El haz de átomos de dos niveles, correlacionados por pares, se envía a través de la cavidad pero es solo uno de los átomos de cada par el que interactúa con el campo de radiación. En este caso, la cavidad se pone en contacto con un reservorio a baja temperatura y la eficiencia térmica está dada por

$$\eta = \eta_C + \frac{T_C}{T_H} \sqrt{\ln 2 (\delta(1|2) + C(1|2))}, \quad (4.76)$$

donde $\delta(1|2)$ es la discordia cuántica y C es el máximo de la información mutua \mathcal{J} .

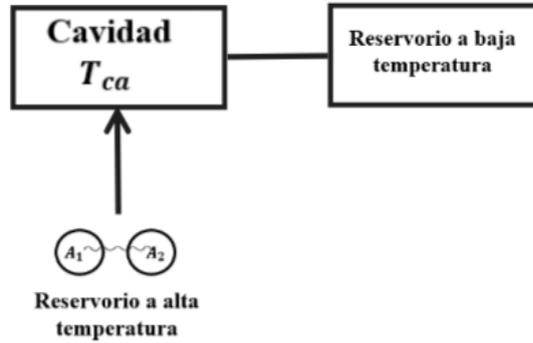


Figura 8: Segundo caso: Un haz de átomos de dos niveles cuánticamente correlacionados en pares, que se encuentran a temperatura T_H , entran a la cavidad óptica y solo uno de los átomos de cada par interactúa con el campo de radiación. Una de las paredes de la cavidad se encuentra en contacto con otro reservorio a baja temperatura.

Para ambos casos, Dillenschneider y Lutz obtuvieron que las eficiencias térmicas obtenidas a partir de la presencia de correlaciones cuánticas en el sistema, superan la eficiencia clásica del ciclo de Carnot, $\eta > \eta_C$, resultado que ratifica lo obtenido por Scully et al. [14]. Además, de Eq. 4.75 y Eq. 4.76 se observa que, al igual que la máquina de Carnot fotónica de [14], se puede obtener trabajo aún si las temperaturas de los reservorios son iguales, $T_C = T_H$. De igual forma, el modelo de Dillenschneider y Lutz opera con un baño térmico que se prepara en estados correlaciones mediante una fuente externa que agrega trabajo a la máquina, similar a lo que ocurre en la máquina de *faesonio*.

5. Conclusiones

Para el modelo de máquina térmica de *faesonio*, la propuesta de utilizar correlaciones cuánticas como recurso para operar una máquina térmica cuántica, o QHE por sus siglas en inglés, tiene beneficios en la eficiencia térmica que presenta la máquina, ya que es capaz de superar la eficiencia clásica. Así mismo, se encontró que es capaz de operar cuando los baños térmicos se encuentran a la misma temperatura $T_H = T_C$ sin quebrantar la segunda ley de la termodinámica. Esto sucede debido a que la máquina tienen una fuente de trabajo externo que permite preparar el *ensamble* de átomos de tres niveles en *faesonio*. También es importante destacar que la temperatura que alcanza la cavidad después de entrar en contacto con el *faesonio* es mayor que la temperatura de éste mismo, $T_\phi > T_H$ y que tanto T_ϕ como la eficiencia η_ϕ dependen de la fase ϕ . Estos resultados implican que se puede modificar el comportamiento de la sustancia de trabajo mediante la fase de las correlaciones cuánticas del baño térmico. Pero antes de determinar si efectivamente una máquina térmica cuántica operada mediante correlaciones cuánticas representan una ganancia de trabajo significativo, sería importante realizar un estudio del costo de preparar un *ensamble* de átomos coherentes, *faesonio*, y determinar si resulta en una ganancia efectiva.

Al igual que el modelo de Scully et al. [14], los dos modelos de Dillenschneider y Lutz [13] operan mediante baños térmicos que presentan correlaciones cuánticas. La motivación de los autores era mostrar a través de un modelo de máquina de Carnot fotónica como el de Scully et al. [14], que las correlaciones cuánticas modifican la eficiencia de una máquina térmica cuántica y verificar si es posible obtener trabajo útil. Además de mostrar que no solo podía hacerse mediante el uso de la coherencia cuántica, si no también con otras correlaciones cuánticas como el entrelazamiento. Al obtenerse, para sus modelos, una eficiencia mayor que la clásica, verificaron que el uso de las correlaciones cuánticas como recurso representan una mejora de las características de las QHE.

Como trabajo a futuro se esperaría explorar más a detalle los modelos propuestos por Dillenschneider y Lutz en la Ref. [13] para entender el papel que juegan las correlaciones cuánticas en las eficiencias térmicas obtenidas. Además de analizar del costo de preparar las correlaciones cuánticas para el baño térmico.

A. Oscilador armónico electromagnético

El hamiltoniano clásico de masa unitaria para el campo electromagnético de un solo modo está dado por

$$H = \frac{1}{2} \left[p^2(t) + \Omega^2 q^2(t) \right], \quad (\text{A.1})$$

Para obtener el hamiltoniano del campo electromagnético cuantizado se hace uso de la regla de correspondencia para reemplazar las variables canónicas $p(t)$ y $q(t)$ por operadores equivalentes [15]. De forma que el operador hamiltoniano para el campo cuantizado queda

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left[\hat{p}^2(t) + \Omega^2 \hat{q}^2(t) \right]. \quad (\text{A.2})$$

Dichos operadores \hat{q} y \hat{p} deben cumplir la relación canónica de conmutación

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (\text{A.3})$$

El hamiltoniano A.2 puede reescribirse en términos de operadores escalera \hat{a} y \hat{a}^\dagger , ya que de esta forma el hamiltoniano tiene una solución algebraica simple. Se tiene que los operadores escalera expresados están dados por

$$\sqrt{2\hbar\Omega}\hat{a}^\dagger = \Omega\hat{q} - i\hat{p}, \quad (\text{A.4})$$

y

$$\sqrt{2\hbar\Omega}\hat{a} = \Omega\hat{q} + i\hat{p}. \quad (\text{A.5})$$

Para obtener el operador \hat{q} , de A.5 se despeja $i\hat{p}$

$$i\hat{p} = \sqrt{2\hbar\Omega}\hat{a} - \Omega\hat{q}, \quad (\text{A.6})$$

y se sustituye en A.4

$$\begin{aligned} \omega\hat{q} - \sqrt{2\hbar\Omega}\hat{a} + \Omega\hat{q} &= \sqrt{2\hbar\Omega}\hat{a}^\dagger, \\ 2\Omega\hat{q} &= \sqrt{2\hbar\Omega}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \\ \hat{q} &= \frac{\sqrt{2\hbar\Omega}}{2\Omega}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (\text{A.8})$$

Para \hat{p} , se sustituye A.8 en A.6

$$\begin{aligned}
 i\hat{p} &= \sqrt{2\hbar\Omega}\hat{a} - \Omega\sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \\
 i\hat{p} &= \frac{2\sqrt{2\hbar\Omega}}{2}\hat{a} - \frac{\sqrt{2\hbar\Omega}}{2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \\
 i\hat{p} &= \frac{\sqrt{2\hbar\Omega}}{2}\hat{a} - \frac{\sqrt{2\hbar\Omega}}{2}\hat{a}^\dagger, \\
 i\hat{p} &= \frac{\sqrt{2\hbar\Omega}}{2}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger),
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \tag{A.10}$$

A partir de A.8 y de A.10, el hamiltoniano A.2 se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\hbar\Omega}{2}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) + \Omega^2 \frac{\hbar}{2\Omega}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \right], \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\hbar\Omega}{2} \left[(\hat{a}^\dagger + \hat{a})(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) - (\hat{a}^\dagger - \hat{a})(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \right], \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\hbar\Omega}{2} \left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a} \right), \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\hbar\Omega}{2} \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger \right), \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\hbar\Omega}{2} \left(2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 2\hat{a}\hat{a}^\dagger \right).
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Ya que el conmutador de los operadores escalera es

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1, \tag{A.12}$$

entonces

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = 1 + \hat{a}^\dagger\hat{a}, \tag{A.13}$$

y sustituyendo en A.11

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \frac{1}{2} \hbar\Omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 + \hat{a}^\dagger\hat{a} \right), \\
 &= \frac{1}{2} \hbar\Omega \left(2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 \right).
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

Finalmente se obtiene que el operador hamiltoniano para el campo electromagnético cuantizado es el hamiltoniano del oscilador armónico cuantizado dado por

$$\hat{H} = \hbar\Omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right). \quad (\text{A.15})$$

de manera que se obtiene que el hamiltoniano para el campo electromagnético cuantizado es el hamiltoniano del oscilador armónico cuantizado cuyos eigenestados están dados por $\{|n\rangle\}_{0,1,\dots}$. De la ecuación de eigenvalores

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (\text{A.16})$$

se obtiene

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\Omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \hbar\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle, \quad (\text{A.17})$$

donde

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (\text{A.18})$$

por lo que las energías estarán dadas por

$$E_n = \hbar\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (\text{A.19})$$

Referencias

- [1] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2011.
- [2] Heinz P. Breuer. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, 2007.
- [3] Sebastian Deffner and Steve Campbell. *Quantum Thermodynamics: An Introduction to the Thermodynamics of Quantum Information*. IOP Concise Physics, 2019.
- [4] Jochen Gemmer, Mathias Michel, and Günter Mahler. *Quantum Thermodynamics: Emergence of Thermodynamic Behavior Within Composite Quantum Systems, Lect. Notes Phys. 784*. Springer, 2009.
- [5] Enrico Fermi. *Thermodynamics*. Dover Publications, 1956.
- [6] Carl M. Bender, Dorje C. Brody, and Bernhard K. Meister. Quantum mechanical carnot engine. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33(24):4427, 2000.
- [7] H. T. Quan, Yu-xi Liu, C. P. Sun, and Franco Nori. Quantum thermodynamic cycles and quantum heat engines. *Phys. Rev. E*, 76:031105, 2007.
- [8] Patrick P. Potts. Introduction to quantum thermodynamics (lecture notes), 2019.
- [9] Asli T. Özdemir and Özgür E. Müstecaplıoğlu. Quantum thermodynamics and quantum coherence engines. *Turkish Journal of Physics*, 44(5):404–436, 2020.
- [10] Matías Batarce Pérez-García. Máquinas térmicas cuánticas en el límite cuasi-estacionario. Master’s thesis, Pontificia Universidad Católica de Chile, 2019.
- [11] Marlan O. Scully. Extracting work from a single heat bath via vanishing quantum coherence II: Microscopic model. *AIP Conference Proceedings*, 643(1):83–91, 2002.
- [12] Xi Zhengjun, Li Yongming, and Fan Heng. Quantum coherence and correlations in quantum system. *Scientific Reports*, 5, 2015.
- [13] Raoul Dillenschneider and Eric Lutz. Energetics of quantum correlations. *EPL*, 88(5):92–97, 2009.
- [14] Marlan O. Scully, M. Suhail Zubairy, Girish S. Agarwal, and Herbert Walther. Extracting work from a single heat bath via vanishing quantum coherence. *Science*, 299(5608):862–864, 2003.
- [15] Marlan O. Scully and M. Suhail Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [16] Allen L. Wasserman. *Thermal Physics: Concepts and Practice*. Cambridge University Press, 2011.
- [17] Herbert B. Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. John Wiley Sons, 1985.

- [18] J. J. Sakurai and Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2017.
- [19] Pierre Meystre and Murray Sargent III. *Elements of Quantum Optics*. Springer, 2010.
- [20] M. Sargent III, Marlan O. Scully, and W. E. Lamb. *Laser Physics*. Addison-Wesley, 1974.
- [21] Christopher Gerry and Peter Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2004.
- [22] Moochan Kim, Frank A. Narducci, Marlan O. Scully, and M. Suhail Zubairy. Quantum thermodynamics of a single-mode field and of the quantum afterburner. In Baldassare Di Bartolo, editor, *Spectroscopy of Systems with Spatially Confined Structures*, volume 90, pages 491–497. Springer Netherlands, 2002.
- [23] John von Neumann. Thermodynamik quantenmechanischer gesamtheiten. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1927:273–291, 1927.
- [24] M. Arciniegas-Alvarez, Roberto Franco Peñaloza, and Jereson Silva Valencia. Entropía de von neumann y el modelo de heisenberg xxz. *Revista de la Sociedad Colombiana de Física*, 41(3):576–579, 2009.