



# Exponentes de Lyapunov en fluidos polaritónicos II

**Autor:**

---

José Guadalupe Cundapi Cruz

**Asesor:**

---

Dr. Miguel Angel Bastarrachea Magnani

PROYECTO TERMINAL II: INVESTIGACIÓN TEÓRICA  
CLAVE 2111109. TRIMESTRE 23-I.

**Licenciatura en Física**  
**Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa**

19 Mayo 2023

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Fluido polaritónico interactuante</b>	<b>6</b>
2.1. Representación de pseudo-espín . . . . .	8
<b>3. Sistemas dinámicos</b>	<b>8</b>
3.1. Teoría de los sistemas dinámicos . . . . .	8
3.1.1. Estabilidad lineal de estados estables . . . . .	9
3.2. Subespacios invariantes . . . . .	15
3.3. Órbita periódica . . . . .	16
3.4. Técnica de sección de superficie de Poincaré . . . . .	20
3.5. <i>Manifolds</i> . . . . .	22
3.5.1. Variedad central . . . . .	22
3.5.2. Variedad estable . . . . .	23
3.5.3. Variedad inestable . . . . .	23
3.6. Ejemplo: Oscilador fijado . . . . .	25
3.6.1. Variedades del problema . . . . .	26
3.7. <i>Manifolds</i> y órbitas periódicas . . . . .	30
<b>4. Sistema dímero de polaritón</b>	<b>31</b>
4.1. Simetría y estabilidad . . . . .	32
4.1.1. Puntos fijos $F_a$ . . . . .	33
4.1.2. Puntos fijos $F_s$ . . . . .	34
4.1.3. Comportamiento $F_a$ y $F_s$ . . . . .	35
4.2. Dinámica del sistema . . . . .	36
4.3. Imbalance de los condensados . . . . .	39
<b>5. Sección de Poincaré</b>	<b>41</b>
5.1. Secciones para bombes representativos . . . . .	45
<b>6. Órbitas periódicas inestables</b>	<b>49</b>
6.1. Control de caos y UPOs . . . . .	49
6.2. Entropía generalizada . . . . .	50
6.3. Técnicas control de caos . . . . .	50
<b>7. Conclusión</b>	<b>52</b>
<b>A. Estabilidad de órbita periódica: Teoría de Floquet</b>	<b>53</b>
<b>B. Sistema dinámico del sistema dímero de polaritón</b>	<b>55</b>
<b>C. Fase del condensado</b>	<b>60</b>
<b>D. Matriz Jacobiana del sistema dímero de Polaritón</b>	<b>62</b>

<b>E. Codigos: calculo de exponentes de Lyapunov</b>	<b>64</b>
E.1. MATLAB . . . . .	64
E.2. PYTHON . . . . .	67

## Resumen

El caos dinámico es un fenómeno que se observa en sistemas clásicos, donde surge un comportamiento aperiódico y altamente sensible a las condiciones iniciales en la evolución temporal determinista a largo plazo. Un sistema interesante para el estudio del caos clásico y su posible correspondencia con el caos cuántico es el de los excitones-polaritones formados en materiales bidimensionales dentro de microcavidades ópticas. Los excitones-polaritones son cuasipartículas que resultan del acoplamiento fuerte entre fotones y excitaciones materiales. Estos sistemas ofrecen una plataforma única para investigar fenómenos cuánticos macroscópicos, como la condensación de Bose-Einstein, la superfluidez y la superconductividad. En este proyecto, se dará continuidad al trabajo realizado durante el Proyecto Terminal 1 **Exponentes de Lyapunov en fluidos polaritónicos**, donde se estudió la dinámica de dos fluidos polaritónicos interactuantes en función de los parámetros del sistema mediante la resolución de la ecuación de Gross-Pitaevskii. Se aprendió a calcular los exponentes de Lyapunov, que representan la tasa de separación exponencial entre trayectorias con condiciones iniciales cercanas, con el fin de caracterizar el caos presente en el sistema. En esta etapa, se realiza un análisis detallado del sistema dimero de polaritón interactuante a través de las ecuaciones de spin. Se investigan las soluciones del sistema en función del parámetro de bombeo, considerando diferentes valores y condiciones iniciales aleatorias. Se observa que para valores de bombeo pequeños, el sistema se encuentra en un estado débilmente excitado con baja ocupación de los estados excitados y sin polarización significativa. A medida que aumenta el bombeo, se encuentran comportamientos más complejos, como polarización significativa y trayectorias periódicas. Se identifica el fenómeno de saturación en un bombeo alto, donde una especie se bombea intensamente y su densidad aumenta, mientras que la densidad de la otra especie disminuye debido a la interacción repulsiva. Estos resultados se respaldan mediante la sección de Poincaré, donde se observan estructuras y patrones que indican la presencia de atractores en el sistema. Se destaca la consistencia y reproducibilidad de los resultados con respecto a una referencia principal. El estudio y la aplicación del control de caos en el sistema dimero de polaritón interactuante ofrecen importantes implicaciones teóricas y prácticas. En el ámbito teórico, proporciona una comprensión más profunda de la dinámica y los mecanismos de formación del caos en sistemas cuánticos y clásicos. A partir de este análisis, se propone la búsqueda de órbitas periódicas inestables (UPOs, por sus siglas en inglés) y la implementación del control de caos como pasos futuros para profundizar en el estudio y la comprensión de la dinámica del sistema.

## **Palabras clave**

Polariton, GPE, Condensado de polariton, Dímero de polaritón, Sistemas dinámicos, Estabilidad de sistemas dinámicos, Órbitas periódicas, UPOs, Manifolds invariantes, Sección de Poincaré, Control de procesos caóticos, Floquet, Exponentes de Lyapunov code.

## 1. Introducción

En un semiconductor se puede generar una cuasipartícula conocida como excitón el que consiste en un hueco y un electrón ligados. Cuando la luz alcanza un semiconductor puede excitar electrones que se encuentran en la banda de valencia y mandarlos a la banda de conducción, el electrón promovido queda ligado al hueco que deja en el material (por interacción coulombiana) [1]. Si se encierra al excitón en una microcavidad óptica, estructuras permiten controlar las propiedades de emisión óptica de los materiales ubicados en su interior, por lo general hechas de reflectores de Bragg distribuidos (DBR, por sus siglas en inglés) [2], el fotón que se emite (debido a que el exciton decae) puede ser reabsorbido por el material resurgiendo el excitón, cuyo proceso se repite continuamente. Si el fenómeno de reabsorción sucede más rápido que el tiempo de duración de los fotones en la cavidad, se dice que el acoplamiento entre la luz y materia es fuerte, de esta manera los fotones y excitones en la cavidad pierden su identidad dando lugar a un nuevo estado cuántico [3], el polaritón [4], cuya herencia principal radica en que puede interactuar y asociarse en grandes cantidades, manifestandose macroscópicamente, exhibiendo condensados de Bose Einstein y presentando propiedades como la superfluidez [5].

Con el trabajo que se realizó durante el Proyecto Terminal 1 [6] donde se estudio la dinámica en función de parametros del sistema y se aprendio a calcular los exponentes de Lyapunov, para así verificar la presencia de caos en este sistema. Este proyecto terminal tiene como finalidad continuar con el estudio del sistema dímero de polaritón, que se establece en la Ref. [7], de modo que se pueda terminar la caracterización del espacio fase del sistema, proporcionar la base teórica para el estudio de estabilidad de los sistemas dinámicos, profundizar el estudio de órbitas periodicas (para comprender la dinámica global de un sistema dinámico) y su estabilidad (regiones de atracción, repulsión y los subespacios que se generan en su estudio y por ende las variedades invariantes estables e inestables asociados a estos), además de plantear las ideas de control de caos (para estabilizar y manipular sistemas dinámicos caóticos). El control implica búsqueda y el dominio de órbitas periodicas inestables (UPOs, por sus siglas en ingles), que nos brindan información estadística y propiedades macroscopicas del sistema.

## 2. Fluido polaritónico interactuante

En la física de la materia condensada, un excitón es una cuasipartícula que se forma por la interacción electrostática entre un electrón y un hueco en un sólido, como un semiconductor. Cuando un electrón, que normalmente se encuentra en un estado de baja energía, es excitado a un nivel de energía más alto por la absorción de un fotón [8], puede saltar de la banda de valencia a un nivel de energía más alto, dejando un “hueco” o vacante en la banda donde estaba originalmente. La interacción electrostática entre el electrón excitado y el hueco resultante crea un par excitónico, que es una partícula que tiene carga neta cero.

Los polaritones son cuasipartículas que resultan de la fuerte interacción entre excitones y fotones en una cavidad semiconductor. En este sistema, los excitones, que son las interacciones entre electrones y huecos, se acoplan con los modos de resonancia de la cavidad (fotones confinados) formando nuevos estados llamados polaritones. El acoplamiento fuerte entre excitones y fotones en la cavidad semiconductor crea un nuevo conjunto de estados de energía que pueden ser descritos como una mezcla cuántica de excitaciones de materia (excitones) y excitaciones de luz (fotones). En otras palabras, los polaritones son híbridos de excitones y fotones. Una de las propiedades interesantes de los polaritones es su capacidad para formar estados cuánticos macroscópicos, como los superfluidos de polaritones (debido a su herencia excitónica) [9]. La ecuación de Gross-Pitaevskii (GPE, por sus siglas en inglés) es una aproximación de campo medio para las interacciones entre partículas que describe la dinámica del condensado a temperatura cero [10]. Para describir un fluido de polaritones interactuantes se emplea el modelo dímero de polaritón que describe la interacción de dos fluidos cuánticos de luz interactuantes de espín contrario, generados por luz incidente polarizada. El modelo de dímero de polaritón, considera que los polaritones se acoplan en pares, formando “dímeros”. Cada dímero se comporta como un estado cuántico, y la dinámica de los dímeros se puede describir mediante la ecuación de Gross-Pitaevskii impulsada y disipativa [7].

Consideramos dos condensados de polaritones con espín distinto, descritos por los parámetros de orden  $\Psi_{+1}$  y  $\Psi_{-1}$ , que obedecen a las ecuaciones de Gross-Pitaevskii, como se indica en la referencia [11].

$$\frac{d\Psi_{\pm 1}}{dt} = \frac{1}{2}(rN_{\pm 1} - \Gamma)\Psi_{\pm 1} - \frac{1}{2}(\gamma - i\varepsilon)\Psi_{\mp 1} - \frac{i}{2}[g_1|\Psi_{\pm 1}|^2 + g_2|\Psi_{\mp 1}|^2]\Psi_{\pm 1} \quad (2.1)$$

acopladas a las ecuaciones para las densidades  $N_{\pm 1}$  de los dos depósitos excitados no resonantemente

$$\frac{dN_{\pm 1}}{dt} = P - [\Gamma_R + r|\Psi_{\pm}|^2]N_{\pm 1}. \quad (2.2)$$

En las ecuaciones 2.1 y 2.2  $\Gamma$  y  $\Gamma_R$  representan las tasas de disipación del polaritón y del depósito,  $r$  define la tasa con la cual el condensado absorbe polaritones y  $P$  es el bombeo externo no resonante que los genera, el cual es el mismo para ambos depósitos, por lo que el sistema es simétrico ante el operador de paridad que cambia el espín de los polaritones.  $\varepsilon$  es el acoplamiento de tunelaje de Josephson de los dos condensados acompañado de un canal de decaimiento  $\gamma$ . Los parámetros  $g_1$  y  $g_2$  definen la interacción entre los polaritones

de acuerdo a su espín. Los parámetros  $g$ , combinados con el bombeo<sup>1</sup>  $P$  permite observar diferentes tipos de dinámica, despreciándose la interacción de los polaritones con las partículas del depósito. Además de evitar la sobrecarga del modelo con parámetros adicionales.

Para tratar con cantidades observables, se introducen parámetros re-escalados  $\psi_{\pm 1} = (r/\Gamma_R) \Psi_{\pm 1}$ , ocupaciones del deposito  $\tilde{N}_{\pm 1} = rN_{\pm 1}$ , constantes de interacción  $\alpha_{1,2} = (\Gamma_R/r)g_{1,2}$  y bombeo externo  $p = rP/\Gamma_R$ . De manera que la ecuación 2.2 se reescribe como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d\tilde{N}_{\pm 1}}{dt} &= p \frac{\Gamma_R}{r} - \left[ \Gamma_R + r \frac{\Gamma_R}{r} |\Psi_{\pm 1}|^2 \right] \frac{\tilde{N}_{\pm 1}}{r} \\ \frac{d\tilde{N}_{\pm 1}}{dt} &= \Gamma_R \left( p - (1 + |\Psi_{\pm 1}|^2) \tilde{N}_{\pm 1} \right) \\ \Gamma_R^{-1} \frac{d\tilde{N}_{\pm 1}}{dt} &= p - (1 + |\Psi_{\pm 1}|^2) \tilde{N}_{\pm 1} \\ \Gamma_R^{-1} \frac{d\tilde{N}_{\pm 1}}{dt} &= p - (1 + n_{\pm 1}) \tilde{N}_{\pm 1}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

De donde  $n_{\pm 1} = |\Psi_{\pm 1}|^2$  son las densidades de las especies en el condensado. Con la aproximación de reservorio estático, es decir la tasa de disipación del reservorio es mucho más rápida que la tasa de disipación de los polaritones ( $\Gamma_R \gg \Gamma$ ), de modo que el lado derecho de la ecuación 2.3 se hace cero y las ocupaciones en el deposito se convierten en

$$\tilde{N}_{\pm 1} = \frac{p}{(1 + |\Psi_{\pm 1}|^2)} = \frac{p}{(1 + n_{\pm 1})}$$

De igual manera se reescribe la ecuación 2.1 con los elementos ya mencionados y se obtiene:

$$\frac{d\psi_{\pm 1}}{dt} = \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1 + n_{\pm 1}} - \Gamma \right] \psi_{\pm 1} - \frac{1}{2} (\gamma - i\varepsilon) \psi_{\mp 1} - \frac{i}{2} [\alpha_1 |\psi_{\pm 1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{\mp 1}|^2] \psi_{\pm 1} \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>La fuente del bombeo es por lo general sintonizada a una energía muy alejada del estado base de los polaritones en la cavidad. Los polaritones también se pueden bombear electricamente, pero es difícil agregar los electrones de manera que se mejore la calidad de la cavidad y la vida útil de los polaritones, consiste en inyectar eléctricamente electrones y huecos en el interior de la capa de cavidad [12].

## 2.1. Representación de pseudo-espín

El vector de pseudo-espín es una forma útil de describir y visualizar el sistema, ya que directamente corresponde a los componentes de polarización de Stokes ( $S_z$  y  $S$  pueden ser medidos experimentalmente) en cuanto  $S_x$ ,  $S_y$  describen cómo interactúan y se acoplan las especies de polaritones en el sistema.

La excitación no resonante polarizada linealmente de una microcavidad semiconductor produce densidades de excitones de espín arriba (+) y de espín abajo (-). Los condensados de polaritones atrapados ópticamente pueden estar con un estado de polarización bajo bombeo linealmente polarizado [13], por lo que nos interesa poder relacionar las ocupaciones y la fase de las especies en el condensado.

Para ello es conveniente utilizar el vector de pseudo espín  $\mathbf{S}$  que se define como

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \Psi^\dagger \bar{\sigma} \Psi, \quad (2.5)$$

donde  $\Psi^\dagger = [\psi_{+1}^\dagger \psi_{-1}^\dagger]$ , es el conjugado de  $\Psi = [\psi_{+1} \psi_{-1}]^T$ ,  $\psi_{\pm 1} = \sqrt{n_{\pm 1}} e^{i(\Phi \mp \phi)}$ .  $\bar{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  con  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  las matrices Pauli.

La deducción del sistema de ecuaciones que rigen el comportamiento del espín se puede ver en el Apéndice B, mismas que han sido ya estudiadas en la referencia principal de estudio (véase Ref. [7]).

El estudio de los sistemas dinámicos es relevante para comprender cómo evolucionan y cambian en el tiempo, lo cual es fundamental para analizar su comportamiento y predecir su futuro.

## 3. Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico caótico es un sistema que exhibe una sensibilidad a las condiciones iniciales y cuyo comportamiento de las trayectorias soluciones presenta una estructura compleja [14]. Aunque los sistemas caóticos son intrínsecamente inestables debido a su sensibilidad a las condiciones iniciales, es posible identificar patrones y estructuras estables en su comportamiento a largo plazo [15]. Estudiar la estabilidad, se refiere a la capacidad de un sistema para mantenerse en un estado de equilibrio a lo largo del tiempo a pesar de las perturbaciones o cambios en las condiciones iniciales [16], permite comprender cómo se forman y mantienen los atractores caóticos, lo cual es fundamental para entender la dinámica y la evolución del sistema. Comprender la estabilidad en los sistemas caóticos es esencial para predecir y controlar su comportamiento (manipular el sistema para evitar el avance a regiones no deseadas).

### 3.1. Teoría de los sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es un objeto o proceso que evoluciona en el tiempo, donde la evolución futura del sistema está determinada por su estado presente. Está caracterizado por

un conjunto de variables que describen el estado del sistema, y un conjunto de ecuaciones matemáticas que rigen cómo cambian estas variables con el tiempo [14]. Un sistema dinámico puede ser de naturaleza continua o discreta [17], lineal o no lineal [18], determinista o estocástico [19].

Un sistema dinámico continuo se constituye por un conjunto de variables  $x_n$  que describen el estado del sistema, un conjunto de parámetros de control  $\mu$  que influyen en el comportamiento del sistema y una serie de ecuaciones matemáticas  $f_n$  que rigen cómo estas variables cambian con el tiempo. El estado del sistema dinámico continuo en el instante de tiempo  $t$  estará determinado por el valor de las  $n$  variables de estado

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

Cuyo cambio de estado del sistema estará representado por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n(t), t; \mu) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n(t), t; \mu) \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n(t), t; \mu) \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n(t), t; \mu) \end{aligned} \quad (3.1)$$

La ec. 3.1 puede ser re-escrita simplemente como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t; \mu) \quad (3.2)$$

$\dot{\mathbf{x}} = dx/dt$  indica el cambio respecto al tiempo de las variables de estado,  $\mathbf{x}$  es el vector de estados de las variables,  $t$  es la variable independiente tiempo y  $\mu$  es el vector de parámetros del sistema.

Un sistema dinámico discreto es un sistema matemático que cambia de estado en forma discreta, es decir, solo puede tomar valores específicos en momentos determinados del tiempo. A diferencia de los sistemas dinámicos continuos, que cambian de estado de manera continua, los sistemas dinámicos discretos avanzan en pasos discretos, que generalmente se definen en términos de una función de transición o una ecuación de recurrencia.

En general, una ecuación de recurrencia para un sistema dinámico discreto se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) = f(\mathbf{x}(t_n), t_n; \mu), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.3)$$

Aquí,  $\mathbf{x}(t_n)$  representa el estado del sistema en el tiempo discreto  $t_n$ , y  $f(\mathbf{x}(t_n), t_n; \mu)$  es una función que describe la evolución del sistema de un estado a otro en función del tiempo discreto  $t_n$  y los parámetros  $\mu$  del sistema. La secuencia de tiempos discretos puede ser cualquier secuencia adecuada, como  $\{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$  con  $n = 1, 2, 3, \dots$ , y no necesariamente tiene que ser una secuencia de enteros consecutivos.

### 3.1.1. Estabilidad lineal de estados estables

Un estado  $x^*$  de un sistema dinámico se dice que es un punto fijo si, para cualquier condición inicial  $x(0)$  suficientemente cercana a  $x^*$ , la solución  $x(t)$  del sistema dinámico converge a  $x^*$  cuando  $t$  tiende a infinito.

Formalmente, se dice que  $x^*$  es un punto fijo si  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$  para cualquier condición inicial  $x(0)$  suficientemente cercana a  $x^*$ .

Esta definición nos muestra que un estado de punto fijo en un sistema dinámico es aquel en el cual el sistema tiende a converger a dicho estado a medida que el tiempo tiende a infinito, independientemente de la condición inicial cercana a dicho estado, de modo que un estado de punto fijo satisface:

$$\dot{x}(x^*) = \mathbf{F}(x^*, t; \mu) = 0 \quad (3.4)$$

La estabilidad lineal de un estado estable en un sistema dinámico se puede analizar mediante el estudio de las soluciones de las ecuaciones linealizadas alrededor del punto fijo. La idea básica es que si las soluciones de las ecuaciones linealizadas convergen hacia el punto fijo, entonces se dice que el punto fijo es estable; en cambio, si las soluciones divergen del punto fijo, entonces se dice que el punto es inestable. El análisis de estabilidad lineal se basa en la aproximación de la dinámica del sistema en las proximidades del estado estable mediante un desarrollo en serie de Taylor<sup>2</sup> alrededor del punto de equilibrio [14, 16].

Considerando un sistema como en la ec. 3.2 y un estado estable  $x = x^*$  que satisface la condición de la ec. 3.4, se quiere conocer cual es el comportamiento de las órbitas cerca de dicho punto.

$$x(t) = x^* + \eta(t); \quad \eta(t) \longrightarrow \text{pequeño}$$

Cuya aproximación en serie de Taylor alrededor de  $x^*$  queda:

$$\frac{dx}{dt} \cong [F(x^*) + DF(x^*) \cdot \eta + \mathcal{O}(\eta^2)] \quad (3.5)$$

Donde  $\mathcal{O}(\eta^2)$  son descartables y  $F(x^*) = 0$  por la condición 3.4.

$$\boxed{\frac{dx}{dt} \cong DF(x^*) \cdot \eta = \frac{d\eta}{dt}} \quad (3.6)$$

Esto permite expresar la dinámica del sistema en términos de una matriz jacobiana, que es una matriz de coeficientes que describen cómo las variables del sistema se relacionan entre sí en las proximidades del estado estable. La matriz jacobiana se calcula evaluando las derivadas parciales de las funciones del sistema con respecto a cada una de las variables del sistema en el estado estable. Luego, se evalúa la matriz jacobiana en el estado punto fijo y se diagonaliza para obtener los autovalores y autovectores correspondientes. Los autovalores podrán ser reales o complejos en parejas de pares conjugados (cuando las

<sup>2</sup>La aproximación de serie de Taylor es una técnica matemática que se utiliza para aproximar una función alrededor de un punto mediante una serie infinita de términos de la forma  $a_n(x - a)^n$ , donde  $a$  es el punto alrededor del cual se está aproximando la función y  $n$  es un número entero no negativo que indica el orden de la aproximación. La aproximación en serie de Taylor de una función  $f(x)$  alrededor del punto  $a$  hasta el orden  $n$  se puede escribir como:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

donde  $f^{(k)}(a)$  denota la  $k$ -ésima derivada de la función  $f$  evaluada en el punto  $a$  y  $k!$  es el factorial de  $k$ .

ecuaciones tienen soluciones complejas, el polinomio característico tendrá raíces complejas conjugadas. Esto se debe a la propiedad de los polinomios de coeficientes reales de tener raíces complejas conjugadas si alguna de ellas es compleja [13]).

La ec. 3.6 es un problema del tipo

$$\frac{dy}{dt} = A \cdot y,$$

es una ecuación diferencial lineal de primer orden, donde  $A$  es una matriz constante (dado que la linearización es local, se obtiene evaluando la matriz jacobiana del sistema en el punto fijo) y  $y$  es un vector de funciones desconocidas de la variable  $t$ . Podemos relacionar esta ecuación con la ecuación de valores propios  $Ay = \lambda y$ , donde  $\lambda$  es un escalar y  $y$  es un vector propio correspondiente a  $\lambda$ .

Supongamos que  $A$  es diagonalizable, lo que significa que existe una matriz invertible  $P$  tal que  $A = PDP^{-1}$ , donde  $D$  es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los valores propios de  $A$  y  $P$  es una matriz cuyas columnas son los vectores propios correspondientes. Entonces, podemos escribir la solución general de la ecuación  $\dot{y} = Ay$  como:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v_i \quad (3.7)$$

donde  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son constantes arbitrarias,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son los valores propios de la matriz  $A$ , y  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son los correspondientes vectores propios.

Para verificar que la solución general  $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$  satisface la ecuación diferencial  $\dot{y} = Ay$ , debemos sustituirla en la ecuación y comprobar que se cumple.

Primero, tomemos la derivada de la solución general con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t) &= \frac{d}{dt} (c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n) \\ &= c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n \lambda_n e^{\lambda_n t} v_n \\ &= \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + \lambda_n c_n e^{\lambda_n t} v_n \end{aligned}$$

Luego, multipliquemos la matriz  $A$  por la solución general:

$$\begin{aligned} Ay(t) &= A (c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n) \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} Av_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} Av_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} Av_n \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} \lambda_1 v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \lambda_2 v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \lambda_n v_n \end{aligned}$$

Si las columnas de la matriz  $A$  corresponden a los vectores propios  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , entonces  $Av_i = \lambda_i v_i$ , y por lo tanto,  $Ay(t) = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + \lambda_n c_n e^{\lambda_n t} v_n$ .

De esta manera, podemos ver que  $\dot{y}(t) = Ay(t)$  se cumple, dado que:

$$\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + \lambda_n c_n e^{\lambda_n t} v_n = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + \lambda_n c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

Para encontrar los valores propios de una matriz  $A$ , necesitamos resolver la ecuación característica:

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

donde  $I$  es la matriz identidad del mismo tamaño que  $A$ . Los valores de  $\lambda$  que hacen que esta ecuación sea verdadera son los valores propios de la matriz  $A$ .

Supongamos que tenemos la ecuación diferencial  $\dot{y} = A \cdot y$ , donde  $y$  es un vector y  $A$  es una matriz constante. Al considerar una transformación del tipo

$$z(t) = T \cdot y(t)$$

como se hace en [16], tenemos la ecuación  $\dot{z} = T \cdot \dot{y}$ , donde  $z$  es otro vector y  $T$  es una matriz constante. Si definimos  $C = T \cdot A \cdot T^{-1}$ , entonces podemos transformar la ecuación  $\dot{z} = T \cdot \dot{y}$  en la forma  $\dot{z} = C \cdot z$  de la siguiente manera:

Empezamos por reemplazar  $\dot{y}$  por  $A \cdot y$  en la ecuación  $\dot{z} = T \cdot \dot{y}$  para obtener:

$$\dot{z} = T \cdot (A \cdot y) = (T \cdot A) \cdot y$$

Luego, podemos multiplicar ambos lados de esta ecuación por  $T^{-1}$  por la derecha para obtener:

$$T^{-1} \cdot \dot{z} = T^{-1} \cdot (T \cdot A) \cdot y = A \cdot y$$

A continuación, podemos reemplazar  $y$  por  $T^{-1} \cdot z$  en esta ecuación para obtener:

$$T^{-1} \cdot \dot{z} = A \cdot (T^{-1} \cdot z)$$

Podemos multiplicar ambos lados de esta ecuación por  $T$  por la izquierda para obtener:

$$\dot{z} = T \cdot (A \cdot (T^{-1} \cdot z))$$

Y finalmente, si  $T = P^{-1}$ :

$$\dot{z} = P^{-1} \cdot (A \cdot (P \cdot z))$$

Usando la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices, podemos reescribirlo como:

$$\dot{z} = (P^{-1}AP) \cdot z$$

entonces podemos escribir  $A = PDP^{-1}$ , donde  $P$  es la matriz cuyas columnas son los vectores propios de  $A$  y  $D$  es la matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los valores propios correspondientes.

$$\dot{z} = (P^{-1}PDP^{-1}P) \cdot z = Dz$$

Sin embargo, si  $A$  no es diagonalizable, entonces no podemos escribir  $A$  como  $PDP^{-1}$  lo que implica que la matriz de transformación  $T \neq P^{-1}$ .

Para el caso en que  $A$  sea **diagonalizable**:

$$D = \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_k \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_m \end{bmatrix}$$

$$\text{con } \Lambda_m = \begin{bmatrix} \sigma_m & \omega_m \\ -\omega_m & \sigma_m \end{bmatrix}.$$

Donde  $D$  representa la matriz diagonal que contiene la información de los valores propios del sistema que rigen la dinámica  $(\Sigma, \Lambda)$ ,  $\Sigma$  contiene la componente real de los valores propios en su diagonal y  $\Lambda$  una matriz diagonal que almacena la información para cada uno de los valores propios  $\Lambda_m$ ,  $\Lambda_m$  almacena los valores para cada valor propio (parte real y parte compleja (si hay)). Los valores propios de la matriz diagonal estarán dados como  $\lambda_i = \sigma_i + i\omega_i$ . En los sistemas dinámicos, los valores propios proporcionan información sobre las propiedades del sistema y su comportamiento a largo plazo [16]. A continuación se presentan algunas de las propiedades que se pueden deducir de los valores propios de la matriz de coeficientes  $A$  en un sistema dinámico  $\dot{y} = Ay$ :

**Estabilidad del sistema:** Los valores propios de  $A$  determinan la estabilidad del sistema.

Si todos los valores propios tienen una parte real negativa, entonces el sistema es estable y cualquier solución inicial tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si al menos un valor propio tiene una parte real positiva, entonces el sistema es inestable y las soluciones divergen a medida que  $t$  aumenta. Si hay algún valor propio con parte real cero, entonces el sistema es marginalmente estable y la solución puede oscilar o decaer lentamente dependiendo de los valores propios complejos conjugados.

**Comportamiento asintótico:** El comportamiento asintótico de las soluciones del sistema está determinado por los valores propios de  $A$ . Si todos los valores propios tienen una parte real negativa, entonces las soluciones del sistema convergen a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si hay algún valor propio con parte real positiva, entonces las soluciones divergen a medida que  $t$  aumenta. Si hay algún valor propio con parte real cero, entonces las soluciones pueden oscilar o decaer lentamente dependiendo de los valores propios complejos conjugados.

**Atractores y repulsores:** Los valores propios de  $A$  también pueden usarse para identificar los atractores y repulsores del sistema. Si todos los valores propios tienen una parte real negativa, entonces el origen es un atractor del sistema y todas las soluciones convergen a él cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si hay algún valor propio con parte real positiva, entonces el origen es un repulsor del sistema y todas las soluciones se alejan de él

cuando  $t$  aumenta. Si hay algún valor propio con parte real cero, entonces el origen puede ser un centro o un nodo dependiendo de los valores propios complejos conjugados.

De manera más precisa cuando la matriz  $A$  es la matriz Jacobiana como en la ecuación 3.6 evaluada en el punto estable:

- Si todos los valores propios tienen partes reales negativas, el punto de equilibrio se considera estable y el sistema volverá a ese punto después de pequeñas perturbaciones.
- Si uno o más valores propios tienen partes reales positivas, el punto de equilibrio es inestable y cualquier perturbación llevará al sistema a alejarse de ese punto.

Los valores propios también pueden proporcionar información sobre el comportamiento del sistema en las cercanías del punto de equilibrio. Si los valores propios tienen partes imaginarias no nulas, entonces el sistema exhibe oscilaciones cerca del punto de equilibrio como se observa en la figura 1. Además, si hay valores propios con partes reales cercanas a cero, el sistema puede mostrar un comportamiento complejo como caos o bifurcaciones [18, 17].

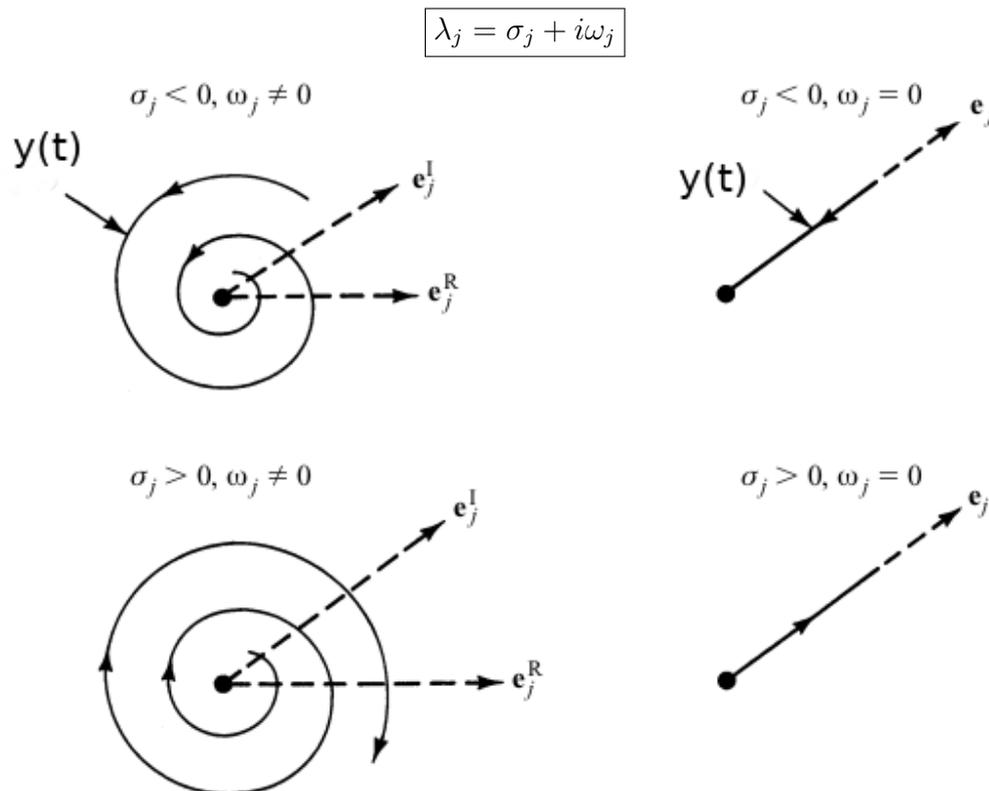


Figura 1: Representación de los distintos comportamientos de acuerdo al valor propio.  $y(t)$  Es la solución general dada por la ecuación 3.7,  $\lambda_j$  es el valor propio. Si  $\sigma_j < 0 \rightarrow$  estable,  $\sigma_j > 0 \rightarrow$  inestable cuando  $\omega_j \neq 0$  se produce movimiento espiral en el plano de los vectores propios, cuando  $\omega_j = 0$  movimiento lineal recto a lo largo de la dirección del vector propio. Figura tomado de la Ref. [16].

### 3.2. Subespacios invariantes

El espacio tangente en un punto de equilibrio es el espacio que describe las posibles direcciones en las que el sistema puede evolucionar cerca de ese punto, en la teoría de estabilidad se consideran principalmente los subespacios invariantes del espacio tangente siguientes:

**Subespacio estable** representa el espacio vectorial generado por los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , que corresponden a los autovectores asociados a los valores propios con parte real negativa  $Re(\lambda) < 0$  de la matriz Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio.

$$E^s = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \quad (3.8)$$

en  $E^s$  el término span se refiere al espacio vectorial generado por el conjunto de vectores  $v_1, v_2, \dots, v_k$ .

**Subespacio central** representa el espacio vectorial generado por los vectores  $w_1, w_2, \dots, w_m$ , que corresponden a los autovectores asociados a los valores propios con parte imaginaria no nula y  $Re(\lambda) = 0$  de la matriz Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio.

$$E^c = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_p\} \quad (3.9)$$

**Subespacio inestable** representa el espacio vectorial generado por los vectores  $u_1, u_2, \dots, u_p$ , que corresponden a los autovectores asociados a los valores propios con parte real positiva  $Re(\lambda) > 0$  de la matriz Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio.

$$E^u = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_m\} \quad (3.10)$$

los vectores  $u, v$  y  $w$  son autovectores asociados a los valores propios de la matriz Jacobiana. Estos autovectores son soluciones especiales de la ecuación  $Av = \lambda v$ , donde  $A$  es la matriz Jacobiana y  $\lambda$  es el valor propio correspondiente. Cada subespacio invariante está compuesto por un conjunto de autovectores que son linealmente independientes entre sí, es decir, no se pueden expresar como combinaciones lineales de los demás. Estos autovectores  $u_i, v_i$  y  $w_i$  pertenecen al espacio tangente en el punto de equilibrio y están asociados a los valores propios con parte real positiva, parte real negativa y parte imaginaria no nula, respectivamente. Los subespacios invariantes  $E^s, E^c$  y  $E^u$  son subespacios vectoriales que se extienden en el espacio tangente en el punto de equilibrio, y están formados por las combinaciones lineales de los autovectores correspondientes.

La dimensión  $n_s$  del subespacio estable está determinada por el número de auto vectores asociados a los auto valores con  $Re(\lambda) < 0$  de la matriz jacobiana del sistema evaluada en el punto de equilibrio. De manera similar con la dimensión del subespacio de estados inestables  $n_u$   $Re(\lambda) > 0$  y la dimensión  $n_w$  de centros  $Re(\lambda) = 0$ . Las dimensiones de los subespacios  $n_s, n_u$  y  $n_w$  representan el número de direcciones independientes en las que el sistema puede evolucionar cerca del punto de equilibrio y la suma de sus dimensiones corresponde a la dimensión total del espacio de fase  $N$ .

$$N = n_s + n_u + n_w$$

### 3.3. Órbita periódica

Una órbita periódica es la representación de un tipo especial de solución para un sistema dinámico: aquella que se repite a sí misma en el tiempo,  $x(t)$ , es una solución periódica si existe una constante  $\tau > 0$  tal que

$$x(t) = x(t + \tau)$$

para todo  $t$ . El periodo de esta solución se define como el mínimo valor de  $\tau$ . La imagen del intervalo de periodicidad  $[0, \tau]$  bajo  $x|$  en el espacio de estados  $R^n$  se denomina órbita periódica o ciclo [20].

El análisis de la estabilidad de las órbitas periódicas nos ayuda a comprender cómo las perturbaciones afectan la dinámica del sistema [14]. Si una órbita periódica es estable, el sistema permanece cerca de ella frente a perturbaciones, mientras que si es inestable, las perturbaciones pueden desviar al sistema. Una de los procedimientos para analizar la estabilidad de una órbita en un sistema dinámico es utilizar las ecuaciones que rigen al sistema y una variación infinitesimal de la órbita. Supongamos que tenemos un sistema dinámico descrito por una ecuación diferencial ordinaria de la forma:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x(t), t; \mu)$$

donde  $x$  es el vector de estado del sistema y  $f(x)$  es una función que describe la evolución del sistema. Si  $x_0$  es una órbita del sistema, es decir, una solución que se repite en el tiempo, podemos analizar su estabilidad utilizando la variación infinitesimal  $\delta x$  alrededor de la órbita.

Supongamos que  $x_0(t)$  es una órbita del sistema dinámico (una solución que se repite en el tiempo) y que  $\delta x(t)$  es una pequeña perturbación infinitesimal alrededor de la órbita. Entonces, la solución  $x(t)$  del sistema dinámico que corresponde a la perturbación infinitesimal se puede escribir como:

$$x(t) = x_0(t) + \delta x(t)$$

La derivada de la solución perturbada  $x(t)$  con respecto al tiempo es:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x_0 + \delta x)}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{d(\delta x)}{dt}$$

La derivada de la órbita original  $x_0(t)$  con respecto al tiempo se puede escribir como:

$$\frac{dx_0}{dt} = f(x_0)$$

La derivada de la perturbación infinitesimal  $\delta x(t)$  con respecto al tiempo se puede escribir como:

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = \frac{d}{dt}(x(t) - x_0(t)) = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores, tenemos:

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt} = f(x) - f(x_0)$$

Al desarrollar la función  $f(x)$  en una serie de Taylor alrededor de  $x_0$ , obtenemos una expresión que nos permite escribir la variación  $\delta x$  en términos de la matriz jacobiana  $Df(x_0)$  y la perturbación infinitesimal  $\delta x$ .

$$f(x) - f(x_0) = Df(x_0)\delta x$$

Como la perturbación infinitesimal  $\delta x$  es pequeña, se puede aproximar la función  $f(x)$  alrededor de  $x_0$ . La serie de Taylor de primer orden de  $f(x)$  alrededor de  $x_0$  es:

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + \mathcal{O}(|x - x_0|^2)$$

donde  $Df(x_0)$  es la matriz jacobiana de  $f(x)$  evaluada en  $x_0$ . Como la perturbación infinitesimal es  $\delta x = x - x_0$ , podemos escribir la serie de Taylor de  $f(x)$  como:

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)\delta x + \mathcal{O}(|\delta x|^2)$$

La expresión  $\mathcal{O}(|\delta x|^2)$  representa los términos de orden superior en la expansión de la serie de Taylor, que son despreciables para perturbaciones infinitesimales. Al sustituir esta expresión en la ecuación

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}$$

, se obtiene:

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = f(x) - f(x_0) = Df(x_0)\delta x + \mathcal{O}(|\delta x|^2)$$

Como se desprecian los términos de orden superior, se tiene que:

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = Df(x_0)\delta x \quad (3.11)$$

La ecuación diferencial lineal 3.11 es una ecuación vectorial en la que  $\delta x$  es un vector y  $Df(x_0)$  es una matriz jacobiana.

Dado que  $Df(x_0)$  es una matriz jacobiana, podemos diagonalizarla mediante una matriz de cambio de base  $P$ . Esto implica encontrar una matriz diagonal  $D$  y una matriz invertible  $P$  tal que  $D = P^{-1}Df(x_0)P$ . La matriz diagonal  $D$  contiene los valores propios de  $Df(x_0)$  en su diagonal.

Al realizar un cambio de variable  $\delta y = P^{-1}\delta x$ , podemos reescribir la ecuación diferencial como:

$$\frac{d(\delta y)}{dt} = D\delta y \quad (3.12)$$

Donde  $D$  es la matriz diagonal obtenida mediante la diagonalización de  $Df(x_0)$ . Dado que la matriz  $D$  es diagonal, las componentes de  $\delta y$  evolucionan de manera independiente y se puede resolver la ecuación para cada componente por separado. Cada componente  $\delta y_i$  sigue una ecuación diferencial simple de la forma

$$\frac{d(\delta y_i)}{dt} = D_{ii}\delta y_i,$$

donde  $D_{ii}$  es el valor propio correspondiente a  $\delta y_i$  en la matriz diagonal  $D$ .

La solución general para cada componente  $\delta y_i$  es de la forma  $\delta y_i(t) = Ce^{D_{ii}t}$ , donde  $C$  es una constante determinada por las condiciones iniciales.

Para volver a la variable original se utiliza la relación  $\delta x = P\delta y$  de modo que se obtiene la solución para  $\delta x$  en términos de los valores propios y vectores propios de  $Df(x_0)$ .

La solución general para  $\delta x$  es de la forma  $\delta x(t) = P\delta y(t) = P [C_1 e^{\lambda_1 t} \ C_2 e^{\lambda_2 t} \ \dots \ C_n e^{\lambda_n t}]$ , donde  $C_1, C_2, \dots, C_n$  son constantes determinadas por las condiciones iniciales,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son los valores propios de  $Df(x_0)$  y  $P$  es una matriz formada por los vectores propios  $v_i$  de  $Df(x_0)$ .

$$\delta x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v_i \quad (3.13)$$

Se nota que el procedimiento que se desarrolló fue parecido al análisis de estabilidad de puntos fijos, ya que las órbitas periódicas pueden considerarse como puntos fijos de un mapeo [16] (si consideramos un mapeo discreto para describir la evolución del sistema en intervalos discretos de tiempo). El vínculo entre órbitas periódicas y los puntos fijos radica en que al estudiar la estabilidad de los puntos fijos del mapeo nos permite inferir información sobre la estabilidad de las órbitas periódicas correspondientes en el sistema dinámico continuo.

Considerando el caso más simple en el que solo tenemos un valor propio  $\lambda$  y una constante  $C$ . Entonces de la ecuación 3.13, la solución para  $\delta x$  sería  $\delta x(t) = Ce^{\lambda t} v_1$ . Dado que los vectores propios en  $P$  están normalizados, la norma euclidiana de un vector propio es 1, entonces:

Cuando se toma el valor absoluto de esta solución, tenemos  $|\delta x(t)| = |Ce^{\lambda t} v_1| = |C|e^{\lambda t}$ .

$$|\delta x(t)| = |C|e^{\lambda t} = Ce^{\lambda t} \quad (3.14)$$

Si asumimos que la órbita es estable, es decir, que todas las perturbaciones infinitesimales alrededor de la órbita convergen a cero a medida que el tiempo avanza, entonces la variación infinitesimal  $\delta x$  debe ser acotada por una función exponencial negativa:

$$|\delta x(t)| \leq Ce^{\lambda t} \quad (3.15)$$

Para todo  $t > 0$ , donde  $\lambda < 0$ .

Si las perturbaciones infinitesimales convergen a cero, entonces la órbita es estable; de lo contrario, la órbita es inestable. Si la órbita es inestable, entonces la variación infinitesimal  $\delta x$  se alejará exponencialmente de la órbita original, pero de forma creciente y acelerada, es decir:

$$|\delta x(t)| \geq Ce^{\lambda t} \quad (3.16)$$

donde  $C$  es una constante y  $\lambda$  es la tasa de crecimiento exponencial, con  $\lambda > 0$ .

Cuando  $C = \delta x(0)$  al resolver para  $\lambda$  y considerar  $t \rightarrow \infty$  en la ecuación 3.14 se obtiene su relación con el exponente de Lyapunov en el contexto del análisis de estabilidad de sistemas dinámicos [21]. El exponente de Lyapunov es una medida de la sensibilidad del sistema a las perturbaciones iniciales, proporciona información cuantitativa de la tasa de divergencia o convergencia exponencial de las trayectorias con condiciones iniciales cercanas en un sistema dinámico, viene descrito por la ecuación 3.17.

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{|\delta x(t)|}{|\delta x(0)|} \right) \quad (3.17)$$

donde  $\delta x(t)$  es la perturbación infinitesimal alrededor de la órbita en el tiempo  $t$  y  $\delta x(0)$  es su magnitud inicial.

Un exponente de Lyapunov negativo indica estabilidad, mientras que un exponente de Lyapunov positivo indica inestabilidad. Cuando el exponente de Lyapunov es cero, se dice que la órbita periódica tiene una estabilidad neutral (las perturbaciones infinitesimales alrededor de la órbita periódica ni se amplifican ni se reducen a medida que el tiempo avanza).

Otra manera de analizar la estabilidad de órbitas periódicas en sistemas dinámicos es con el uso de la teoría de Floquet (véase Apéndice A) y con técnica de sección de superficie de Poincaré. La teoría de Floquet y la técnica de sección de superficie de Poincaré son dos herramientas útiles para el estudio de la estabilidad de sistemas dinámicos [14] [16] [18]. Ambas técnicas se utilizan para analizar las órbitas periódicas en puntos estables, pero utilizan enfoques diferentes.

### 3.4. Técnica de sección de superficie de Poincaré

Para pasar de una ecuación diferencial de la forma  $\dot{x} = F(x)$  a un mapa discreto de la forma  $\hat{x}_{n+1} = M(\hat{x}_n)$ , podemos utilizar un método numérico conocido como “método de Euler” ó “método de integración numérica”.

El método de Euler consiste en aproximar la solución de la ecuación diferencial mediante una serie de pasos finitos de tiempo [14]. En cada paso, se utiliza la ecuación diferencial para calcular la pendiente en el punto actual, y se avanza un pequeño paso en la dirección de esta pendiente para obtener el siguiente punto.

En términos matemáticos, el método de Euler se puede expresar de la siguiente manera:

$$x_{n+1} = x_n + F(x_n)\Delta t$$

donde  $x_n$  es el valor de  $x$  en el paso  $n$ ,  $F(x_n)$  es la función  $F$  evaluada en  $x_n$ , y  $\Delta t$  es el tamaño del paso de tiempo.

De modo que para obtener un mapa discreto, simplemente podemos escribir la ecuación de Euler en términos de  $\hat{x}_n$  y  $\hat{x}_{n+1}$ , y expresar  $\hat{x}_{n+1}$  como una función de  $\hat{x}_n$ . Esto nos da el siguiente mapa discreto:

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n + F(\hat{x}_n)\Delta t \quad (3.18)$$

La ecuación 3.18, nos permite calcular el valor de  $\hat{x}$  en el siguiente paso discreto, dado su valor actual  $\hat{x}_n$  y la función  $F$  que describe su evolución continua. Cabe destacar que el método de Euler es un método numérico de primer orden y que puede introducir errores en la aproximación de la solución continua [14]. Además, existen otros métodos numéricos más precisos que pueden ser utilizados para obtener mapas discretos a partir de ecuaciones diferenciales.

Para pasar de un sistema continuo a uno discreto es posible utilizar la técnica de sección de superficie de Poincaré la cual es una herramienta útil para convertir una ecuación diferencial  $\dot{x} = F(x)$  en un mapa discreto  $\hat{x}_{n+1} = M(\hat{x}_n)$  que conserva la dinámica del sistema original en una cierta superficie de sección.

Para aplicar la técnica de sección de Poincaré, se debe elegir una superficie de sección transversal al flujo de la dinámica del sistema original. Esta superficie de sección debe ser elegida de tal manera que el flujo atraviese la superficie de sección siempre en la misma dirección. Una vez que se ha elegido una superficie de sección, se puede definir un mapa discreto que mapea cada cruce de la trayectoria con la superficie de sección a otro punto en la misma superficie: se elige un punto inicial  $\hat{x}_0$  en la superficie de sección, y se sigue la trayectoria del sistema original hasta que la trayectoria cruza la superficie de sección por primera vez. En este punto de cruce, se define el valor del mapa discreto como  $\hat{x}_{n+1} = M(\hat{x}_n)$ , donde  $\hat{x}_n$  es el valor de la trayectoria en el punto de cruce y  $\hat{x}_{n+1}$  es el valor de la trayectoria en el próximo cruce de la superficie de sección.

El mapa discreto obtenido mediante la técnica de sección de Poincaré sólo conserva la dinámica del sistema original en la superficie de sección elegida, y puede no ser representativo de la dinámica global del sistema.

Con el propósito de estudiar la estabilidad de un punto fijo  $x^*$  de un mapa discreto  $\hat{x}_{n+1} = M(\hat{x}_n)$  también se puede aproximar el mapa alrededor del punto fijo utilizando una expansión en serie de Taylor y luego analizar las propiedades de la serie de Taylor para determinar la estabilidad del punto fijo.

La expansión en serie de Taylor del mapa discreto alrededor del punto fijo  $x^*$  se puede escribir como:

$$M(x) = M(x^*) + M'(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}M''(x^*)(x - x^*)^2 + \frac{1}{6}M'''(x^*)(x - x^*)^3 + \dots$$

donde  $M'(x^*)$ ,  $M''(x^*)$  y  $M'''(x^*)$  son la primera, segunda y tercera derivada de  $M(x)$  evaluadas en el punto fijo  $x^*$ .

Al aproximar el mapa discreto por la serie de Taylor, podemos obtener una expresión para la iteración del mapa discreto en términos de las desviaciones de  $x$  desde el punto fijo  $x^*$ , como:

$$\hat{x}_{n+1} = M(x^* + \epsilon_n) \approx M(x^*) + M'(x^*)\epsilon_n + \frac{1}{2}M''(x^*)\epsilon_n^2 + \frac{1}{6}M'''(x^*)\epsilon_n^3 + \dots$$

donde  $\epsilon_n = \hat{x}_n - x^*$  es la desviación del punto  $\hat{x}_n$  del punto fijo  $x^*$ .

Considerando  $\epsilon_n \rightarrow$  pequeño, se reescribe como:

$$\hat{x}_{n+1} = M(x^* + \epsilon_n) \approx DM(x^*)\epsilon_n = \hat{\epsilon}_{n+1} \quad (3.19)$$

La ec 3.19 es un problema de la forma

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{A} \cdot \hat{y}_n \quad (3.20)$$

Donde se buscan soluciones de la forma  $\hat{y}_n = \lambda^n \hat{v}$ , de modo que :

$$\lambda^{n+1} \hat{v} = \hat{A} \cdot \lambda^n \hat{v}$$

Donde se consigue pasar a una ecuación de valores propios similar a las que ya hemos estudiado

$$\hat{A} \cdot \hat{v} = \lambda \hat{v}$$

Los valores propios se obtienen resolviendo la ecuación característica

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

$|\lambda_j| < 1$  Cuyas direcciones de los vectores propios son asintóticamente estables.

$|\lambda_j| > 1$  Dirección de los vectores propios inestables.

Los puntos fijos son simplemente el caso especial de una órbita periódica de período 1, donde el punto se repite después de una sola iteración. Si ahora se considera que hay una órbita de período  $p$ , donde  $p$  indica el número de veces que la órbita cruza a través de la sección de superficie de Poincaré, para el mapa iterado  $p$  veces  $M^p$ . Un punto fijo será aquel que satisfaga  $\hat{x}_j^* = M^p(\hat{x}_j^*)$  cuyo problema es del tipo como en la ecuación 3.20 pero ahora la matriz  $A$  es  $DM^p(\hat{x}_j^*)$ , cuyo regla de la cadena:

$$DM^p(x_j^*) = DM(x_{j-1}^*)DM(x_{j-2}^*)\dots DM(x_j^*)$$

### 3.5. Manifolds

*Manifold* (también conocida como variedad) en matemáticas, es una generalización y abstracción de la noción de una superficie curva; un manifold es un espacio topológico que se modela de cerca sobre el espacio euclidiano localmente (es decir, alrededor de cada punto hay un vecindario que es topológicamente igual al conjunto unidad abierto en  $\mathbb{R}^n$ ) pero puede variar ampliamente en sus propiedades globales [22]. Por ejemplo, en el caso de una esfera, podemos decir que cada punto tiene un vecindario que es homeomorfo a un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^2$ . La noción de homeomorfismo implica que hay una correspondencia continua y biyectiva (correspondencia uno a uno entre los conjuntos y sus imágenes) entre los conjuntos, y tanto los conjuntos como sus inversos son conjuntos abiertos en sus respectivos espacios. Esto significa que localmente, en un entorno alrededor de cada punto en la esfera, podemos encontrar una región que se asemeja topológicamente a un conjunto abierto en el plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$  (veasé figura 2).

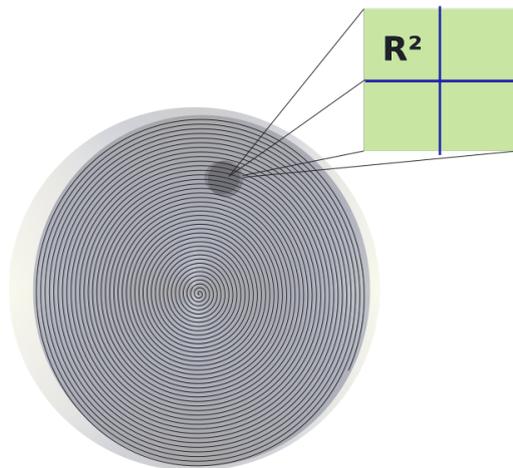


Figura 2: En una esfera, cada punto tiene un vecindario que es homeomorfo a un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^2$ .

Una variedad invariante es un subconjunto de un sistema dinámico que permanece sin cambios bajo la evolución del sistema, está relacionada con la estabilidad de un sistema dinámico, algunas variedades invariantes pueden ser la variedad central, variedad inestable y la variedad estable.

#### 3.5.1. Variedad central

En un sistema dinámico la variedad central representa las trayectorias que no crecen ni decaen rápidamente, estas trayectorias están en un equilibrio entre la estabilidad y la inestabilidad en las cercanías del punto del punto fijo, contiene a las trayectorias que no convergen rápidamente hacia un punto fijo ni se alejan rápidamente de él. La variedad central

$W^c$  tiene la misma dimensión y es tangente al subespacio central  $E^c$ .

$$\dim(W^c) = n_c \quad (3.21)$$

### 3.5.2. Variedad estable

Una variedad estable ( $W^s$ ) es una variedad invariante que describe cómo las soluciones del sistema convergen hacia el punto fijo estable a medida que el tiempo avanza. La geometría de la variedad estable está determinada por los valores propios negativos de la matriz jacobiana del sistema evaluada en el punto fijo estable, de modo que la variedad estable es un subespacio de la dimensión del número de valores propios negativos que se extiende desde el punto fijo estable en direcciones específicas en el espacio de fase. La dimensión de la variedad estable  $W^s$  de un punto fijo o órbita periódica será equivalente a la dimensión del subespacio de estados estables  $E^s$  y  $W^s$  es tangente al mismo.

$$\forall x \in W_s, \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = P$$

$$\dim(W^s) = n_s \quad (3.22)$$

### 3.5.3. Variedad inestable

Una variedad inestable ( $W^u$ ) es una variedad invariante que representa todas las soluciones que eventualmente se alejan de un punto fijo inestable del sistema. La geometría de la variedad inestable está determinada por los valores propios positivos de la matriz jacobiana del sistema evaluada en el punto fijo inestable, de manera que la variedad inestable es un subespacio de la dimensión del número de valores propios positivos que se extiende desde el punto fijo inestable en direcciones específicas en el espacio de fase. De modo que la dimensión de la variedad inestable  $W^u$  de un punto fijo o órbita periódica será equivalente a la dimensión del subespacio de estados inestables  $E^u$  y  $W^u$  es tangente al mismo como se puede observar en la figura 3.

$$\forall x \in W_u, \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = P$$

$$\dim(W^u) = n_u \quad (3.23)$$

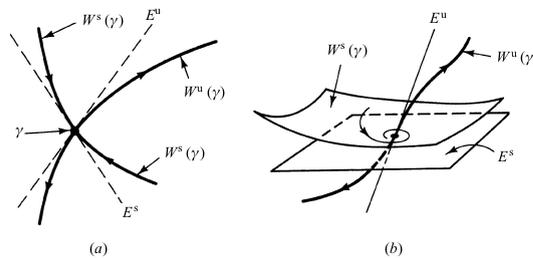


Figura 3: Representación de  $W^s$  y  $W^u$ . Imagen tomada de la Ref. [16].

En la figura 3 a) Muestra las variedades  $W^s$  y  $W^u$  con sus respectivas direcciones con  $\gamma$  un punto fijo y cada variedad tangente a sus respectivos subespacios  $E^s$  y  $E^u$  b) Representa la dimensión  $n_s = 2$  y  $n_u = 1$  al igual que se nota que la parte compleja del valor propio es distinta de cero, la que provoca el movimiento espiral hacia el punto fijo.

Las variedades estables e inestables pueden intersectarse en puntos que no son puntos fijos del sistema, pero no pueden intersectarse en sí mismas como se observa en la figura 4.

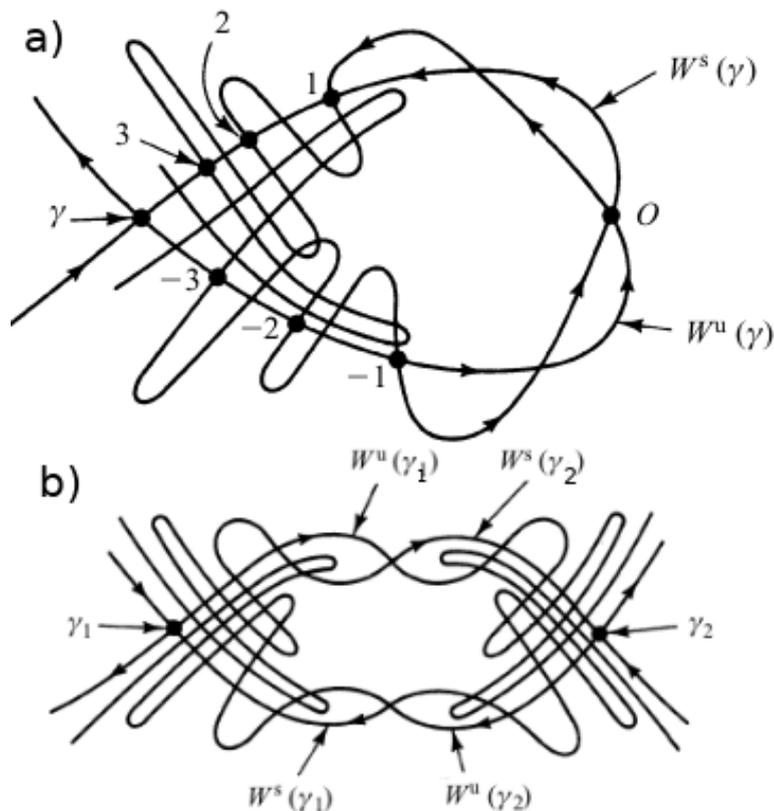


Figura 4: Las variedades  $W^s$  y  $W^u$  se pueden cruzar entre sí pero no así mismas. Imagen tomada de la Ref. [16].

En la figura 4 a)  $\gamma$  Representa un punto fijo donde se interceptan la variedad estable y la inestable, los números  $\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$  representan puntos de intercepción no fijos de las variedades, se observa que las intersecciones solo ocurren entre variedades no iguales b) Hay dos puntos fijos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , en dichos puntos se interceptan las variedades  $W^s$  y  $W^u$ .

En la figura 4 a) se representa una intersección *homoclínica*, que ocurre cuando la trayectoria del sistema sigue la variedad inestable de un punto fijo y luego se cruza con su variedad estable y b) representa la intersección *heteroclínica*, que ocurre cuando dos trayectorias diferentes del sistema se encuentran en un mismo punto fijo, una siguiendo la variedad inestable de un punto fijo  $\gamma_1$  y otra siguiendo la variedad estable de otro punto fijo  $\gamma_2$ . Es importante aclarar que no se trata de la intersección de una trayectoria consigo misma, sino de la intersección de trayectorias que siguen las variedades estables e inestables de diferentes puntos fijos en el sistema dinámico.

### 3.6. Ejemplo: Oscilador fijado

En esta sección se proporciona un ejemplo, con el fin de analizar la estabilidad del sistema en los puntos fijos. El sistema consiste en un cuerpo de masa  $m$  que se desliza sin fricción sobre una barra horizontal y está conectado a un resorte de longitud  $l$  que se encuentra a una distancia  $a$  de la barra horizontal.

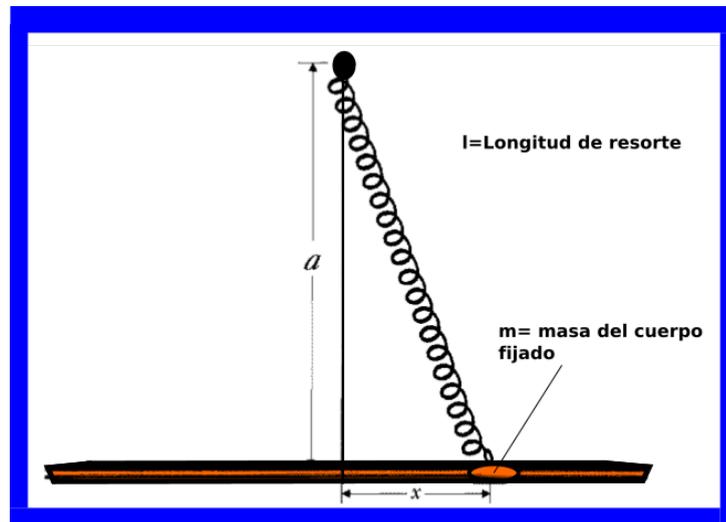


Figura 5: Esquema del sistema propuesto.

Se nota que la masa  $m$  en la posición  $x$  provoca que el resorte se encuentre estirado. Para conocer que tanto se encuentra estirado el resorte se puede aprovechar la simetría que presenta el problema. El valor  $c$  se puede conocer dado que:

$$c^2 = a^2 + x^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + x^2}$$

De modo que se ahora se puede conocer que tanto se estiró el resorte

$$l' = c - l = \sqrt{a^2 + x^2} - l$$

Se procede a encontrar la ecuación de movimiento del sistema, con las ecuaciones de Euler-Lagrange. El comportamiento del sistema es meramente unidimensional, por que es facil observar que la coordenada generalizada es  $x$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

cuya Lagrangiana viene dada por:

$$L = T - V$$

$T$  siendo la energía cinética y  $V$  la energía potencial elástica.

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} l'^2 = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} (\sqrt{a^2 + x^2} - l)^2$$

$$\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} \left( a^2 + x^2 - 2l\sqrt{a^2 + x^2} + l^2 \right) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \longrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= -kx + \frac{k lx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) \\
m\ddot{x} + kx \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) &= 0 \tag{3.24}
\end{aligned}$$

La ecuación 3.24 representa la ecuación de movimiento que describe al sistema mencionado anteriormente, donde  $m$  es la masa del cuerpo,  $\ddot{x}$  es la aceleración del cuerpo en la dirección horizontal,  $k$  es la constante del resorte y  $x$  es la posición del cuerpo respecto a la barra horizontal. En esta ecuación, el primer término  $m\ddot{x}$  representa la masa del cuerpo y su aceleración. El segundo término  $kx \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right)$  representa la fuerza elástica del resorte, que depende de la posición  $x$  del cuerpo.

### 3.6.1. Variedades del problema

Considerando la ecuación de movimiento 3.24 para una partícula de masa  $m$  unida a un resorte de constante de resorte  $k$ , con un extremo del resorte fijo y el otro extremo unido a la partícula.

$$m\ddot{x} + kx \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) = 0$$

Se debe notar que la ecuación diferencial es de segundo orden, para pasarla a la forma  $\dot{x} = f(x, t; \mu)$ :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y \\
\dot{y} &= kx \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Primero podemos encontrar los puntos fijos del sistema. Para hacerlo, igualamos ambas ecuaciones a cero y resolvemos para  $x$  y  $y$ ; La aceleración  $\ddot{x}$  a cero, ya que la partícula está en reposo en el equilibrio. Esto da como resultado:

$$kx \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) = 0 = \ddot{x} = \dot{y}$$

Como  $k$  es positiva, tenemos dos posibles casos:

(i) **Punto fijo trivial:**  $x = y = 0$ ; Esto corresponde a la partícula estando en la posición de equilibrio, donde la fuerza del resorte y la fuerza no lineal se equilibran.

(ii) **Punto fijo no trivial:**

$$\left( 1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) = 0, \longrightarrow l^2 = a^2 + x^2$$

$\mathbf{x} = \pm\sqrt{l^2 - a^2}$ ,  $\mathbf{y} = 0$ ; Esto corresponde a la partícula estando a una distancia  $l$  del extremo fijo del resorte, donde la fuerza no lineal cancela exactamente la fuerza del resorte.

Ahora es de interés conocer los valores propios para analizar la estabilidad de los puntos fijos, podemos calcular la matriz jacobiana del sistema, en cada uno de los puntos fijos, para simplificar se coloca a  $m = a = 1$ ,  $k = 1$  y  $l = 2$ .

$$F = (\dot{x}, \dot{y}) = \left( y, -\frac{k}{m}x \left[ 1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right] \right) \quad (3.26)$$

Cuya matrix Jacobiana

$$JF = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left[ -\frac{x^2 l}{(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{l}{(a^2 + x^2)^{3/2}} - 1 \right] & 0 \end{bmatrix}$$

Primero se considera el primer punto fijo  $x = y = 0$ :

$$A \Big|_{x=0} = JF \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

Para encontrar los valores propios resuelve el polinomio característico :

$$D(\lambda) = \det(A \Big|_{pf} - I\lambda) = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ b & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - b = 0, \quad \longrightarrow \lambda^2 = b$$

Los valores propios para  $x = 0, y = 0$ :

$$\lambda = \pm\sqrt{b} = \pm 1 \quad (3.27)$$

El punto fijo  $(0, 0)$  tiene una matriz jacobiana que es diagonalizable cuyos valores propios son 1 y  $-1$ .

Para los puntos fijos  $x = \pm\sqrt{l^2 - a^2}$ ,  $y = 0$ .

$$A \Big|_{x=\pm\sqrt{l^2-a^2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{bmatrix}$$

Para encontrar los valores propios resuelve el polinomio característico :

$$D(\lambda) = \det(A \Big|_{pf} - I\lambda) = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-c} = \pm i\sqrt{c} = \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \quad (3.28)$$

Ahora se requiere encontrar los vectores propios asociados a cada valor propios, es decir se necesita resolver:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Entonces, cuando se resuelve para los puntos fijos se obtiene:

- $(0,0) \rightarrow v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $(-\sqrt{3},0) \rightarrow v = \begin{pmatrix} -\frac{2i}{\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2i}{\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix}$
- $(\sqrt{3},0) \rightarrow v = \begin{pmatrix} -\frac{2i}{\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2i}{\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix}$

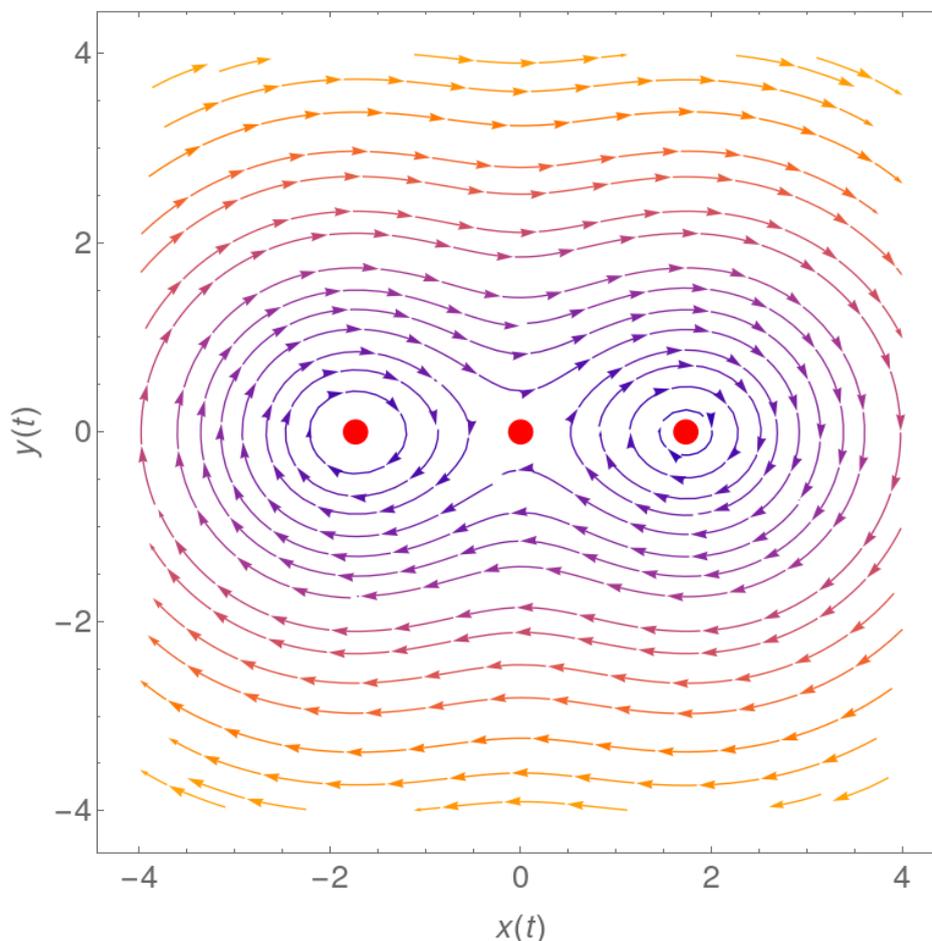


Figura 6: Comportamiento de las trayectorias en las cercanías a los puntos fijos considerando  $m = 1$ ,  $l = 2$  y  $k = 1$ .

En la figura 6 se observan los subconjuntos de puntos correspondientes a  $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$ . Para los puntos fijos  $x = \pm\sqrt{l^2 - a^2} = \pm\sqrt{3}$  el subespacio central tiene dimensión 2 y  $E^{s,u}$  están vacíos. En cambio para el origen la dimensión para los subespacios estable e inestable  $\dim E^{s,u} = 1$ , satisfaciéndose en ambos casos que  $N = n_s + n_u + n_c$  siendo  $N$  la dimensión total.

En la figura 7 se observa que el sistema sigue el comportamiento esperado de las trayectorias al tener valores propios reales como se vio en la sección 3.1.1. Para el punto fijo en el origen se observan el conjunto de puntos de las trayectorias que convergen a este descritos por  $E^s$  y el conjunto de puntos de las trayectorias que se alejan del mismo descritos por

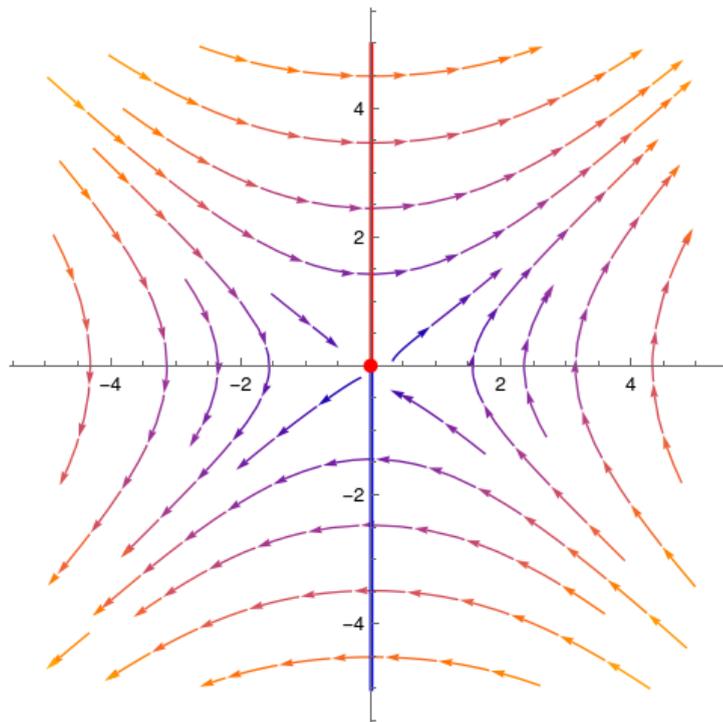


Figura 7: Se establece a  $l = 3.5$  para visualizar mejor la tendencia de las trayectorias en las cercanías al punto fijo ubicado en el origen.

$E^u$ , su comportamiento es un punto silla. Las variedades invariantes para el punto fijo en el origen tienen un comportamiento como el expuesto en la figura 8.

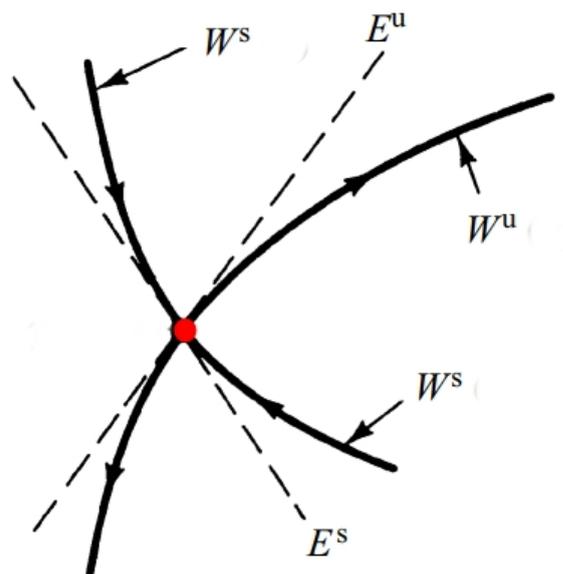


Figura 8: Variedades  $W^{e,u}$  tangentes a los subespacios  $E^{e,u}$  en el punto fijo ubicado en el origen.

### 3.7. Manifolds y órbitas periódicas

Al utilizar el mapeo de Poincaré en un sistema dinámico, se obtiene una representación discreta de las trayectorias del sistema que se cruzan repetidamente con una superficie de sección transversal llamada superficie de Poincaré. El mapeo de Poincaré implica seleccionar puntos de intersección de la trayectoria con la superficie de Poincaré y mapearlos hacia la siguiente intersección. Estas intersecciones corresponden a los puntos en los que una órbita pasa a través de la superficie de sección en un sentido particular. Las órbitas periódicas son trayectorias cerradas que se repiten después de un cierto período de tiempo  $\tau$  en el espacio fase. Estas órbitas pueden ser representadas por puntos fijos o ciclos límite en el mapeo de Poincaré.

Los *manifolds*, como ya se vio en la subsección 3.5 son una estructura matemática que describe la geometría local de un sistema dinámico. En el contexto del mapeo de Poincaré, los *manifold* se relacionan con las órbitas periódicas al proporcionar una representación geométrica que describe la forma local de estas órbitas en el espacio de fase [23].

Las órbitas periódicas son elementos fundamentales para comprender la dinámica global, las regiones de atracción, repulsión y los *manifolds* estables e inestables asociados a estos elementos, proporcionan información sobre cómo se estructura el espacio de fase, véase la figura 9, donde se traza el manifold inestable del sistema dinámico de Arneodo como se indica en la referencia [24].

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \\ \dot{z} = \alpha x - x^2 - \beta y - z \end{cases}$$

con  $\beta = 2$  y  $\alpha = 3.372$ .

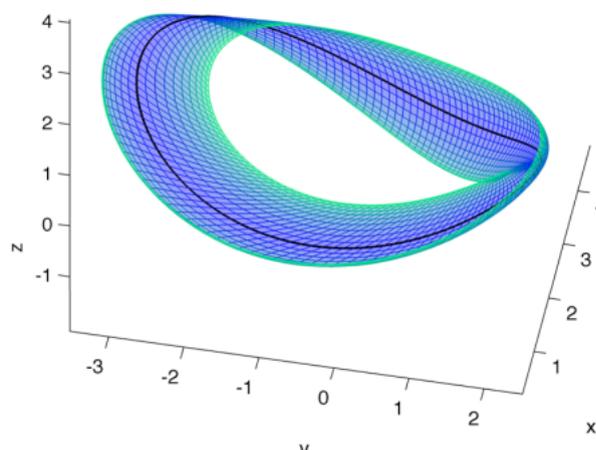


Figura 9: Manifold local inestable de la órbita periódica para el sistema de Arneodo. Figura Tomada de [24].

En la figura 9 se forma una estructura (*manifold*) que describe la forma y la geometría local de esa órbita, además que proporcionan un método para determinarlo de forma numérica.

El objetivo de esta sección ha sido comprender la teoría de los sistemas dinámicos con el fin de estudiar las órbitas periódicas y comprender su importancia para el análisis de la estabilidad y dinámica de estos sistemas. Hemos analizado conceptos como puntos fijos, estabilidad, variedades, mapeo de Poincaré y órbitas periódicas.

Ahora, aplicaremos el conocimiento desarrollado en esta sección para entender la estabilidad y dinámica del fluido polaritónico interactuante. Mediante el estudio en este sistema, podremos obtener información crucial sobre su estabilidad, evolución temporal y respuesta a perturbaciones. Esto nos permitirá comprender mejor las propiedades del mismo.

## 4. Sistema dímérico de polaritón

Esta sección se enfoca en el análisis de la estabilidad del sistema de dímérico de polaritón. Utilizando las ecuaciones de movimiento derivadas a partir de la GPE y el uso de la definición del vector pseudo espín (vease sección 2 y apéndice B), estudiaremos cómo las soluciones del sistema evolucionan en el tiempo y se determinarán las soluciones estables para los estados simétricos y antisimétricos como en la Ref. [7].

$$S_x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \psi_{-1}^\dagger & \psi_{+1}^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{+1} \\ \psi_{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [\psi_{-1}^\dagger \psi_{+1} + \psi_{+1}^\dagger \psi_{-1}] = \sqrt{n_{+1}n_{-1}} \cos(2\phi) \quad (4.1)$$

$$S_y = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} \psi_{-1}^\dagger & -\psi_{+1}^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{+1} \\ \psi_{-1} \end{bmatrix} = \frac{i}{2} [\psi_{-1}^\dagger \psi_{+1} - \psi_{+1}^\dagger \psi_{-1}] = \sqrt{n_{+1}n_{-1}} \sin(2\phi) \quad (4.2)$$

$$S_z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \psi_{+1}^\dagger & -\psi_{-1}^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{+1} \\ \psi_{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [\psi_{+1}^\dagger \psi_{+1} - \psi_{-1}^\dagger \psi_{-1}] = \frac{n_{+1} - n_{-1}}{2} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{S} = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} = \frac{(n_{+1} + n_{-1})}{2} \quad (4.4)$$

Las ecuaciones 4.1, 4.2 y 4.3 representan los operadores de pseudo espín para un sistema de dos componentes donde  $\psi_{+1}$  y  $\psi_{-1}$  son los operadores de creación para partículas con espín +1 y -1, respectivamente.

Tanto  $S_x$  como  $S_y$  describen cómo interactúan y se acoplan las especies de polaritones en el sistema. La ecuación 4.3 representa el componente z del vector de espín, denotado como  $S_z$ . Proporciona información sobre la diferencia de densidades entre las dos especies de fluidos en el condensado. La ecuación (4.4) calcula la magnitud del vector de espín, denotado como  $\mathbf{S}$ . Se simplifica a  $(n_{+1} + n_{-1})/2$ , que es la densidad promedio de las dos especies.

Las ecuaciones de las componentes de espín (ecuaciones 4.1, 4.2 y 4.3) satisfacen el sistema de ecuaciones dado por la ecuación 4.5 (cuya deducción se puede ver en el Apéndice

ce B, mismas que han sido ya estudiadas en la referencia principal (Ref. [7]).

$$\begin{aligned}
\dot{S}_x &= [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_x - \gamma S - \alpha S_z S_y \\
\dot{S}_y &= [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_y + \varepsilon S_z + \alpha S_z S_x \\
\dot{S}_z &= [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_z + v(\mathbf{S})S - \varepsilon S_y, \\
S &= \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \\
\dot{S} &= [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S + v(\mathbf{S})S_z - \gamma S_x
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Con

$$u(\mathbf{S}) = \frac{(1+S)p}{(1+S)^2 - S_z^2}, \quad \alpha = (\alpha_1 - \alpha_2), \quad v(\mathbf{S}) = -\frac{S_z p}{(1+S)^2 - S_z^2}.$$

En general, las ecuaciones 4.5 poseen cuatro puntos fijos, que se obtienen a partir de las cuatro raíces no triviales del sistema algebraico de ecuaciones  $V(S) = 0$ . Se nota que los parámetros de orden correspondientes  $\psi_{\pm 1}$  no están fijos en el tiempo, sino que evolucionan proporcionalmente a  $\exp\{-i\Omega(S)t\}$ , por lo que estas soluciones describen la emisión láser de un solo modo usual del sistema con la frecuencia fija  $\Omega(S)$  (ecuación 4.6, deducción en el apéndice C).

$$\dot{\Phi} = -\Omega(S) = -\left[-(\alpha_1 - \alpha_2)S_z - \frac{\varepsilon S_z S_x + \gamma S S_y}{(S_x^2 + S_y^2)}\right] \tag{4.6}$$

En este modelo la frecuencia se cuenta a partir de la frecuencia de un solo polaritón en los centros de condensación [7]. Hay dos puntos fijos que conservan la simetría,  $F_s$  y  $F_a$ , que proporcionan ocupaciones iguales en los dos centros y corresponden a parámetros de orden simétricos y antisimétricos, respectivamente. Hay otros dos puntos fijos  $F_{\pm}$  que surgen de la ruptura de la simetría con centros de condensación  $S_z > 0$  y  $S_z < 0$  respectivamente [7] (Aún no se han podido determinar en este trabajo).

En las secciones siguientes, se han elegido las unidades de tiempo al establecer  $\Gamma = 1$ , lo que significa que medimos todos los parámetros  $\gamma, \varepsilon$  y  $\alpha_{1,2}$  en unidades de  $\Gamma$ , y el tiempo en unidades de  $\Gamma^{-1}$ , al menos que se indique lo contrario.

## 4.1. Simetría y estabilidad

La simetría se refiere a ciertas propiedades de las ecuaciones o de las soluciones que permanecen invariantes bajo ciertas transformaciones.

Si consideramos el sistema de ecuaciones (4.5) con  $S_z = S_y = 0$  y  $S_x = -S$ , se obtiene para  $\dot{S}_x$  y para  $\dot{S}$ :

$$\begin{aligned}
\dot{S}_x &= -\left[\frac{p}{1+S} - \Gamma + \gamma\right]S \\
\dot{S} &= \left[\frac{p}{1+S} - \Gamma + \gamma\right]S
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Aquí podemos observar una simetría antisimétrica en el sistema. Si  $S(t)$  es una solución del sistema, entonces  $-S(t)$  también será una solución válida, entonces si  $S \rightarrow -S$  se observa que las ecuaciones 4.7 cambian de signo.

En cambio cuando consideramos que,  $S_z = S_y = 0$  y  $S_x = -S$ , las ecuaciones 4.5 se reescriben como:

$$\begin{aligned}\dot{S}_x &= \left[ \frac{p}{1+S} - \Gamma - \gamma \right] S \\ \dot{S} &= \left[ \frac{p}{1+S} - \Gamma - \gamma \right] S\end{aligned}\quad (4.8)$$

Se observa que hay simetría simétrica puesto que si consideramos el mismo criterio (si  $S(t)$  es una solución del sistema, entonces  $-S(t)$  también) se observa que las ecuaciones 4.8 permanecen igual.

De modo que los estados antisimétrico y simétrico, respectivamente vienen dados por:

$$\begin{aligned}\text{Antisimétrico} &\longrightarrow [-S, 0, 0] \\ \text{Simétrico} &\longrightarrow [+S, 0, 0]\end{aligned}\quad (4.9)$$

#### 4.1.1. Puntos fijos $F_a$

Ambos puntos fijos ( $F_s$  y  $F_a$ ) tienen ocupaciones iguales en las dos especies, lo que indica una distribución equilibrada entre los componentes del sistema ( $S_z = 0$ ).

Sustituyendo  $S_x = -S$ ,  $S_y = S_z = 0$  (estado antisimétrico) en las ecuaciones para  $\dot{S}_x$ ,  $\dot{S}_y$  y  $\dot{S}_z$  (ecuación 4.5):

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = (-S)^2 + 0^2 + 0^2 = S^2$$

$$u = \frac{(1+S) \cdot p}{(1+S)^2 - S_z^2} = \frac{p}{1+S}$$

$$v = \frac{-S_z \cdot p}{(1+S)^2 - S_z^2} = 0$$

$$\frac{dS_y}{dt} = \frac{dS_z}{dt} = 0$$

$$\frac{dS_x}{dt} = -\frac{dS}{dt} = (-S \cdot (u - \Gamma)) - \gamma \cdot S \quad (4.10)$$

Simplificando la ecuación 4.10:

$$\frac{dS}{dt} = S \cdot \left( \frac{p}{1+S} - \Gamma + \gamma \right)$$

Se observa que bastaba con sustituir el estado antisimétrico en la ecuación para  $\dot{S}$  (ecuación 4.5), si  $S = 0$ , se obtiene un bombeo umbral (donde aparece la solución  $F_a$ )  $p_0 = \Gamma - \gamma$  en que se satisface  $\frac{dS}{dt} = 0$ , en cambio si  $S \neq 0$ :

$$\frac{dS}{dt} = 0 = \left( \frac{p}{1+S} \right) - \Gamma + \gamma,$$

$$\left( \frac{p}{1+S} \right) = \Gamma - \gamma = p_0 \longrightarrow \frac{p}{p_0} = 1 + S$$

lo que implica que la ocupación de los condensados en el estado antisimétrico crece linealmente con el bombeo:

$$S = \frac{p}{p_0} - 1 = \frac{p}{\Gamma - \gamma} - 1 \quad (4.11)$$

#### 4.1.2. Puntos fijos $F_s$

Sustituyendo  $S_x = S$ ,  $S_y = S_z = 0$  (estado simétrico) en las ecuaciones 4.5:

$$\begin{aligned} S^2 &= S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = (S)^2 + 0^2 + 0^2 = S^2 \\ u &= \frac{(1+S) \cdot p}{(1+S)^2 - S_z^2} = \frac{p}{1+S} \\ v &= \frac{-S_z \cdot p}{(1+S)^2 - S_z^2} = 0 \\ \frac{dS_x}{dt} &= \frac{dS}{dt} = (S \cdot (u - \Gamma)) - \gamma \cdot S \end{aligned} \quad (4.12)$$

Simplificando la ecuación 4.12:

$$\frac{dS}{dt} = S \cdot \left( \frac{p}{1+S} - \Gamma - \gamma \right)$$

Se observa que bastaba con sustituir el estado simétrico en la ecuación para  $\dot{S}$  (ecuación 4.5), si  $S = 0$ , se obtiene un bombeo  $p' = \Gamma + \gamma$  en que se satisface  $\frac{dS}{dt} = 0$ , en cambio si  $S \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{dS}{dt}}{S} &= \frac{0}{S} = \left( \frac{p}{1+S} \right) - \Gamma - \gamma, \\ \left( \frac{p}{1+S} \right) &= \Gamma + \gamma = p' \longrightarrow \frac{p}{\Gamma + \gamma} = 1 + S \end{aligned}$$

lo que implica que la ocupación de los condensados crece linealmente con el bombeo como en el caso de la ecuación 4.11.

$$S = \frac{p}{p'} - 1 = \frac{p}{\Gamma + \gamma} - 1 \quad (4.13)$$

Estos puntos fijos son soluciones estables del sistema, lo que significa que el sistema tiende a converger hacia el estado simétrico o antisimétrico dependiendo de las condiciones iniciales ( $\Gamma$ ,  $\gamma$  y  $p$ ).

4.1.3. Comportamiento  $F_a$  y  $F_s$ 

En la gráfica 10 se observa los comportamientos de las soluciones  $F_a$  y  $F_s$ , los puntos fijos ( $F_a$  ó  $F_s$ ) están determinados por el valor de  $S$  (que depende del tipo de estado ya sea antisimétrico/simétrico). Dependiendo de los valores específicos de  $p$ ,  $\Gamma$  y  $\gamma$ , existirán diferentes puntos fijos y su estabilidad dependerá de las condiciones iniciales del sistema.

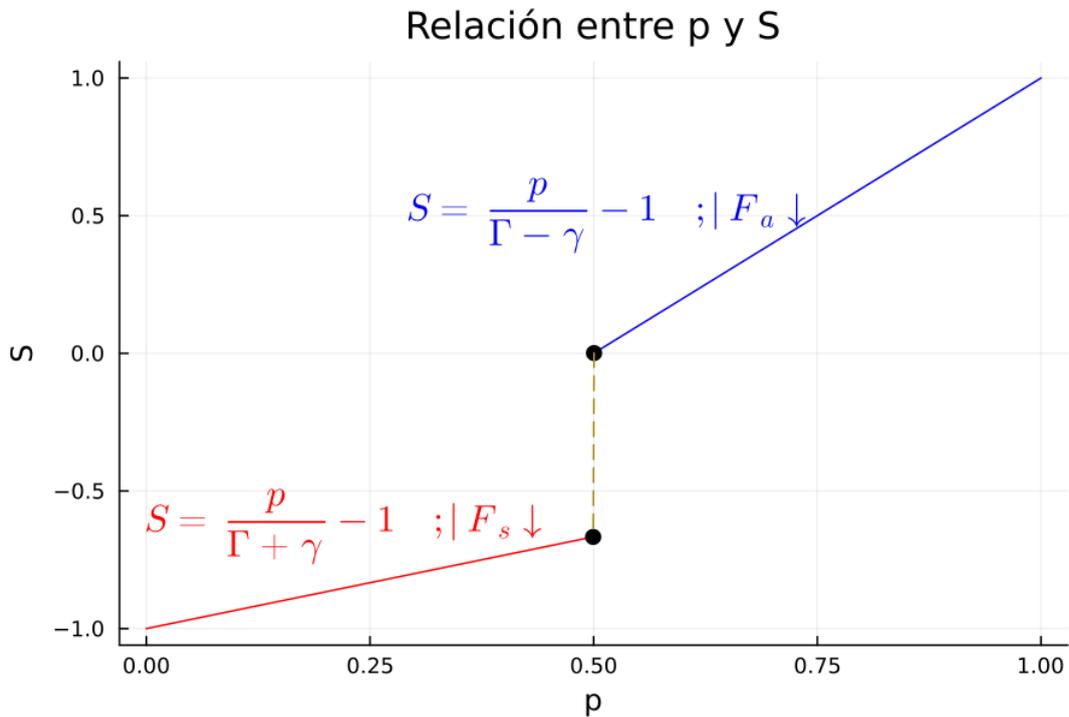


Figura 10: Soluciones de  $F_a$ ,  $F_s$  (descritas por las ecuaciones 4.11 y 4.13). Línea roja muestra el comportamiento de la solución  $F_s$  y la azul  $F_a$ , los puntos negros indican la discontinuidad en los estados que ocurre cuando  $p_0 = p = \Gamma - \gamma$  y cuando  $p' = p = \Gamma + \gamma$ . Para generar esta gráfica se utilizó a  $\Gamma = 1$  y  $\gamma = 0.5$ .

Otro punto fijo es el trivial:

$$S_x = S_y = S_z = S = 0$$

## 4.2. Dinámica del sistema

Las condiciones iniciales y las propiedades del sistema, incluyendo el bombeo y otros parámetros ( $\Gamma, \gamma, \epsilon, \alpha$ ), influyen en el comportamiento del sistema y, en consecuencia, en la dinámica y mezcla de las especies en el condensado. Las condiciones iniciales determinan la configuración de las variables en el momento inicial, tales condiciones pueden variar ampliamente y afectarán la evolución del sistema a lo largo del tiempo. Además, las propiedades del sistema, como el bombeo o la tasa de excitación externa, junto con otros parámetros desempeñan un papel fundamental en el comportamiento del sistema ya que pueden afectar la convergencia de las trayectorias en puntos estacionarios, al igual de la velocidad en que se alcanza. Por ello es mejor fijar los parámetros (menos uno) del sistema y observar el comportamiento de las soluciones en función de algún parámetro, como el bombeo  $p$  que puede ser controlado de forma experimental.

A continuación, se lleva a cabo un análisis numérico de las soluciones del sistema dinámico descrito por las ecuaciones 4.5 en función del parámetro de bombeo ( $p$ ). Al variar el valor del parámetro de bombeo dentro del rango deseado, se pueden generar diferentes escenarios y observar cómo cambian las soluciones del sistema.

Mediante métodos numéricos como la integración numérica de las ecuaciones diferenciales, es posible calcular las soluciones del sistema para diferentes valores de  $p$ . Esto permite estudiar la evolución temporal de las variables  $S_x, S_y$  y  $S_z$  y obtener información sobre el comportamiento dinámico del sistema. Para los gráficos presentados en esta sección se usarán los mismos valores de los parámetros  $\Gamma = 1.0, \gamma = 0.5, \alpha = 1.5, \epsilon = 2.0$ .

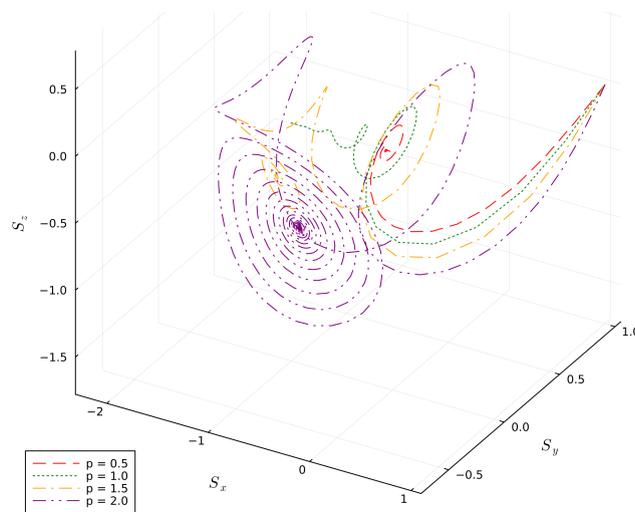


Figura 11: Comportamiento del sistema en bombeo pequeño.

Para valores de bombeo pequeño se espera que el sistema se encuentre en un estado no condensado o débilmente excitado. Esto significa que las poblaciones de los distintos modos  $n_{\pm 1}$  pueden tener valores cercanos a cero o pequeños, indicando una baja ocupación de los estados excitados. En términos del comportamiento de las soluciones del sistema, en la figura 11 se observa que las variables  $S_x, S_y$ , y  $S_z$  son pequeñas o cercanas a cero, lo que implica que el vector de espín  $S$  tiene una longitud pequeña. Esto indica que no

hay una polarización significativa en el sistema, así mismo para valores pequeños de  $p$  el término  $u(S)$  es insuficiente para superar los términos de relajación y acoplamiento presentes en las ecuaciones, lo que resulta en una dinámica débil o lenta.

Para valores de bombeo medio en el sistema dinámico, se pueden observar comportamientos más interesantes y complejos. En la figura 12, se muestra que el vector de espín  $S$  tiene una longitud apreciable y puede exhibir una polarización significativa en el sistema. Además, se puede observar que en un rango de valores de bombeo, las trayectorias se repiten, lo que indica la presencia de un comportamiento periódico en el sistema. Estos patrones recurrentes en las soluciones indican que el sistema sigue una órbita cerrada y vuelve al mismo estado en cada ciclo, también se observa que se producen fluctuaciones en la densidad de especies ya que se producen oscilaciones en la componente  $S_z$ , relacionada con la diferencia entre las densidades. A medida que las especies se aniquilan y se crean, la componente  $S_z$  puede experimentar cambios periódicos a conforme, las densidades fluctúan, se puede interpretar la física del fluido polaritónico, por ejemplo, si  $S_z$  (indica la diferencia en las densidades) es una cantidad adquiere una cantidad positiva significa que hay más cantidad de fluido polaritónico ( $n_{+1}$ ) en ese instante.

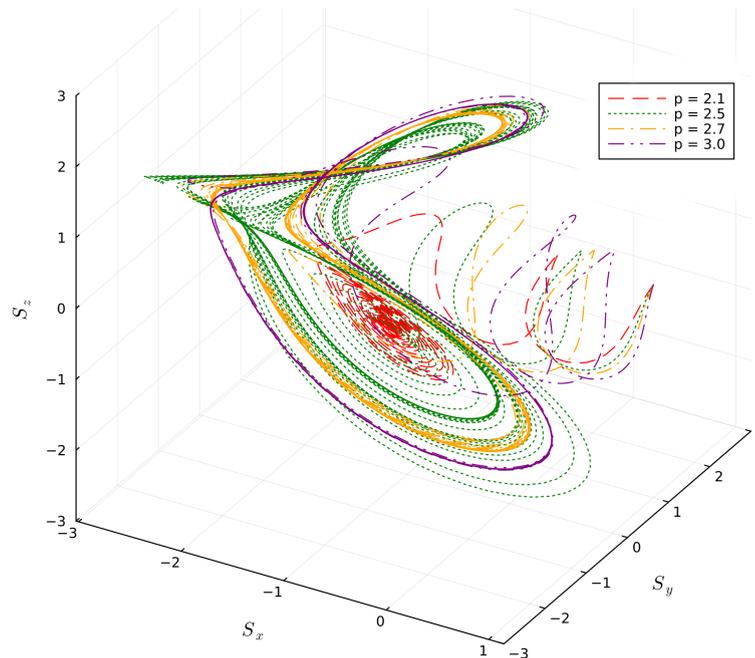


Figura 12: Comportamiento del sistema en bombeo medio. Se observa un cambio significativo en la trayectoria que siguen las soluciones del sistema, en especial para  $p= 2.1$  (línea roja) que hay una convergencia en un punto y para  $p= 2.5$  (línea verde) que las trayectorias se repiten.

Cuando el bombeo medio es más pequeño, es posible que los términos de relajación y acoplamiento dominen sobre el término de bombeo. Esto significa que la tendencia del sistema es alcanzar un estado de equilibrio donde la diferencia entre las densidades de las especies que contribuyen al condensado se reduce, lo que lleva a una convergencia de la componente  $S_z$  hacia un punto fijo. Por otro lado, cuando el bombeo medio es mayor, es posible que el término de bombeo sea lo suficientemente fuerte como para superar los

efectos de relajación y acoplamiento. Esto puede dar lugar a fluctuaciones en la diferencia entre las densidades de las especies  $y$ , y por lo tanto, a oscilaciones en la componente  $S_z$  como se puede ver en la figura 12. La principal diferencia entre estos dos casos radica en la estabilidad y convergencia de la componente  $S_z$ . En el caso de un bombeo medio más pequeño, la componente  $S_z$  tiende a converger hacia un estado estacionario. En cambio, en el caso de un bombeo medio mayor, las oscilaciones en la componente  $S_z$  indican una dinámica más compleja y menos estable.

En el caso de un bombeo alto, donde los términos de bombeo son dominantes sobre los términos de relajación y acoplamiento, puede haber una saturación del sistema. Esto significa que una especie en el condensado se bombea intensamente, lo que conduce a un aumento significativo en su densidad. Al mismo tiempo, la interacción repulsiva entre las especies puede causar una disminución en la densidad de la otra especie. Como resultado, la componente  $S_z$  puede disminuir ya que la diferencia entre las densidades de las especies se reduce, dicho efecto de saturación se puede observar en figura 13, se aprecia que para  $p \approx 4.6$  el sistema se satura, y por ende  $S_z$  comienza a adquirir un solo tipo de especie, lo que provoca la convergencia de  $S_z$  conforme el bombeo aumenta.

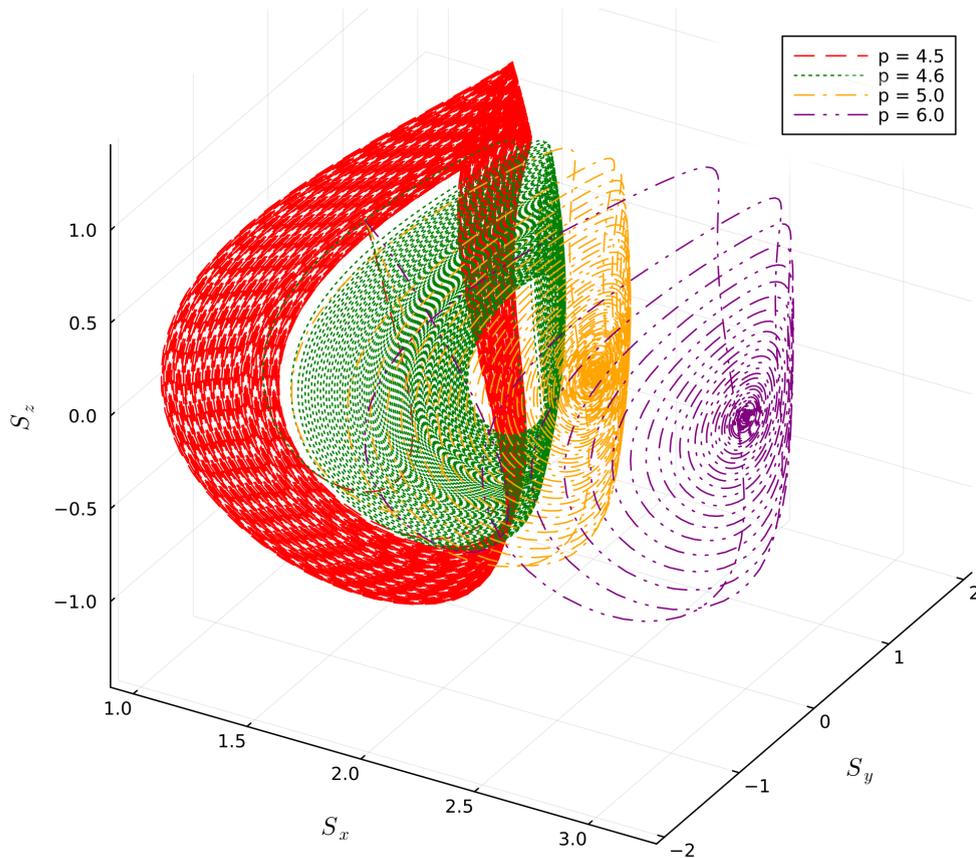
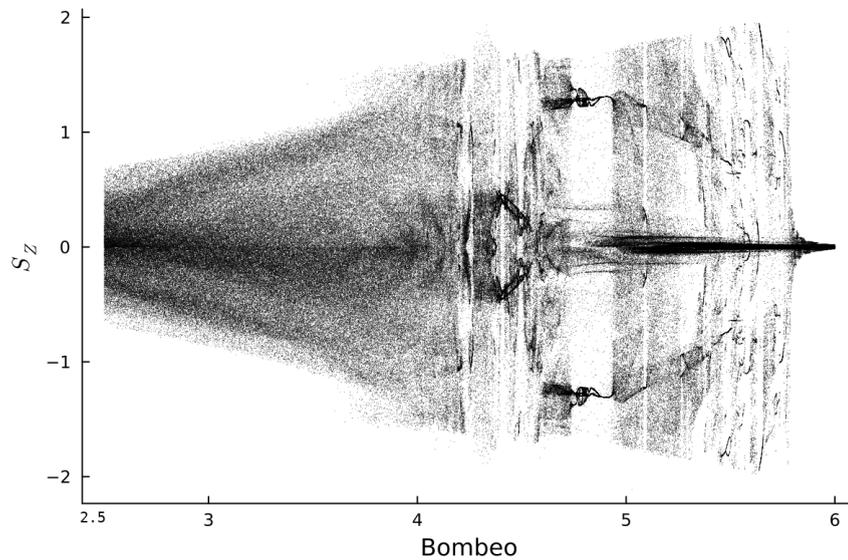


Figura 13: Comportamiento del sistema en bombeo alto. La saturación del sistema en el caso de un bombeo alto puede conducir a una disminución de la componente  $S_z$  debido al aumento de la densidad de una especie y la disminución de la densidad de la otra especie en el condensado.

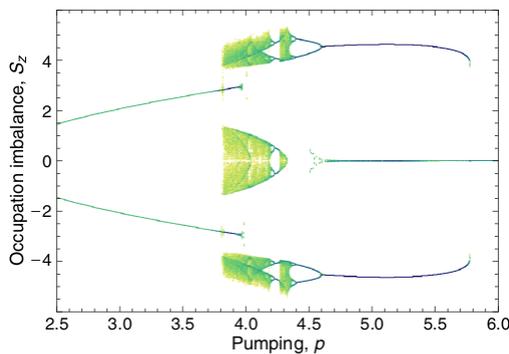
Para el bombeo suficientemente alto pero que no alcanza la saturación del sistema ( $p \approx 4.5$ ), se observan comportamientos periódicos para las trayectorias de las soluciones, en cambio cuando aumenta la saturación (bombeos aún más altos) las trayectorias de las soluciones pierden estabilidad y convergen en un punto.

### 4.3. Imbalance de los condensados

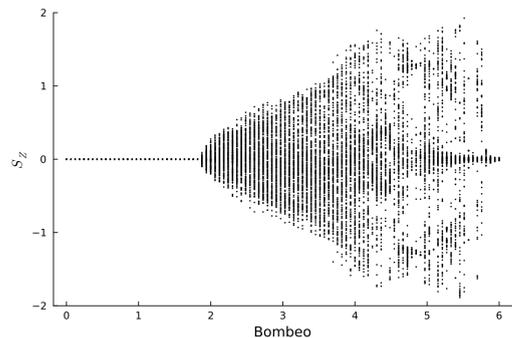
Se ilustra la secuencia de bifurcación que experimenta el condensado de polaritones interactuantes a medida que aumenta el bombeo en la figura 14. Esta figura muestra la colección de valores de  $S_z$  en los puntos de retorno, es decir, los puntos donde  $dS_z/dt = 0$ , en función de la intensidad del bombeo  $p$ . Para cada nivel de bombeo, los puntos se han obtenido a partir de ocho trayectorias generadas a partir de las ecuaciones 4.5 con condiciones iniciales aleatorias en la etapa final de la evolución como en la Ref. [7]. El gráfico



A) Reproducción de figura 1 de la Ref. [7].



B) Figura 1 tomada de la Ref. [7].



C)  $p = [0,6]$

Figura 14: Mostrando el desequilibrio de las ocupaciones de dos condensados  $S_z$  en los puntos de retorno de la trayectoria de espín.

se ha obtenido recolectando los puntos de retorno de ocho trayectorias con condiciones iniciales aleatorias en la etapa final de la evolución entre  $t = 400$  y  $t = 500$ , y para los parámetros  $\Gamma = 1$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\epsilon = 2$ ,  $\alpha = 0.75$ . Todos los parámetros están en unidades de tasa de disipación. En la figura 14 A) y C) son lo mismo con la única diferencia de las subdivisiones para el bombeo y la escala en la variable de bombeo. El funcionamiento de código empleado es el siguiente:

1. Define la función **equations**, que calcula las derivadas de las variables de estado del sistema en función del tiempo (ecuaciones 4.5), las variables de estado actuales y los parámetros del sistema. Estas derivadas representan la evolución temporal de las variables  $S_x$ ,  $S_y$  y  $S_z$  del sistema.
2. A continuación, el código establece valores para los parámetros del sistema y define un rango de valores para un parámetro de bombeo llamado  $p$ . Luego, realiza simulaciones para diferentes valores de  $p$ . Para cada valor de  $p$ , se resuelven las ecuaciones diferenciales para cada trayectoria utilizando el método numérico **Tsit5**.
3. Se recopilan los puntos de retorno donde la derivada de  $S_z$  con respecto al tiempo es cero.
4. Finalmente, el código grafica los valores de  $S_z$  en los puntos de retorno para cada trayectoria en función del parámetro de bombeo  $p$ . El objetivo es visualizar la bifurcación del condensado de polaritones a medida que varía el parámetro de bombeo.

La figura A) es consistente con la información de la figura B), recordando que  $F_a$  y  $F_s$  aparecían cuando  $S_z = 0$ , se nota en C) que hay inestabilidad de  $F_a$ ,  $F_s$  para cuando  $p \approx 1.98$  puesto que  $S_z \neq 0$ , se observa que valores de  $p > 4.5$   $S_z$  puede tomar tres valores posibles en  $S_z$  ( $\max S_z$ ,  $\min S_z$ ,  $S_z = 0$ ) pero a medida que el bombeo aumenta,  $S_z \rightarrow 0$  por la saturación de una especie en el condensado. Tal comportamiento observado en la figura 14 es consistente con todas las figuras de secciones anteriores, recordando que para bombeos pequeños el sistema tendía a presentar oscilaciones pequeñas y luego convergía a  $S_z = 0$  (ver figura 11), lo mismo ocurre para bombeos altos (debido a la saturación) ver figura 13.

## 5. Sección de Poincaré

La construcción de secciones de Poincaré permite analizar la estabilidad, inestabilidad y la presencia de caos en la dinámica de un sistema. Estas secciones son representaciones gráficas en las cuales se proyectan las trayectorias del sistema en un plano o una superficie de menor dimensión que el espacio de fase completo. Para construir una sección de Poincaré se utilizan dos variables del sistema, el espacio de fase completo suele ser de alta dimensionalidad y resulta difícil de visualizar. El ángulo  $\theta$ , es útil para visualizar cómo la trayectoria se mueve en el plano  $S_x - S_y$ , se calcula como el arcotangente de la razón entre las componentes  $S_y$  y  $S_x$  de la solución del sistema 4.5, es decir,  $\theta = \arctan(S_y/S_x)$ . De modo que trazar  $S_z$  en el eje vertical y  $\theta$  en el eje horizontal generaría una sección de Poincaré que permitiría visualizar la intersección de la trayectoria del sistema con el plano definido por  $S_z$  y  $\theta$ .

Los valores para los parámetros en esta sección son  $[\Gamma = 1.0, \gamma = 0.5, \alpha = 1.5, \epsilon = 2.0]$  y el bombeo  $p$  variable.

Al fijar una condición inicial, se establece un punto de partida específico en el espacio de fase del sistema. Esto significa que todas las trayectorias generadas para diferentes valores de  $p$  comenzarán desde el mismo punto inicial. Al variar el bombeo, la influencia de la excitación externa en el sistema lo que permite explorar y analizar cómo el sistema responde a diferentes valores de  $p$ , el bombeo puede considerarse un parámetro experimental que puede introducir caos en un sistema dinámico puede llevar al sistema a través de bifurcaciones, que son cambios abruptos en el comportamiento del sistema a medida que se varía un parámetro (vease la figura 14).

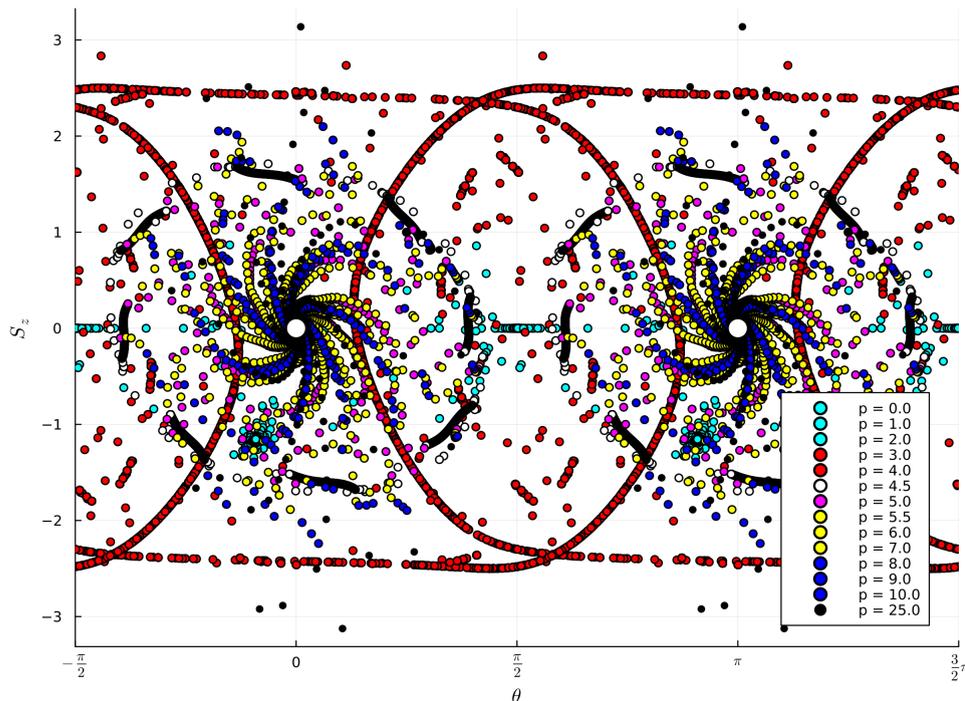


Figura 15:  $S_z$  vs  $\theta$ . Dinámica para una condición inicial fija  $s_0 = [1, 1, 1]$ .

En la figura 15 los puntos blancos ubicados en  $(0, 0)$  y  $(\pi, 0)$  pueden representar correctamente aquellos puntos donde  $(S_x, S_y, S_z) = (\pm S, 0, 0)$ , que como ya se vio en la sección anterior representan los estados simétricos y antisimétricos (ecuaciones 4.13 Y 4.11). En la sección de Poincaré también se observan los comportamientos vistos en las gráficas del comportamiento del sistema conforme el bombeo aumentaba (gráficas 11, 12, 13), por ejemplo para un bombeo  $p = 3$  en su respectiva gráfica (12) se veía que la trayectoria de la solución del sistema se repite y en la sección se observa una trayectoria cerrada, en cuanto para bombeos grandes el sistema se satura y converge.

La presencia de trayectorias cerradas en la sección de Poincaré indica estabilidad en esas regiones del espacio de fase. Para bombeos altos se observa la formación de atractores alrededor de los puntos  $(0,0)$  y  $(\pi,0)$  lo que implica que estos estados son estables y pueden considerarse como puntos de equilibrio o estados estacionarios del sistema. Para visualizar mejor el comportamiento ver la siguiente figura (16) solo se muestran bombeos representativos. Además se verifica que para bombeos bajos ( $p = 2$ ) se presenta dinámica débil (se aplica un bombeo que es insuficiente para superar los términos de relajación y acoplamiento del sistema), para bombeo medio ( $p = 3$  y  $p = 4$ ) se observa la presencia de un comportamiento periódico en el sistema, y para bombeos altos ( $p = 6$ ) el sistema se satura, por lo que el sistema tiende a un valor estable.

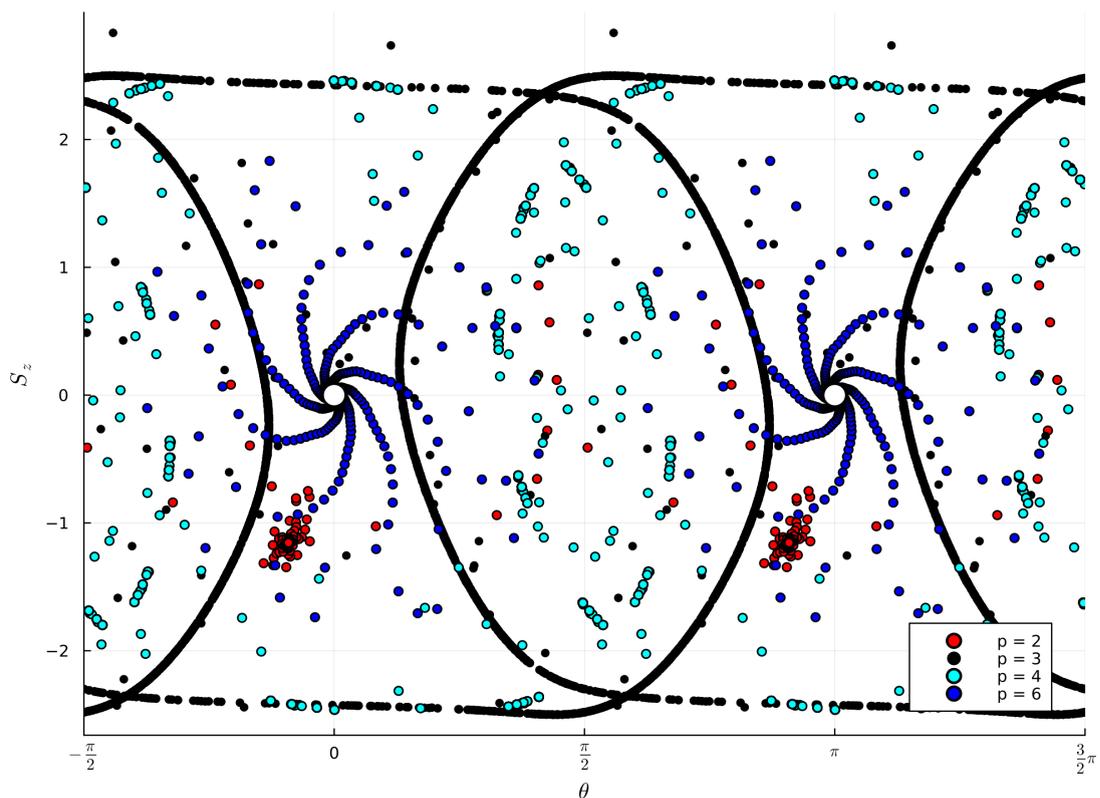


Figura 16: Sección de Poincaré  $S_z$  vs  $\theta$  para bombeos representativos. Dinámica para una condición inicial fija  $s_0 = [1, 1, 1]$ .

Ahora se considerarán condiciones iniciales aleatorias  $s_0$ , ya que obtener los datos en condiciones aleatorias en lugar de fijarlos tiene varios beneficios, que permiten:

**Verificar sensibilidad de condiciones iniciales** Al cambiar ligeramente las condiciones iniciales, es posible observar cambios significativos en el comportamiento del sistema capturando así la sensibilidad del mismo, y por lo tanto verificar/estudiar la tendencia caótica en el sistema.

**Evitar sesgo** Fijar las condiciones iniciales, introduce sesgos en los resultados, ya que elegir condiciones iniciales específicas podrían mostrar un comportamiento particular, limitando la comprensión del sistema.

**Validar resultado** Si los resultados se mantienen consistentes a pesar de las variaciones en las condiciones iniciales, es más probable que representen características del sistema, de modo que los patrones observados son intrínsecos al sistema y no están influenciados en gran medida por las condiciones iniciales específicas.

Se consideraron 10 condiciones iniciales aleatorias de  $[0,1]$  para  $s_0 = (S_x, S_y, S_z)$  en la sección de poincaré, con el fin de validar que el comportamiento observado en la figura 15 se mantiene para  $S_z$ . Los resultados se observan en las figuras 17 y 18.

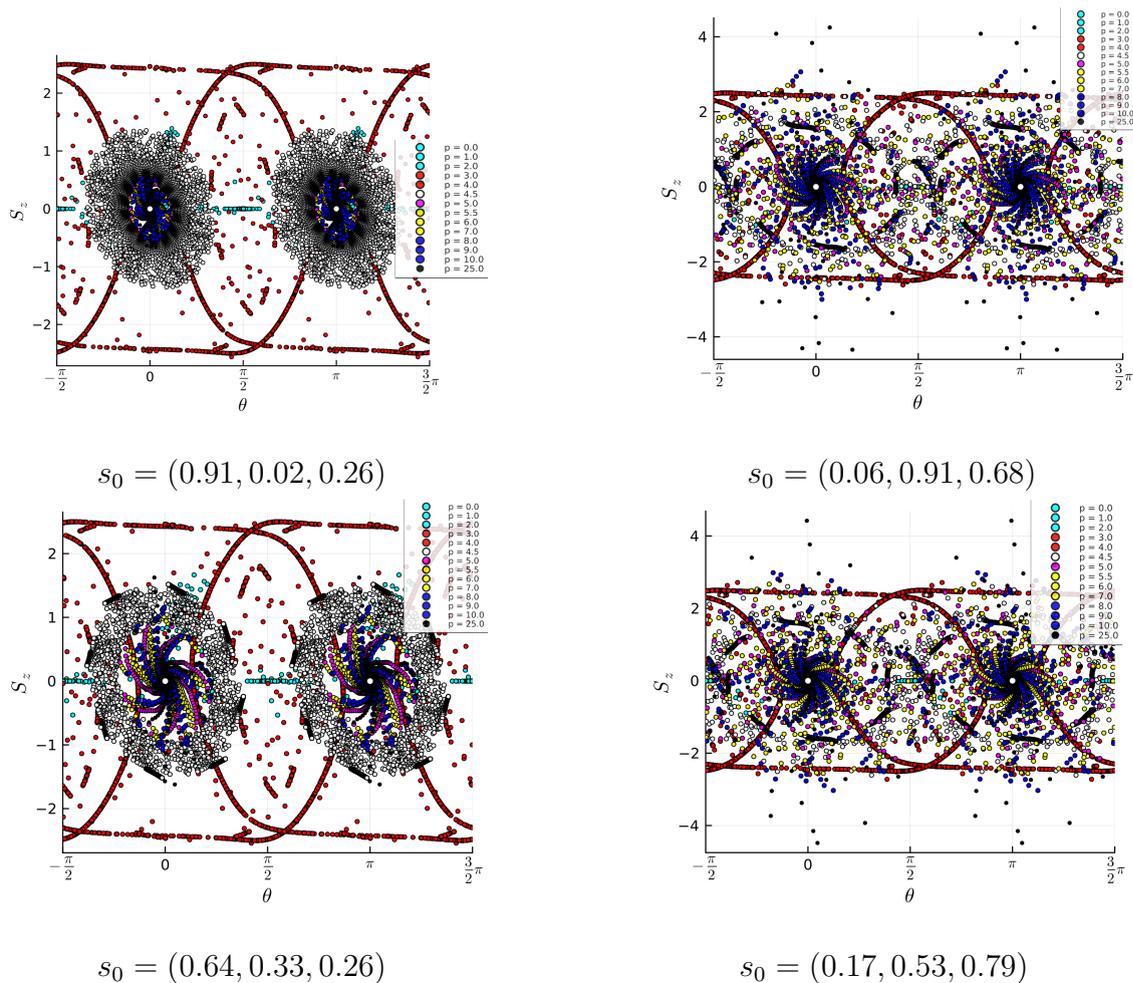


Figura 17: Muestreo aleatorio de condiciones iniciales  $s_0$ .

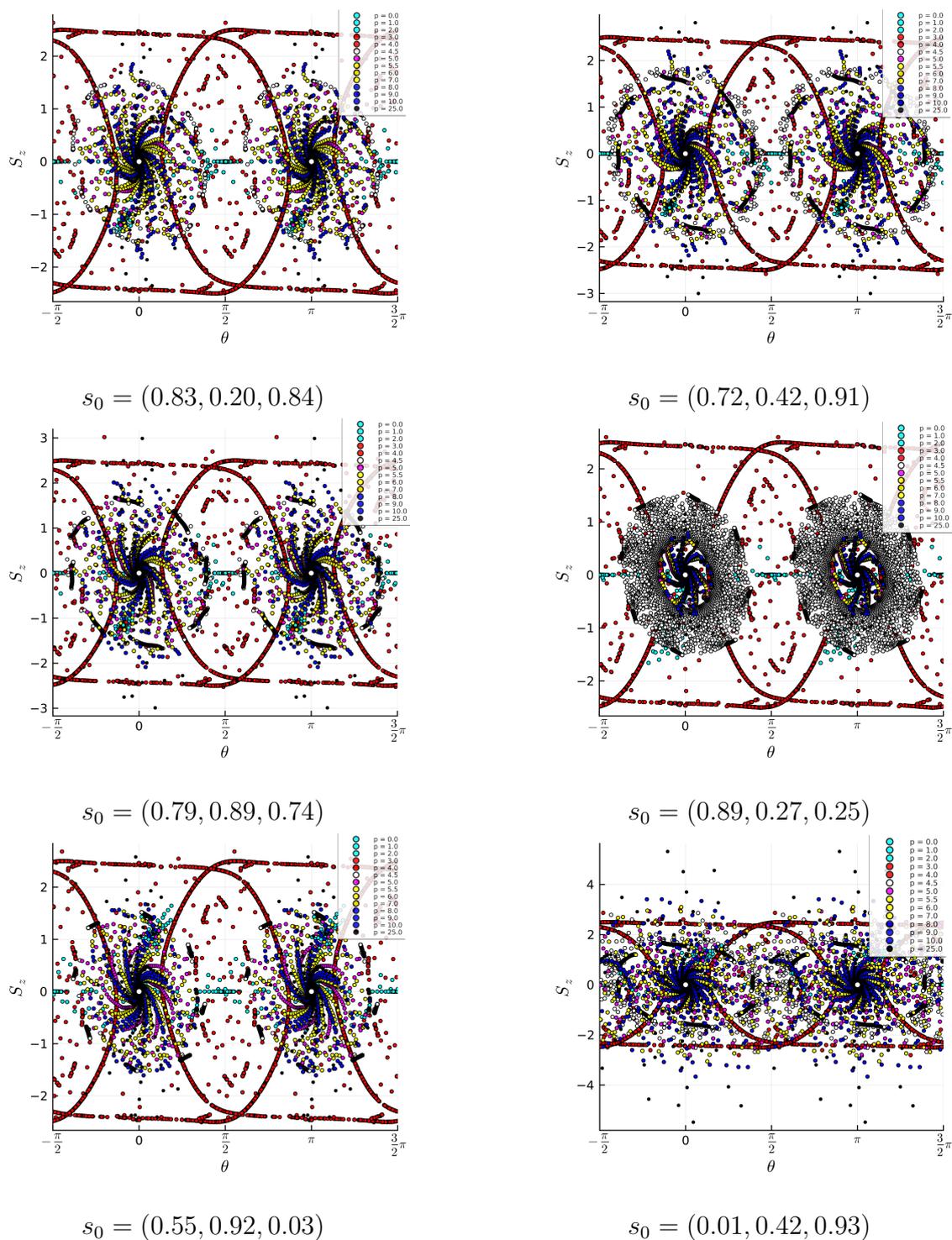


Figura 18: Muestreo aleatorio de condiciones iniciales  $s_0$ . Continuación de la figura 17.

Las figuras 17 y 18 muestran que este sistema es sensible a las condiciones iniciales (característica en sistemas caóticos) y que la sección de Poincaré utilizada es reproducible con el uso de condiciones iniciales. Para el bombeo  $p = 4.5$ , para todas las condiciones iniciales aleatorias  $s_0$  se observó que para el bombeo  $p = 3.0$  se genera una trayectoria cerrada en la sección de Poincaré, es un indicio de que existe periodicidad en el sistema. La perio-

dicidad implica que la trayectoria del sistema se repite (patrón recurrente) después de un cierto período de tiempo, mismo que se observa en la figura de la dinámica en bombeo medio (figura 12). El análisis de órbitas periódicas será en un trabajo futuro.

### 5.1. Secciones para bombeos representativos

En esta sección se plantea obtener la sección de poincaré pero para bombeos fijos y con condiciones aleatorias, con el fin de explorar diferentes regiones del espacio de fase del sistema, ya que puede revelar diferentes trayectorias y comportamientos dinámicos que pueden no ser evidentes con condiciones iniciales específicas, esto permite analizar la variabilidad y la sensibilidad del sistema a diferentes condiciones iniciales. En esta sección se representarán la sección de poincaré de los bombeos sujetas a 60 condiciones iniciales ( $s_0$ ), las cuales podrán adquirir valores  $[0,1]$ .

$$p \in \{2, 2.5, 3, 4, 4.5, 4.6, 5, 6, 9, 100\}$$

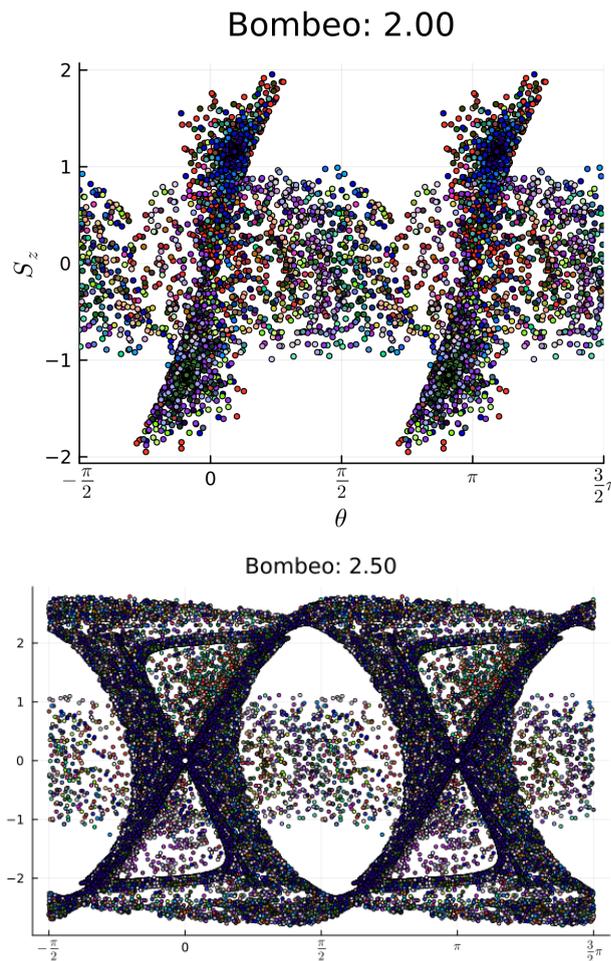


Figura 19:  $[\Gamma = 1.0, \gamma = 0.5, \alpha = 1.5, \epsilon = 2.0]$ .

En la figura 20 para el bombeo  $p = 3.0$  se observa una curva cerrada, indicio de comportamiento periodico (mismo que se observa en la figura de la dinámica para bombeos medios (figura 12)), en cambio en la figura de  $p = 4.0$  el comportamiento es cuasi periodico (se refiere a una dinámica en la cual se observa un patrón que no es estrictamente periódico, pero exhibe cierto grado de regularidad a largo plazo) puesto que apesar que aparece una curva cerrada en la sección de poincaré, tambien se generan estructuras cerca de  $[0,0]$  y  $[\pi,0]$  sugerentes a la formación de atractores en dichos puntos. Esa formación de atractores se observa mejor en la figura 21.

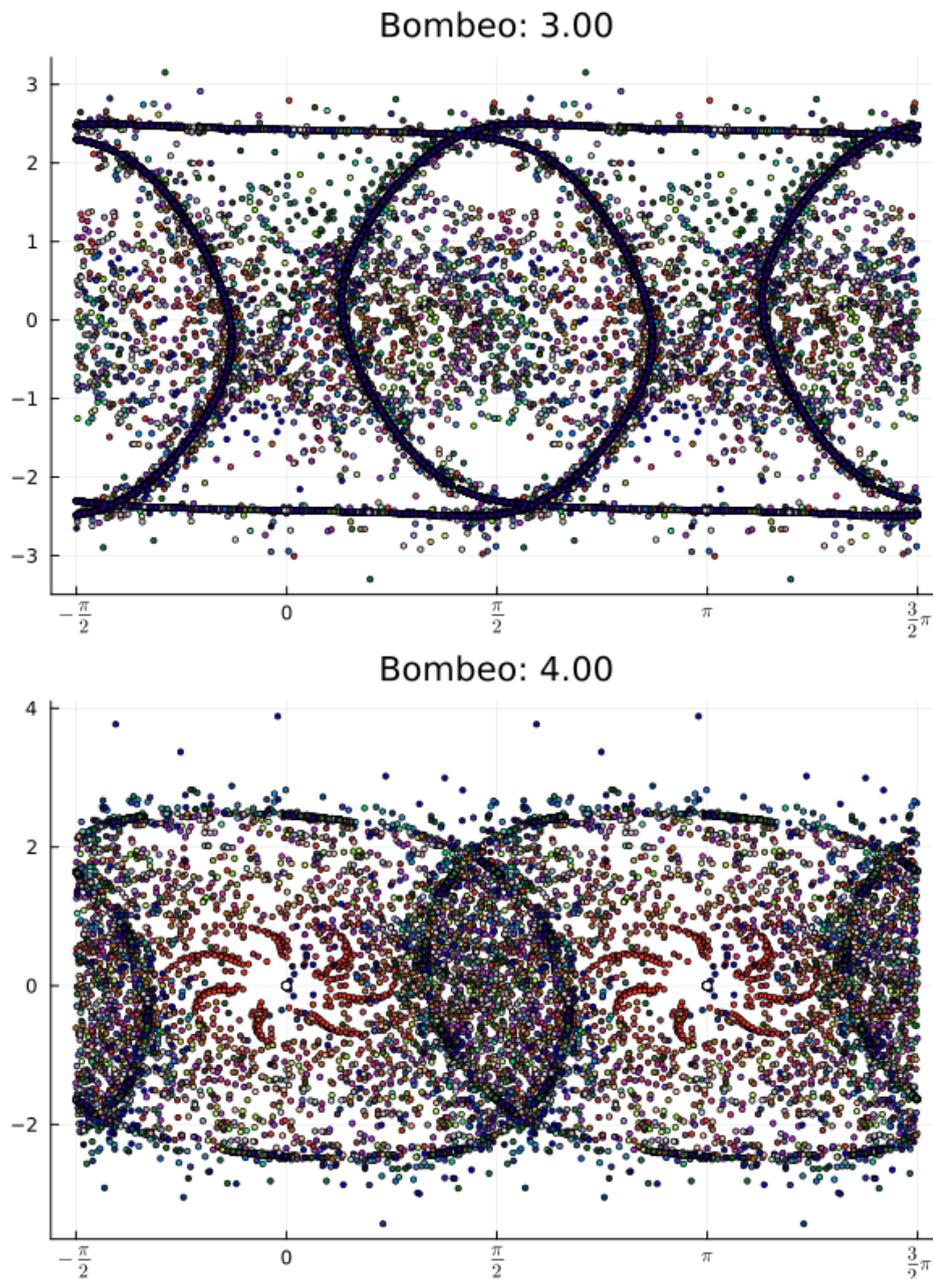


Figura 20:  $[\Gamma = 1.0, \gamma = 0.5, \alpha = 1.5, \epsilon = 2.0]$ .

Los sistemas disipativos (como este sistema) tienden a converger hacia puntos fijos estables o ciclos límite, es menos probable encontrar trayectorias que describan órbitas cerradas alrededor de un punto fijo como se observa en la figura 21. En esta figura se observa

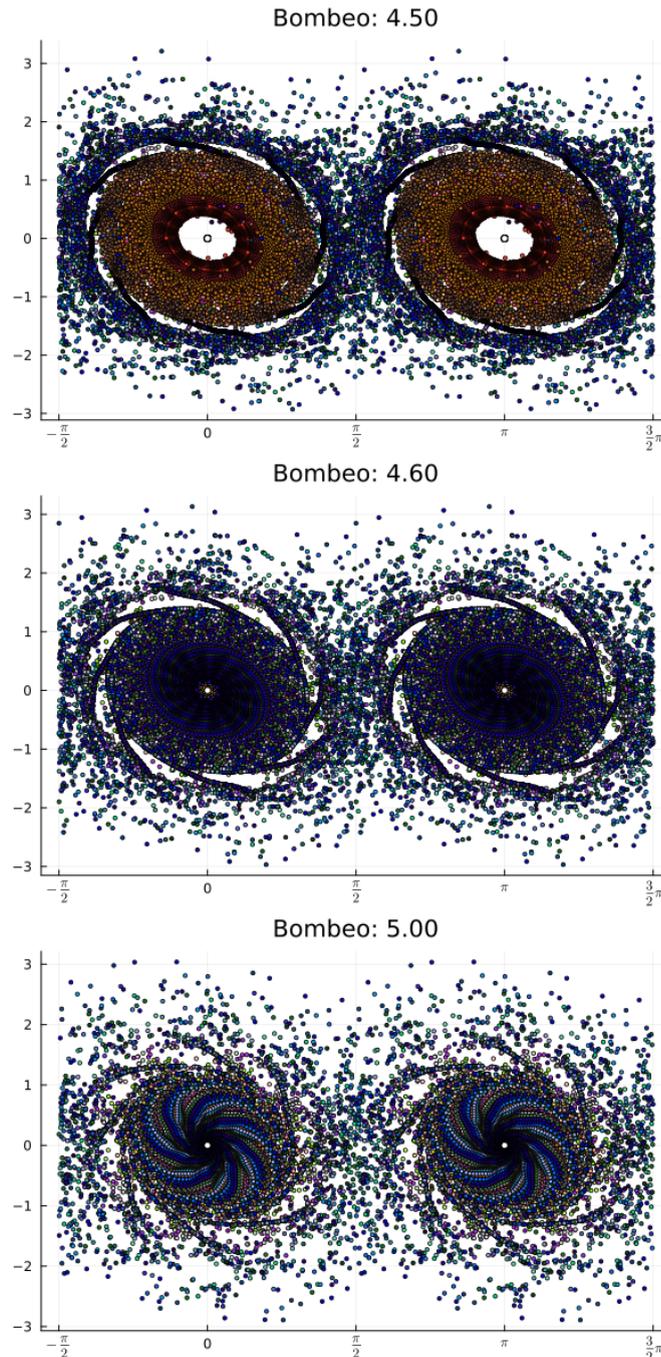


Figura 21:  $[\Gamma = 1.0, \gamma = 0.5, \alpha = 1.5, \epsilon = 2.0]$ .

un comportamiento interesante, un gran salto en la dinámica del sistema, puesto que en  $p = 4.5$  existe cierta periodicidad y con un ligero cambio en el bombeo se producen atractores entorno a los puntos estables situados en  $[0,0]$  y  $[\pi,0]$ . Una cuenca de atracción [7] representa la región en el espacio de fase del sistema donde las trayectorias que parten

de diferentes condiciones iniciales convergen eventualmente hacia un atractor particular. Cuando las condiciones iniciales se eligen al azar o son arbitrarias, las probabilidades de que se realicen diferentes condensados se determinan mediante los volúmenes normalizados de las correspondientes cuencas de atracción. En esencia, a mayor volumen de una cuenca de atracción, mayor será la probabilidad de que el sistema termine en el atractor asociado a esa cuenca veasé figura 5 de la Ref. [7].

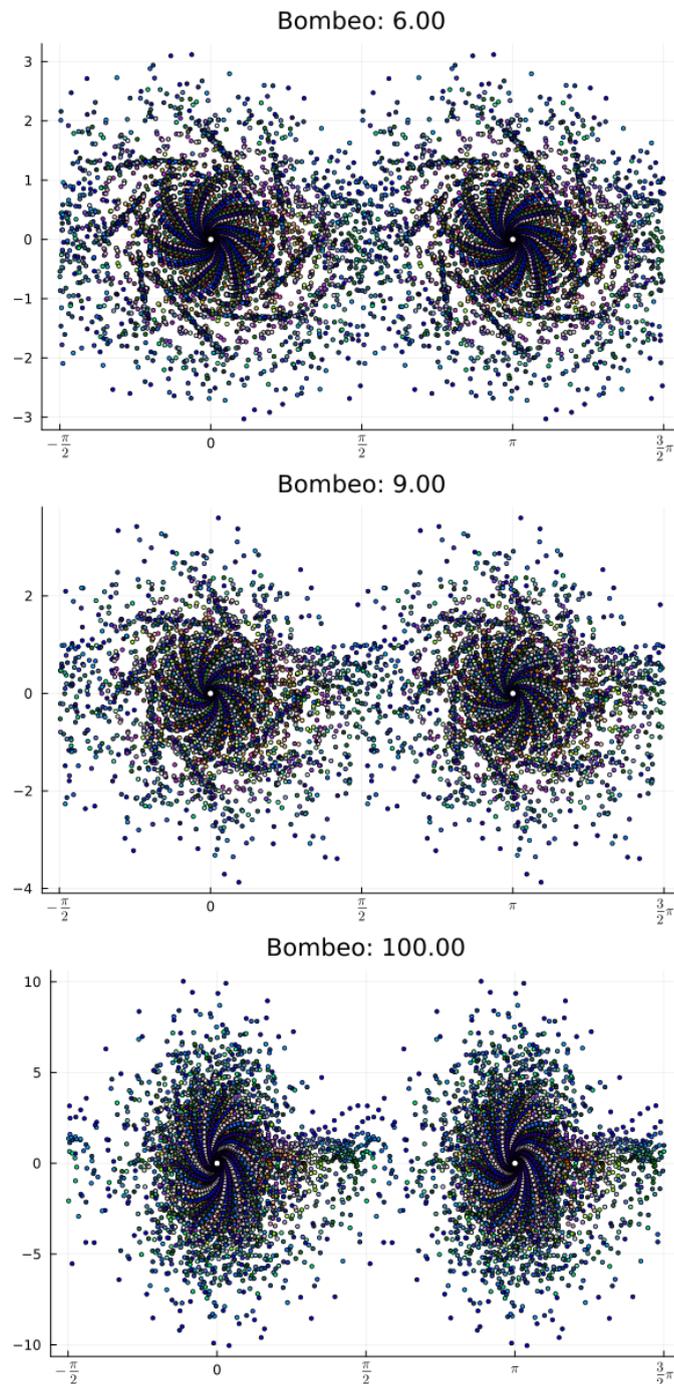


Figura 22: [ $\Gamma = 1.0$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $\epsilon = 2.0$ ].

## 6. Órbitas periódicas inestables

Una órbita periódica inestable (UPO, por sus siglas en inglés) es una trayectoria cerrada en un sistema dinámico caótico que muestra una sensibilidad extrema a las condiciones iniciales [25]. A diferencia de las órbitas periódicas estables, que convergen hacia un ciclo límite, las UPOs son inestables y se alejan exponencialmente de la trayectoria periódica a medida que pasa el tiempo. A partir de las UPOs se puede calcular información estadística y propiedades macroscópicas del sistema, ya que el conjunto de órbitas periódicas inestables puede ser visto como los microestados a partir de los cuales se puede calcular la descripción macroscópica del sistema [20]. Estas UPOs representan la estructura subyacente en el espacio de fase observada en los sistemas caóticos. Cuanto más inestable sea una órbita, mayor será la tendencia de las trayectorias cercanas a alejarse de ella con el tiempo. La presencia de UPOs en un atractor extraño es una característica clave de los sistemas caóticos, cuando se estudia la tasa de crecimiento exponencial de las UPOs incrustadas dentro del atractor, se puede estimar la entropía topológica y obtener información sobre el nivel de caos presente en el sistema. Las UPOs incrustadas en un atractor caótico son el resultado de las interacciones entre las trayectorias periódicas y caóticas en el sistema.

### 6.1. Control de caos y UPOs

La medida natural es una medida de probabilidad que caracteriza la distribución a largo plazo de puntos en el espacio de fase de un sistema caótico. Proporciona información sobre la probabilidad de encontrar una trayectoria en diferentes regiones del espacio de fase. La relación entre las UPOs y la medida natural surge del hecho de que la medida natural se puede aproximar considerando las contribuciones de estas orbitas (las UPOs están embebidas en el atractor [16]), asigna probabilidades más altas a regiones del espacio de fase que están densamente cubiertas por UPOs. La ecuación para la medida natural en el caso discreto es la siguiente:

$$\mu(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S dx \delta(x - M^n(x)) \quad (6.1)$$

donde  $\mu(S)$  es la medida natural de un conjunto  $S$ , que representa la probabilidad de que el sistema permanezca en el conjunto  $S$ ,  $M(x)$  es el mapa o función de evolución del sistema dinámico,  $n$  es el número de iteraciones,  $\int_S dx$  denota la integral sobre el conjunto  $S$  y  $\delta(x - M^n(x))$  es la función delta de Dirac, que es cero excepto cuando  $x = M^n(x)$  (se refiere al punto fijo del mapa después de  $n$  iteraciones), donde toma un valor de  $\infty$ .

La ecuación 6.1 indica la probabilidad de que una trayectoria del sistema permanezca en el conjunto  $S$  después de un número infinito de iteraciones. Una forma alternativa de expresar la medida natural en términos de los puntos fijos y las jacobianas del sistema dinámico, y está dada por:

$$\mu(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}^*} \frac{1}{|\det(\mathbf{1} - \mathbf{DM}^{(n)}(\mathbf{x}^*))|}. \quad (6.2)$$

## 6.2. Entropía generalizada

Una generalización de la entropía topológica y métrica para un atractor hiperbólico en dos dimensiones denotada como  $H_q$ , se define como una suma sobre las órbitas periódicas [26]. La entropía en sistemas dinámicos proporciona información sobre la distribución de las trayectorias y cómo se exploran diferentes regiones del espacio de fase. En sistemas caóticos, donde las trayectorias son altamente sensibles a las condiciones iniciales, la entropía tiende a ser alta, lo que indica que las trayectorias están distribuidas de manera más uniforme en el espacio de fase y que el sistema está explorando y cubriendo una gran cantidad de estados posibles.

La ecuación se puede expresar de la siguiente manera:

$$H_q = \frac{1}{1-q} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \langle e^{(1-q) \ln |\Lambda_u(\mathbf{x}_{jn}, n)|} \rangle = \frac{1}{1-q} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left\{ \sum_j |\Lambda_u(\mathbf{x}_{jn}, n)|^{-q} \right\} \quad (6.3)$$

En la ecuación 6.3,  $q$  representa un parámetro de orden que permite una gama continua de valores de entropía, abarcando los casos especiales de entropía topológica ( $q = 0$ ) y entropía métrica ( $q = 1$ ) [26]. El símbolo  $\langle \cdot \rangle$  denota un promedio sobre las órbitas periódicas,  $\Lambda_u(\mathbf{x}_{jn}, n)$  representa el exponente de Lyapunov en la dirección  $u$  asociado con la  $j$ -ésima órbita periódica en el tiempo  $n$ , y  $\mathbf{x}_{jn}$  representa la posición de la  $j$ -ésima órbita periódica en el tiempo  $n$ .

La ecuación cuantifica el espectro de entropía de orden  $q$  para el atractor hiperbólico al considerar las tasas de crecimiento o decaimiento exponencial de los exponentes de Lyapunov asociados con las órbitas periódicas. La suma sobre las órbitas periódicas captura la contribución de cada órbita a la entropía general.

## 6.3. Técnicas control de caos

El control de caos implica la modificación del sistema dinámico original a través de la adición de perturbaciones controladas, con el fin de lograr una estabilización del sistema. Esto se logra al redirigir el comportamiento caótico hacia una órbita periódica o hacia un punto fijo [16].

Los dos aspectos esenciales de la presencia de caos que se mencionaron en secciones anteriores son la sensibilidad exponencial a pequeñas perturbaciones y la estructura compleja de la órbita. Estas características pueden ser aprovechadas para desarrollar métodos de control del caos. Tanto la sensibilidad exponencial como la estructura compleja de la órbita desempeñan roles importantes en diferentes contextos. En particular, cuando se trata de mejorar el rendimiento promedio y controlar la secuencia de la dinámica simbólica, que representa el comportamiento de un sistema complejo utilizando símbolos y reglas simbólicas [27], es la estructura compleja de la órbita la que se vuelve más relevante. Por otro lado, si el objetivo es dirigir la órbita hacia una ubicación objetivo específica, la sensibilidad exponencial se convierte en un factor más importante.

Un aspecto en el control del caos es que los objetivos pueden lograrse mediante pequeñas perturbaciones de control en el sistema [28], debido a las características fundamentales del caos. Esto implica que es posible utilizar controladores de baja energía o fuerza reducida. La determinación de las UPO se puede realizar mediante técnicas numéricas si se dispone de un modelo analítico preciso del sistema. Sin embargo, en casos experimentales donde no se cuenta con un modelo analítico, aún es posible determinar UPO a partir de datos registrados de una órbita caótica no controlada utilizando técnicas de incrustación de espacio de estado y reconstrucción del atractor [29].

Una vez que se selecciona una UPO adecuada, se pueden aplicar diversos algoritmos de control para mantener la órbita del sistema en la UPO elegida. Estos algoritmos pueden implicar colocar la órbita en la variedad estable de la UPO [30], utilizar retroalimentación con retraso continuo en el tiempo o hacer uso de mediciones de series temporales de una sola variable de estado escalar.

En el contexto del control retroalimentado [31], se pueden emplear mediciones periódicas del estado del sistema para ajustar parámetros controlables y lograr objetivos específicos. Algunos objetivos comunes del control incluyen mejorar el rendimiento promedio del sistema a lo largo del tiempo, dirigir la órbita hacia una ubicación objetivo y controlar la secuencia de la dinámica simbólica de una órbita caótica.

## 7. Conclusión

En este proyecto, se realizó un análisis del sistema dimero de polaritón interactuante descrito por las ecuaciones de spin (véase el texto). Se estudiaron las soluciones del sistema en función del parámetro de bombeo  $p$ , considerando diferentes valores (parámetros tomados principalmente de la referencia [7]) y condiciones iniciales aleatorias.

Inicialmente, se observó que para valores de bombeo pequeños, el sistema se encontraba en un estado débilmente excitado o no condensado. Las poblaciones de los distintos modos eran cercanas a cero o pequeñas, lo que indicaba una baja ocupación de los estados excitados. Este comportamiento se asoció con la dominancia de los términos de relajación y acoplamiento sobre el término de bombeo.

A medida que se incrementaba el bombeo, se observaron comportamientos más complejos. El sistema exhibió una polarización significativa y se encontraron trayectorias periódicas en un rango de valores de bombeo. Estos patrones recurrentes indicaban la presencia de comportamiento periódico en el sistema. Además, se produjeron fluctuaciones en la densidad de especies, lo que se reflejó en oscilaciones en la componente  $S_z$ .

En el caso de un bombeo alto, se observó que el sistema podía llegar a un estado de saturación. Una especie en el condensado se bombeaba intensamente, lo que resultaba en un aumento significativo de su densidad. Al mismo tiempo, la interacción repulsiva entre las especies podía provocar una disminución en la densidad de la otra especie. Como resultado, la componente  $S_z$  disminuía y la diferencia entre las densidades de las especies se reducía. Este efecto de saturación se reflejaba en la sección de Poincaré, donde se apreciaba la convergencia de  $S_z$  hacia un punto estable (cuando se incrementaba el bombeo).

Además de los análisis anteriores, se estudió la sección de Poincaré para diferentes valores de bombeo y condiciones iniciales aleatorias. Se observaron estructuras y patrones en la sección de Poincaré que reflejaban la aparición de atractores en el sistema. Estos atractores representaban estados estables a los que tendían las trayectorias del sistema en el espacio de fase (vease figuras 22). La presencia de atractores indica comportamientos no lineales y complejos del sistema a medida que se incrementaba el bombeo. Es importante destacar que los resultados obtenidos en este proyecto fueron consistentes y reproducibles en comparación con la referencia principal utilizada como base para el estudio [7]. Se logró obtener resultados similares en términos de las diferentes fases y comportamientos del sistema en función del parámetro de bombeo.

Existe la posibilidad de profundizar en el estudio del sistema mediante la búsqueda de las órbitas periódicas inestables (*Unstable Periodic Orbit* o UPOs) y la aplicación del control de caos. Al estudiar las propiedades de las UPOs, como su estabilidad y periodo, se puede obtener una comprensión más detallada de la dinámica subyacente y las transiciones entre diferentes estados. La búsqueda de UPOs y la aplicación del control de caos representan áreas de investigación prometedoras para profundizar en el estudio y el control de sistemas dinámicos de fluidos polaritónicos interactuantes.

## A. Estabilidad de órbita periódica: Teoría de Floquet

La teoría de Floquet se utiliza para analizar la estabilidad de sistemas dinámicos periódicos de la forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (\text{A.1})$$

donde  $\mathbf{x}(t)$  es un vector de estado del sistema,  $\mathbf{A}(t)$  es una matriz de coeficientes y  $t$  es el tiempo. Se asume que la matriz  $\mathbf{A}(t)$  es periódica en  $t$  con un período  $T$ , es decir,

$$\mathbf{A}(t + T) = \mathbf{A}(t) \quad (\text{A.2})$$

La solución general de esta ecuación diferencial periódica puede ser escrita como:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t)e^{\lambda t} \quad (\text{A.3})$$

donde  $\mathbf{u}(t)$  es una función periódica con el mismo período  $T$  que el sistema dinámico y  $\lambda$  es una constante compleja que se conoce como valor propio de Floquet.

Además, la teoría de Floquet también se puede utilizar para calcular las funciones de Floquet  $\mathbf{U}(t)$  que satisfacen:

$$\mathbf{u}(t + T) = \mathbf{U}(t)\mathbf{u}(t) \quad (\text{A.4})$$

donde  $\mathbf{U}(t)$  es una matriz periódica llamada matriz de Floquet. Las funciones de Floquet y la matriz de Floquet pueden ser utilizadas para calcular las soluciones periódicas del sistema dinámico y para entender cómo se comporta el sistema dinámico a largo plazo.

Más específicamente para el estudio de órbitas periódicas en puntos estables  $x^*$ :

1. Se puede definir una pequeña perturbación  $\delta x$  alrededor del punto estable  $x^*$ , de tal manera que  $x(t) = x^* + \delta x(t)$ . Si se aplica el desarrollo en serie de Taylor a las ecuaciones que describen la dinámica del sistema en torno a  $x^*$ , se tiene:

$$\frac{d}{dt}\delta x(t) = f(x^* + \delta x(t), t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D_x^n f(x^*, t) (\delta x(t))^n \quad (\text{A.5})$$

Donde  $D_x^n f(x, t)$  es la derivada de orden  $n$  de la función  $f(x, t)$  evaluada en el punto  $x^*$  y  $t$ .

2. Se puede aproximar la solución del sistema como una combinación lineal de funciones exponenciales complejas con coeficientes periódicos:

$$\delta x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_n e^{in\omega t}$$

Donde  $v_n$  son los coeficientes complejos que dependen del tiempo y  $\omega$  es la frecuencia angular de la órbita periódica (esto es una transformada discreta de Fourier). Cada modo  $n$  representa una oscilación con una frecuencia angular  $n\omega$ .

Los coeficientes  $v_n$  se pueden encontrar resolviendo el sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{v}_n = \lambda_n\mathbf{v}_n$$

Donde  $\mathbf{A}(t)$  es una matriz que depende del tiempo y  $\lambda_n$  es el exponente de Floquet. Los coeficientes  $v_n$  corresponden a los vectores propios de la matriz  $\mathbf{A}(t)$ , y los exponentes de Floquet corresponden a los valores propios. La ecuación

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{v}_n = \lambda_n\mathbf{v}_n$$

describe el vecindario linealizado en  $x^*$  con exponentes

$$\lambda^j = \mu^j \pm i\omega^j \tag{A.6}$$

independientemente del sistema de coordenadas.

La teoría de Floquet proporciona información importante sobre la estabilidad de las órbitas periódicas en puntos estables  $x^*$ . Si todos los exponentes de Floquet tienen una parte real negativa, entonces la órbita periódica es estable en el punto  $x^*$ . Si alguno de los exponentes de Floquet tiene una parte real positiva, entonces la órbita periódica es inestable en el punto  $x^*$ . Si alguno de los exponentes de Floquet tiene una parte real nula, entonces se necesita más información para determinar la estabilidad de la órbita periódica en el punto  $x^*$ .

Las tasas de estiramiento o contracción por unidad de tiempo se dan por las partes reales de los exponentes de Floquet [32] viene dado por la ecuación:

$$\mu_p^j = \frac{1}{T_p} \ln |\Delta_{p,j}| \tag{A.7}$$

Donde  $T_p$  es el período(tiempo de la órbita) de la órbita,  $p$  es la periodicidad de la órbita y  $\Delta_p^j$  es el multiplicador de Floquet. Se pueden estructurar tres conjuntos de acuerdo al tipo de multiplicador de Floquet, los cuales son:

**Expansión** es un conjunto en el espacio fase del sistema dinámico en el que las soluciones del sistema se expanden exponencialmente.

expansión

$$\begin{aligned} \{\Lambda\}_e &= \{\Lambda_{p,j} : |\Lambda_{p,j}| > 1\} \\ \{\lambda\}_e &= \{\lambda_p^j : \mu^j > 0\} \end{aligned} \tag{A.8}$$

**Contracción** es un conjunto en el espacio fase del sistema dinámico en el que las soluciones del sistema se contraen exponencialmente.

contracción

$$\begin{aligned} \{\Lambda\}_c &= \{\Lambda_{p,j} : |\Lambda_{p,j}| < 1\} \\ \{\lambda\}_c &= \{\lambda_p^j : \mu^j < 0\} \end{aligned} \tag{A.9}$$

**Marginal** es un conjunto en el espacio fase del sistema dinámico en el que las soluciones del sistema permanecen estables pero no se expanden ni se contraen exponencialmente.

$$\begin{aligned} \text{marginal} \\ \{\Lambda\}_m &= \{\Lambda_{p,j} : |\Lambda_{p,j}| = 1\} \\ \{\lambda\}_m &= \{\lambda_p^j : \mu^j = 0\} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

## B. Sistema dinámico del sistema dímérico de polaritón

Se determinan las componentes del vector pseudo spín **S**.

$$\boxed{\mathbf{S} = \frac{1}{2} \Psi^\dagger \bar{\sigma} \Psi} \quad (\text{B.1})$$

Donde  $\Psi^\dagger = [\psi_{+1}^\dagger \psi_{-1}^\dagger]$ , es el conjugado de  $\Psi = [\psi_{+1} \psi_{-1}]^T$ ,  $\psi_{\pm 1} = \sqrt{n_{\pm 1}} e^{i(\Phi \mp \phi)}$ .  
 $\bar{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  con  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  las matrices Pauli.

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{2} [\psi_{+1}^\dagger \quad \psi_{-1}^\dagger] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [\psi_{+1} \quad \psi_{-1}]^T = \frac{1}{2} [\psi_{-1}^\dagger \quad \psi_{+1}^\dagger] \begin{bmatrix} \psi_{+1} \\ \psi_{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [\psi_{-1}^\dagger \psi_{+1} + \psi_{+1}^\dagger \psi_{-1}] \\ S_x &= \frac{\sqrt{n_{-1}n_{+1}}e^{-2\phi i}}{2} + \frac{\sqrt{n_{+1}n_{-1}}e^{+2\phi i}}{2} = \sqrt{n_{+1}n_{-1}} \left( \frac{e^{2\phi i} + e^{-2\phi i}}{2} \right) = \sqrt{n_{+1}n_{-1}} \cos(2\phi) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} S_y &= \frac{1}{2} [\psi_{+1}^\dagger \quad \psi_{-1}^\dagger] \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} [\psi_{+1} \quad \psi_{-1}]^T = \frac{i}{2} [\psi_{-1}^\dagger \quad -\psi_{+1}^\dagger] \begin{bmatrix} \psi_{+1} \\ \psi_{-1} \end{bmatrix} = \frac{i}{2} [\psi_{-1}^\dagger \psi_{+1} - \psi_{+1}^\dagger \psi_{-1}] \\ S_y &= i \frac{\sqrt{n_{-1}n_{+1}}e^{-2\phi i}}{2} - i \frac{\sqrt{n_{+1}n_{-1}}e^{+2\phi i}}{2} = \sqrt{n_{+1}n_{-1}} \left( \frac{e^{2\phi i} - e^{-2\phi i}}{2i} \right) = \sqrt{n_{+1}n_{-1}} \sin(2\phi) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} S_z &= \frac{1}{2} [\psi_{+1}^\dagger \quad \psi_{-1}^\dagger] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} [\psi_{+1} \quad \psi_{-1}]^T = \frac{1}{2} [\psi_{+1}^\dagger \quad -\psi_{-1}^\dagger] \begin{bmatrix} \psi_{+1} \\ \psi_{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [\psi_{+1}^\dagger \psi_{+1} - \psi_{-1}^\dagger \psi_{-1}] \\ S_z &= \frac{n_{+1}e^0}{2} - \frac{n_{-1}e^0}{2} = \frac{n_{+1} - n_{-1}}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

La ecuación B.5 nos proporciona información sobre las densidades de las dos especies de fluidos en el condensado. Ahora se determina la magnitud de **S**

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} = \sqrt{n_{+1}n_{-1}(\cos^2(2\phi) + \sin^2(2\phi)) + \frac{1}{4}(n_{+1}^2 - 2n_{+1}n_{-1} + n_{-1}^2)} \\ \mathbf{S} &= \frac{(n_{+1} + n_{-1})}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

La ecuación de  $\mathbf{S}$  (B.6) se puede interpretar como el promedio de las ocupaciones en el condensado.

Derivando la Ec. B.3

$$\dot{S}_x = \frac{1}{2}[\psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} + \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} + \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} + \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1}] \quad (\text{B.7})$$

Donde ya conocemos  $\dot{\psi}_{\pm 1}$ :

$$\dot{\psi}_{\pm 1} = \frac{d\psi_{\pm 1}}{dt} = \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{\pm 1}} - \Gamma \right] \psi_{\pm 1} - \frac{1}{2}(\gamma - i\varepsilon)\psi_{\mp 1} - \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{\pm 1}|^2 + \alpha_2|\psi_{\mp 1}|^2]\psi_{\pm 1} \quad (\text{B.8})$$

Cuyo conjugado es

$$\dot{\psi}_{\pm 1}^\dagger = \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{\pm 1}} - \Gamma \right] \psi_{\pm 1}^\dagger - \frac{1}{2}(\gamma + i\varepsilon)\psi_{\mp 1}^\dagger + \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{\pm 1}|^2 + \alpha_2|\psi_{\mp 1}|^2]\psi_{\pm 1}^\dagger \quad (\text{B.9})$$

Sustituyendo las ecuaciones (B.8) y (B.9) en la ecuación (B.7) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{S}_x &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right] \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} - \frac{1}{2}(\gamma + i\varepsilon)\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} + \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{-1}|^2 + \alpha_2|\psi_{+1}|^2]\psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right] \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} - \frac{1}{2}(\gamma - i\varepsilon)\psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{+1}|^2 + \alpha_2|\psi_{-1}|^2]\psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right] \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \frac{1}{2}(\gamma + i\varepsilon)\psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} + \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{+1}|^2 + \alpha_2|\psi_{-1}|^2]\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} \\ &+ \left. \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right] \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \frac{1}{2}(\gamma - i\varepsilon)\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} - \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{-1}|^2 + \alpha_2|\psi_{+1}|^2]\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} \right] \\ \dot{S}_x &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{+1}} + \frac{p}{1+n_{-1}} - 2\Gamma \right] \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \gamma(|\psi_{+1}|^2 + |\psi_{-1}|^2) \right. \\ &+ \frac{i}{2}[\alpha_1(|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2) + \alpha_2(|\psi_{-1}|^2 - |\psi_{+1}|^2)]\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} \\ &- \frac{i}{2}[\alpha_1(|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2) + \alpha_2(|\psi_{-1}|^2 - |\psi_{+1}|^2)]\psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} \\ &+ \left. \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{+1}} + \frac{p}{1+n_{-1}} - 2\Gamma \right] \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} \right] \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

Dado que  $\psi_{\pm 1}^\dagger \psi_{\mp 1} = \sqrt{n_{+1}n_{-1}}e^{\pm 2\phi i}$  al sustituir y simplificar:

$$\begin{aligned} \dot{S}_x &= \frac{1}{2} \left( p \frac{1 + \frac{1}{2}(n_{+1} + n_{-1})}{(1+n_{+1})(1+n_{-1})} - \Gamma \right) (\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} + \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1}) - \frac{1}{2}\gamma(|\psi_{+1}|^2 + |\psi_{-1}|^2) \\ &- \frac{1}{2}[\alpha_1(|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2) - \alpha_2(|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2)] \frac{e^{2\phi i} - e^{-2\phi i}}{2i} \sqrt{n_{+1}n_{-1}} \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

Recordando que las expresiones para  $S_x$ ,  $S_y$  y  $S_z$  Ecs. (B.3, B.4, B.5) y que las ocupaciones del condensado son  $n_{\pm 1} = |\psi_{\pm 1}|^2$ ,  $\dot{S}_x$  se reescribe como:

$$\dot{S}_x = \left[ \frac{(1+S)p}{(1+S)^2 - S_z^2} - \Gamma \right] S_x - \gamma S - (\alpha_1 - \alpha_2)S_z S_y \quad (\text{B.12})$$

Usamos el siguiente cambio en las variables.

$$u(\mathbf{S}) = \frac{(1+S)p}{(1+S)^2 - S_z^2}, \quad \alpha = (\alpha_1 - \alpha_2) \quad (\text{B.13})$$

Finalmente  $\dot{S}_x$  queda:

$$\dot{S}_x = [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_x - \gamma S - \alpha S_z S_y \quad (\text{B.14})$$

Con la evolución temporal de  $S_y$  se procede de la misma manera. Derivando la ecuación B.4

$$\dot{S}_y = \frac{1}{2i} [\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} + \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} - \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1}] \quad (\text{B.15})$$

Sustituyendo las expresiones Ec.B.8 y Ec.B.9 en Ec.B.15.

$$\begin{aligned} \dot{S}_y &= \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right] \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \frac{1}{2} (\gamma + i\varepsilon) \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} + \frac{i}{2} [\alpha_1 |\psi_{+1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{-1}|^2] \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right] \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \frac{1}{2} (\gamma - i\varepsilon) \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} - \frac{i}{2} [\alpha_1 |\psi_{-1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{+1}|^2] \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} \\ &- \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right] \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} + \frac{1}{2} (\gamma + i\varepsilon) \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} - \frac{i}{2} [\alpha_1 |\psi_{-1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{+1}|^2] \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} \\ &\left. - \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right] \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} + \frac{1}{2} (\gamma - i\varepsilon) \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} + \frac{i}{2} [\alpha_1 |\psi_{+1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{-1}|^2] \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} \right] \\ \dot{S}_y &= \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{+1}} + \frac{p}{1+n_{-1}} - 2\Gamma \right] \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} + i\varepsilon (|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2) \right. \\ &+ \frac{i}{2} [\alpha_1 (|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2) + \alpha_2 (|\psi_{-1}|^2 - |\psi_{+1}|^2)] \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} \\ &+ \frac{i}{2} [\alpha_1 (|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2) + \alpha_2 (|\psi_{-1}|^2 - |\psi_{+1}|^2)] \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} \\ &\left. - \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{+1}} + \frac{p}{1+n_{-1}} - 2\Gamma \right] \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} \right] \quad (\text{B.16}) \end{aligned}$$

Dado que  $\psi_{\pm 1}^\dagger \psi_{\mp 1} = \sqrt{n_{+1}n_{-1}} e^{\pm 2\phi i}$  al sustituir y simplificar:

$$\begin{aligned} \dot{S}_y &= \frac{1}{2i} \left( p \frac{1 + \frac{1}{2}(n_{+1} + n_{-1})}{(1+n_{+1})(1+n_{-1})} - \Gamma \right) (\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1}) - \frac{\varepsilon}{2} (|\psi_{+1}|^2 + |\psi_{-1}|^2) \\ &+ \frac{1}{2} [\alpha_1 (|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2) - \alpha_2 (|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2)] \frac{e^{2\phi i} + e^{-2\phi i}}{2} \sqrt{n_{+1}n_{-1}} \quad (\text{B.17}) \end{aligned}$$

Recordando que las expresiones para  $S_x$ ,  $S_y$  y  $S_z$  ( B.3, B.4, B.5, respectivamente) y que las ocupaciones del condensado son  $n_{\pm 1} = |\psi_{\pm 1}|^2$ , se reescribe  $\dot{S}_y$  como

$$\dot{S}_y = \left[ \frac{(1+S)p}{(1+S)^2 - S_z^2} - \Gamma \right] S_y + \varepsilon S_z + (\alpha_1 - \alpha_2) S_z S_x \quad (\text{B.18})$$

Considerando el cambio de variable en Ec.B.13

$$\boxed{\dot{S}_y = [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_y + \varepsilon S_z + \alpha S_z S_x} \quad (\text{B.19})$$

Derivando la ecuación B.5

$$\dot{S}_z = \frac{1}{2}[\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} + \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} - \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{-1}] \quad (\text{B.20})$$

Reemplazando las ecuaciones B.8 y B.9 en B.20.

$$\begin{aligned} \dot{S}_z &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right] \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} - \frac{1}{2}(\gamma + i\varepsilon)\psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} + \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{+1}|^2 + \alpha_2|\psi_{-1}|^2]\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right] \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} - \frac{1}{2}(\gamma - i\varepsilon)\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{+1}|^2 + \alpha_2|\psi_{-1}|^2]\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} \\ &- \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right] \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} + \frac{1}{2}(\gamma + i\varepsilon)\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{-1}|^2 + \alpha_2|\psi_{+1}|^2]\psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} \\ &\left. - \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right] \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} + \frac{1}{2}(\gamma - i\varepsilon)\psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} + \frac{i}{2}[\alpha_1|\psi_{-1}|^2 + \alpha_2|\psi_{+1}|^2]\psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} \right] \\ \dot{S}_z &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right) |\psi_{+1}|^2 - \left( \frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right) |\psi_{-1}|^2 - i\varepsilon\psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} + i\varepsilon\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} \right] \\ \dot{S}_z &= \frac{p}{2} \left\{ \frac{1}{1+n_{+1}} |\psi_{+1}|^2 - \frac{1}{1+n_{-1}} |\psi_{-1}|^2 \right\} - \frac{\Gamma}{2} (|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2) - \frac{\varepsilon}{2i} (\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1}) \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

$$\dot{S}_z = \frac{p}{2} \left\{ \frac{|\psi_{+1}|^2(1+n_{-1}) - |\psi_{-1}|^2(1+n_{+1})}{(1+n_{+1})(1+n_{-1})} \right\} - \frac{\Gamma}{2} (|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2) - \frac{\varepsilon}{2i} (\psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1}) \quad (\text{B.22})$$

Dado que  $n_{\pm 1} = |\psi_{\pm 1}|^2$ , se identifican  $S_z$  (Ec. B.5) y  $S_y$  (Ec. B.4), al sustituir:

$$\begin{aligned} \dot{S}_z &= \frac{S_z p}{(1+S)^2 - S_z^2} - \Gamma S_z - \varepsilon S_y \\ &= \frac{(1+S)S_z p - S S_z p}{(1+S)^2 - S_z^2} - \Gamma S_z - \frac{S S_z p}{(1+S)^2 - S_z^2} - \varepsilon S_y \\ &= \left[ \frac{(1+S)p}{(1+S)^2 - S_z^2} - \Gamma \right] S_z - \frac{S_z}{(1+S)^2 - S_z^2} S - \varepsilon S_y \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Donde se identifica a Ec.B.13, y se hace

$$v(\mathbf{S}) = -\frac{S_z p}{(1+S)^2 - S_z^2} \quad (\text{B.24})$$

De tal manera que la derivada temporal de  $S_z$  queda:

$$\boxed{\dot{S}_z = [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_z + v(\mathbf{S})S - \varepsilon S_y} \quad (\text{B.25})$$

Por último se determina la derivada temporal de S (Ec. B.6).

$$S = \frac{n_{+1} + n_{-1}}{2} = \frac{|\psi_{+1}|^2 + |\psi_{-1}|^2}{2} = \frac{\psi_{+1}^\dagger \psi_{+1} + \psi_{-1}^\dagger \psi_{-1}}{2} \quad (\text{B.26})$$

$$\dot{S} = \frac{\dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{+1} + \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} + \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{-1} + \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{-1}}{2} \quad (\text{B.27})$$

Reemplazando las ecuaciones B.8 y B.9 en B.27.

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right] \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} - \frac{1}{2} (\gamma + i\varepsilon) \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} + \frac{i}{2} [\alpha_1 |\psi_{+1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{-1}|^2] \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{+1} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right] \dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{+1} - \frac{1}{2} (\gamma - i\varepsilon) \dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{-1} - \frac{i}{2} [\alpha_1 |\psi_{+1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{-1}|^2] \dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{+1} \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right] \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} - \frac{1}{2} (\gamma + i\varepsilon) \psi_{+1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} + \frac{i}{2} [\alpha_1 |\psi_{-1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{+1}|^2] \psi_{-1}^\dagger \dot{\psi}_{-1} \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right] \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{-1} - \frac{1}{2} (\gamma - i\varepsilon) \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1} - \frac{i}{2} [\alpha_1 |\psi_{-1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{+1}|^2] \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{-1} \Big] \\ \dot{S} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{p}{1+n_{+1}} - \Gamma \right) |\dot{\psi}_{+1}|^2 + \left( \frac{p}{1+n_{-1}} - \Gamma \right) |\dot{\psi}_{-1}|^2 - \gamma \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1} - \gamma \dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{-1} \right] \\ \dot{S} &= \frac{p}{2} \left\{ \frac{1}{1+n_{+1}} |\dot{\psi}_{+1}|^2 + \frac{1}{1+n_{-1}} |\dot{\psi}_{-1}|^2 \right\} - \frac{\Gamma}{2} (|\dot{\psi}_{+1}|^2 + |\dot{\psi}_{-1}|^2) - \frac{\gamma}{2} (\dot{\psi}_{+1}^\dagger \psi_{-1} + \dot{\psi}_{-1}^\dagger \psi_{+1}) \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Se identifica  $S_x$  (B.3) y  $S$  (B.26)

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \frac{p}{2} \left\{ \frac{|\dot{\psi}_{+1}|^2 (1+n_{-1}) + |\dot{\psi}_{-1}|^2 (1+n_{+1})}{(1+n_{+1})(1+n_{-1})} \right\} - \Gamma S - \gamma S_x \\ &= \frac{p}{2} \left\{ \frac{|\dot{\psi}_{+1}|^2 + |\dot{\psi}_{-1}|^2 + |\dot{\psi}_{-1}|^2 (n_{+1}) + |\dot{\psi}_{+1}|^2 (n_{-1})}{(1+n_{+1})(1+n_{-1})} \right\} - \Gamma S - \gamma S_x \\ &= p \frac{S + \frac{1}{2} (|\dot{\psi}_{+1}|^2 |\dot{\psi}_{-1}|^2 + |\dot{\psi}_{-1}|^2 |\dot{\psi}_{+1}|^2)}{(1+S)^2 - S_z^2} - \Gamma S - \gamma S_x \\ &= \frac{(1+S)S - S_z S_z}{(1+S)^2 - S_z^2} - \Gamma S - \gamma S_x = p \frac{(1+S)S}{(1+S^2) - S_z^2} - p S_z \frac{S_z}{(1+S^2) - S_z^2} - \Gamma S - \gamma S_x \\ &= \left[ \frac{(1+S)p}{(1+S)^2 - S_z^2} - \Gamma \right] S - \left[ \frac{S_z p}{(1+S)^2 - S_z^2} \right] S_z - \gamma S_x \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

En la Ec. B.29 se notan  $u(\mathbf{S})$  (Ec.B.13) y  $v(\mathbf{S})$  (Ec.B.24), entonces:

$$\boxed{\dot{S} = [u(\mathbf{S}) - \Gamma] S - v(\mathbf{S}) S_z - \gamma S_x} \quad (\text{B.30})$$

## C. Fase del condensado

De acuerdo a la Ref. [7]. Los parámetros de orden  $\psi_{\pm 1}$ , que están típicamente asociados con las amplitudes de los modos en un sistema láser, no están fijos en el tiempo, sino que evolucionan con un factor de fase dependiente del tiempo  $\exp(-i\Omega(S)t)$ . Este comportamiento sugiere que el sistema está experimentando una emisión láser de un solo modo, donde la acción láser está dominada por un modo resonante con una frecuencia fija  $\Omega(S)$  y la fase total del condensado viene dada por la ecuación:

$$\dot{\Phi} = \alpha S_z + \frac{\varepsilon S_z S_x + \gamma S S_y}{(S_x^2 + S_y^2)} = - \left[ -(\alpha_1 - \alpha_2) S_z - \frac{\varepsilon S_z S_x + \gamma S S_y}{(S_x^2 + S_y^2)} \right]$$

misma que se deducirá en este apéndice.

$$\dot{S}_x = [u(\mathbf{S}) - \Gamma] S_x - \gamma S - \alpha S_z S_y \quad (\text{C.1})$$

$$\dot{S}_y = [u(\mathbf{S}) - \Gamma] S_y + \varepsilon S_z + \alpha S_z S_x \quad (\text{C.2})$$

$$\dot{S}_z = [u(\mathbf{S}) - \Gamma] S_z + v(\mathbf{S}) S - \varepsilon S_y \quad (\text{C.3})$$

Donde  $u(\mathbf{S})$ ,  $v(\mathbf{S})$  son funciones de  $\mathbf{S}$  definidas anteriormente.

Para encontrar la expresión de  $\dot{\Phi}$ , vamos a utilizar las relaciones entre  $S_x$ ,  $S_y$  y  $S_z$  y los parámetros de orden  $\psi_{\pm 1}$ :

$$S_x = \frac{1}{2}(\psi_{-1}^\dagger \psi_{+1} + \psi_{+1}^\dagger \psi_{-1}) \quad (\text{C.4})$$

$$S_y = \frac{i}{2}(\psi_{-1}^\dagger \psi_{+1} - \psi_{+1}^\dagger \psi_{-1}) \quad (\text{C.5})$$

$$S_z = \frac{1}{2}(\psi_{+1}^\dagger \psi_{+1} - \psi_{-1}^\dagger \psi_{-1}) \quad (\text{C.6})$$

Ahora, vamos a derivar  $\dot{\Phi}$  resolviendo la ecuación para la derivada temporal de la fase total  $\Phi$ . Tomando la derivada temporal de la fase total  $\Phi$ , tenemos:

$$\dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dt}$$

Usando la regla de la cadena, podemos escribirlo como:

$$\dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dS_x} \frac{dS_x}{dt} + \frac{d\Phi}{dS_y} \frac{dS_y}{dt} + \frac{d\Phi}{dS_z} \frac{dS_z}{dt}$$

Ahora, derivamos  $\Phi$  con respecto a  $S_x$ ,  $S_y$  y  $S_z$ : La elección de la función arcotangente (arctan) en las derivaciones se debe a que la relación entre  $S_y$  y  $S_x$  representan componentes de un vector en un plano, y la relación entre ellos se puede describir utilizando la

función arcotangente.

$$\frac{d\Phi}{dS_x} = \frac{d}{dS_x} \left[ \arctan \left( \frac{S_y}{S_x} \right) \right] = -\frac{S_y}{S_x^2 + S_y^2} \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{d\Phi}{dS_y} = \frac{d}{dS_y} \left[ \arctan \left( \frac{S_y}{S_x} \right) \right] = \frac{S_x}{S_x^2 + S_y^2} \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{d\Phi}{dS_z} = 0 \quad (9) \quad (\text{C.9})$$

Ahora, sustituimos las derivadas en la expresión para  $\dot{\Phi}$ :

$$\dot{\Phi} = -\frac{S_y}{S_x^2 + S_y^2} \frac{dS_x}{dt} + \frac{S_x}{S_x^2 + S_y^2} \frac{dS_y}{dt}$$

Finalmente, reemplazamos las derivadas  $\frac{dS_x}{dt}$  y  $\frac{dS_y}{dt}$  utilizando las ecuaciones C.1 y C.2 respectivamente, y las relaciones (C.4 y C.5 para  $S_x$  y  $S_y$ ):

$$S_x = \sqrt{n_{+1}n_{-1}} \cos(2\phi)$$

$$S_y = \sqrt{n_{+1}n_{-1}} \sin(2\phi)$$

$$\dot{\Phi} = -\frac{S_y}{S_x^2 + S_y^2} ([u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_x - \gamma S - \alpha S_z S_y) + \frac{S_x}{S_x^2 + S_y^2} ([u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_y + \epsilon S_z + \alpha S_z S_x)$$

Simplificando la expresión

$$\dot{\Phi} = \frac{\gamma S S_y + \alpha S_z n_{+1} n_{-1} + \epsilon S_z S_x}{n_{+1} n_{-1}}$$

reordenando términos, obtenemos la expresión para  $\dot{\Phi}$  en términos de  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  y los parámetros  $\alpha$ ,  $\gamma$  y  $\epsilon$ :

$$\dot{\Phi} = \alpha S_z + \frac{\epsilon S_z S_x + \gamma S S_y}{(S_x^2 + S_y^2)} = - \left[ -(\alpha_1 - \alpha_2) S_z - \frac{\epsilon S_z S_x + \gamma S S_y}{(S_x^2 + S_y^2)} \right] \quad (\text{C.10})$$

## D. Matriz Jacobiana del sistema dímérico de Polaritón

La matriz Jacobiana del sistema de ecuaciones descritos en [7], viene dada por:

$$\begin{aligned}\dot{S}_x &= [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_x - \gamma S - \alpha S_z S_y \\ \dot{S}_y &= [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_y + \varepsilon S_z + \alpha S_z S_x \\ \dot{S}_z &= [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_z + v(\mathbf{S})S - \varepsilon S_y \\ S &= \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}\end{aligned}$$

Con

$$u(\mathbf{S}) = \frac{(1+S)p}{(1+S)^2 - S_z^2}, \quad \alpha = (\alpha_1 - \alpha_2), \quad v(\mathbf{S}) = -\frac{S_z p}{(1+S)^2 - S_z^2}.$$

$$JV(S) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V(S)_x}{\partial S_x} & \frac{\partial V(S)_x}{\partial S_y} & \frac{\partial V(S)_x}{\partial S_z} \\ \frac{\partial V(S)_y}{\partial S_x} & \frac{\partial V(S)_y}{\partial S_y} & \frac{\partial V(S)_y}{\partial S_z} \\ \frac{\partial V(S)_z}{\partial S_x} & \frac{\partial V(S)_z}{\partial S_y} & \frac{\partial V(S)_z}{\partial S_z} \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

Donde

$$\frac{\partial V(S)_x}{\partial S_x} = S_x \cdot \left( \frac{pS_x}{S((S+1)^2 - S_z^2)} - \frac{2pS_x \cdot (S+1)^2}{S((S+1)^2 - S_z^2)^2} \right) + \frac{p \cdot (S+1)}{(S+1)^2 - S_z^2} - \frac{\gamma S_x}{S} - \Gamma \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{\partial V(S)_x}{\partial S_y} = S_x \cdot \left( \frac{pS_y}{S((S+1)^2 - S_z^2)} - \frac{2pS_y \cdot (S+1)^2}{S((S+1)^2 - S_z^2)^2} \right) - \frac{\gamma S_y}{S} - \alpha S_z \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{\partial V(S)_x}{\partial S_z} = S_x \cdot \left( \frac{pS_z}{S((S+1)^2 - S_z^2)} - \frac{p \cdot (S+1) \left( \frac{2S_z \cdot (S+1)}{S} - 2S_z \right)}{((S+1)^2 - S_z^2)^2} \right) - \frac{\gamma S_z}{S} - \alpha S_y \quad (\text{D.4})$$

---


$$\frac{\partial V(S)_y}{\partial S_x} = S_y \cdot \left( \frac{pS_x}{S((S+1)^2 - S_z^2)} - \frac{2pS_x \cdot (S+1)^2}{S((S+1)^2 - S_z^2)^2} \right) + \alpha S_z \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{\partial V(S)_y}{\partial S_y} = S_y \cdot \left( \frac{pS_y}{S((S+1)^2 - S_z^2)} - \frac{2pS_y \cdot (S+1)^2}{S((S+1)^2 - S_z^2)^2} \right) + \frac{p \cdot (S+1)}{(S+1)^2 - S_z^2} - \Gamma \quad (\text{D.6})$$

$$\frac{\partial V(S)_y}{\partial S_z} = S_y \cdot \left( \frac{pS_z}{S((S+1)^2 - S_z^2)} - \frac{p \cdot (S+1) \left( \frac{2S_z \cdot (S+1)}{S} - 2S_z \right)}{((S+1)^2 - S_z^2)^2} \right) + \alpha S_x + \varepsilon \quad (\text{D.7})$$

---


$$\frac{\partial V(S)_z}{\partial S_x} = -\frac{2pS_z S_x \cdot (S+1)}{S(2S + S_x^2 + S_y^2 + 1)^2} \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(S)_z}{\partial S_y} = & - \frac{\varepsilon \cdot S^5 + (6\varepsilon - 2\varepsilon S_z^2) S^3 + (2pS_z S_y + \varepsilon S_z^4 - 2\varepsilon S_z^2 + \varepsilon) S + 4\varepsilon S_y^4}{S (2S + S_y^2 + S_x^2 + 1)^2} \\ & + \frac{(4\varepsilon S_z^2 + \varepsilon \cdot (8S_x^2 + 4)) S_y^2 + 2pS_z S_y + \varepsilon \cdot (4S_x^2 + 4) S_z^2 + \varepsilon \cdot (4S_x^4 + 4S_x^2)}{S (2S + S_y^2 + S_x^2 + 1)^2} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(S)_z}{\partial S_z} = & - \frac{\Gamma \cdot S^5 + S (\Gamma S_z^4 + (p - 2\Gamma) S_z^2 - p + \Gamma) + S^3 (-2\Gamma S_z^2 - p + 6\Gamma)}{S (2S + S_y^2 + S_x^2 + 1)^2} \\ & + \frac{\Gamma \cdot (4S_y^2 + 4S_x^2 + 4) S_z^2 + (-2S_y^2 - 2S_x^2) p + \Gamma \cdot (4S_y^4 + (8S_x^2 + 4) S_y^2 + 4S_x^4 + 4S_x^2)}{S (2S + S_y^2 + S_x^2 + 1)^2} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

## E. Codigos: calculo de exponentes de Lyapunov

### E.1. MATLAB

Algoritmo para determinar el exponente de Lyapunov propuesto en [33].

Se generan 3 scripts expuestos a continuación:

```

1 #####SCRIPT 1#####
2 [T,Lya]=lyapunov(3,@RZ,@ode45,0,0.05,200,[1 1 1],10);
3 plot(T,Lya);
4 title('Espectro de Lyapunov');
5 xlabel('Tiempo'); ylabel('Exponente de Lyapunov');

```

```

1 #####SCRIPT 2#####
2 function f=RZ(t,X)
3 %PARAMETROS
4 G = 1;
5 g = 0.5;
6 a = 2;
7 e = 2;
8 p = 2;
9 x = X(1);
10 y = X(2);
11 z = X(3);
12 Y= [X(4), X(7), X(10);
13      X(5), X(8), X(11);
14      X(6), X(9), X(12)];
15 f=zeros(9,1);
16
17 %ECUACIONES DEL SISTEMA DIMERO DE POLARITON
18 St = sqrt(x*x+y*y+z*z);
19 U = ((1 + St)*p)/((1 + St)^2 - z*z);
20 V = -(z*p)/((1 + St)^2 - z*z);
21 f(1) = (U - G)*x - g*St - a*z*y;
22 f(2) = (U - G)*y + e*z + a*z*x;
23 f(3) = (U - G)*z + V*St - e*y;
24 %SISTEMA LINEALIZADO(MATRIZ JACOBIANA)
25 JAC=[x*(p*x/(St*((St+1)^2-z^2))-(2*p*x*(St+1)^2)/(St*((St
      +1)^2-z^2)^2))+p*(St+1)/((St+1)^2-z^2)-g*x/St-G, x*(p*y
      /((St*((St+1)^2-z^2))-(2*p*y*(St+1)^2)/(St*((St+1)^2-z
      ^2)^2))-g*y/St-a*z, x*(p*z/(St*((St+1)^2-z^2))-(p*(
      St+1)*((2*z*(St+1))/(St)-2*z)/(St*((St+1)^2-z^2)^2)))-
      g*(z/St)-a*y ;
26 y*(p*x/(St*((St+1)^2-z^2))-(2*p*x*(St+1)^2)/(St*((St+1)^2-
      z^2)^2))+a*z, y*(p*y/(St*((St+1)^2-z^2))-(2*p*y*(St
      +1)^2)/(St*((St+1)^2-z^2)^2))+p*(St+1)/((St+1)^2-z^2)-G

```

```

,      y*(p*z/(St*((St+1)^2-z^2))-((p*(St+1)*((2*z*(St+1)
)/ (St))-2*z)/(St*((St+1)^2-z^2)^2)))*a*x+e;
27 -2*p*z*x*(St+1)/(St*(2*St+x^2+y^2+1)^2), (-e*St^5+(6*e-2*e
*z^2)*St^3+(2*p*z*x+e*z^4-2*e*z^2+e)*St+4*e*y^4+(4*e*z
^2+e*(8*x^2+4))*y^2*p*z*y+e*(4*x^2+4)+e*(4*x^4+4*x^2))
/(St*(2*St+x^2+y^2+1)^2), (-G*St^5+St*(G*z^4+(p-2*
G)*z^2-p+G)+St^3*(-2*G*z^2-p+6*G)+G*(4*y^2+4*x^2+4)*z
^2+(-2*y^2-2*x^2)*p+G*(4*y^4+(8*x^2+4)*y^2+4*x^4+4*x^2)
)/(St*(2*St+x^2+y^2+1)^2)];
28
29 %ECUACIONES VARACIONALES
30 f(4:12)=JAC*Y;

```

```

1 #####SCRIPT 3#####
2
3 n1=n; n2=n1*(n1+1);
4
5 %Numero de paso
6
7 nit = round((tend-tstart)/stept);
8
9 %Almacenamiento de dato
10
11 y=zeros(n2,1); cum=zeros(n1,1); y0=y;
12 gsc=cum; znorm=cum;
13
14 %Valores iniciales
15 y(1:n)=ystart(:);
16
17 for i=1:n1 y((n1+1)*i)=1.0; end;
18
19 t=tstart;
20
21 %Ciclo
22 for ITERLYAP=1:nit
23
24 %Solucion al sistema
25 [T,Y] = feval(fcn_integrator,rhs_ext_fcn,[t t+stept],y);
26
27 t=t+stept;
28 y=Y(size(Y,1),:);
29
30 for i=1:n1
31     for j=1:n1 y0(n1*i+j)=y(n1*j+i); end;
32 end;
33 %Proceso de ortonormalizacion de Gram-Schmidt

```

```
34 znorm(1)=0.0;
35 for j=1:n1 znorm(1)=znorm(1)+y0(n1*j+1)^2; end;
36
37 znorm(1)=sqrt(znorm(1));
38
39 for j=1:n1 y0(n1*j+1)=y0(n1*j+1)/znorm(1); end;
40
41 for j=2:n1
42     for k=1:(j-1)
43         gsc(k)=0.0;
44         for l=1:n1 gsc(k)=gsc(k)+y0(n1*l+j)*y0(n1*l+k);
45             end;
46
47         for k=1:n1
48             for l=1:(j-1)
49                 y0(n1*k+j)=y0(n1*k+j)-gsc(l)*y0(n1*k+l);
50             end;
51         end;
52
53         znorm(j)=0.0;
54         for k=1:n1 znorm(j)=znorm(j)+y0(n1*k+j)^2; end;
55         znorm(j)=sqrt(znorm(j));
56
57         for k=1:n1 y0(n1*k+j)=y0(n1*k+j)/znorm(j); end;
58     end;
59 %Actualizacion de valores de los exponentes
60
61     for k=1:n1 cum(k)=cum(k)+log(znorm(k)); end;
62
63 %Normalizacion del exponente
64     for k=1:n1
65         lp(k)=cum(k)/(t-tstart);
66     end;
67     if ITERLYAP==1
68         Lexp=lp;
69         Texp=t;
70     else
71         Lexp=[Lexp; lp];
72         Texp=[Texp; t];
73     end;
74
75     if (mod(ITERLYAP,ioutp)==0)
76         fprintf('t=%6.4f',t);
77         for k=1:n1 fprintf(' %10.6f',lp(k)); end;
78         fprintf('\n');
```

```

79 end;
80 for i=1:n1
81     for j=1:n1
82         y(n1*j+i)=y0(n1*i+j);
83     end;
84 end;
85 end;

```

Se obtiene:

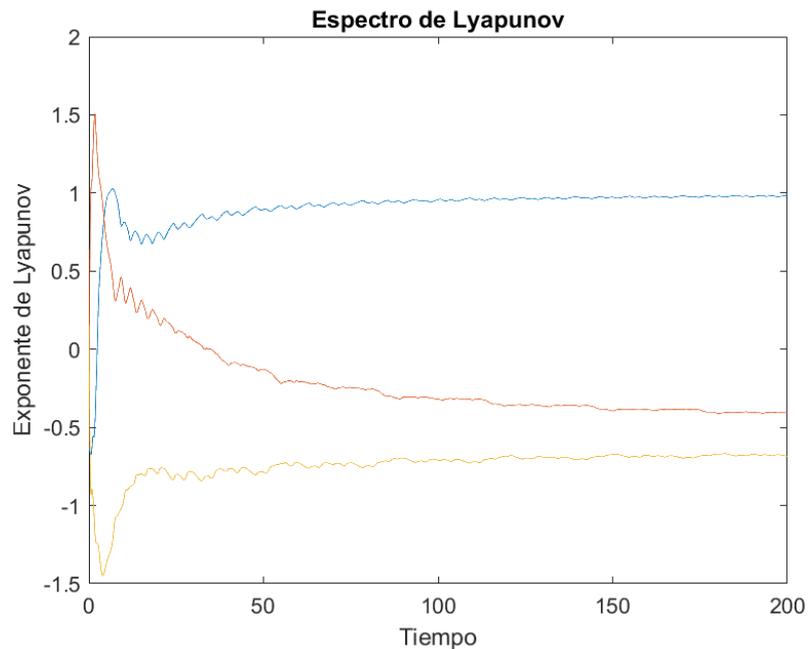


Figura 23: Espectro de Lyapunov para el sistema dímérico de polaritón usando matlab.

## E.2. PYTHON

Se uso python por la amplia disponibilidad de bibliotecas que hacen que sea más rápido y sencillo el estudio y visualización de sistemas en ciencias.

```

1 # PARAMETROS DEL SISTEMA
2 G = 1
3 g = 0.5
4 e = 2.0
5 a = 2.0
6 p = 2.0

```

```

1 #SE IMPORTAN LIBRERIAS
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt

```

```

4 from numpy import sqrt
5 from scipy.integrate import odeint
6 #SE DEFINE LA MATRIZ JACOBIANA DEL SISTEMA
7 def diff_rz(u):
8     x,y,z = u
9     St = sqrt(x*x+y*y+z*z);
10    U = ((1 + St)*p)/((1 + St)**2 - z*z);
11    V = -(z*p)/((1 + St)**2 - z*z);
12    f = [(U - G)*x - g*St - a*z*y, (U - G)*y + e*z + a*z*x, (U -
13         G)*z + V*St - e*y ]
14    Df = [[x*(p*x/(St*((St+1)**2-z**2)))-(2*p*x*(St+1)**2)/(St*((
15         St+1)**2-z**2)**2))+
16          p*(St+1)/((St+1)**2-z**2)-g*x/St-G, x*(p*y/(St*((St+1)**2-z
17         **2))
18         -(2*p*y*(St+1)**2)/(St*((St+1)**2-z**2)**2))-g*y/St-a*z, x
19         *(p*z/(St*((St+1)**2-z**2))
20         -(2*p*z*(St+1)**2)/(St*((St+1)**2-z**2)**2))
21         -(p*(St+1)*((2*z*(St+1))/(St))-2*z)/(St*((St+1)**2-z**2)**2))
22         )-g*(z/St)-a*y ],
23         [y*(p*x/(St*((St+1)**2-z**2)))-(2*p*x*(St+1)**2)/(St*((St+1)
24         **2-z**2)**2))+a*z,
25         y*(p*y/(St*((St+1)**2-z**2)))-(2*p*y*(St+1)**2)/(St*((St+1)
26         **2-z**2)**2))
27         +p*(St+1)/((St+1)**2-z**2)-G, y*(p*z/(St*((St+1)**2-z**2))
28         -(2*p*z*(St+1)**2)/(St*((St+1)**2-z**2)**2))
29         -(p*(St+1)*((2*z*(St+1))/(St))-2*z)/(St*((St+1)**2-z**2)**2))
30         )*a*x+e],
31         [-2*p*z*x*(St+1)/(St*(2*St+x**2+y**2+1)**2), (-e*St**5+(6*e
32         -2*e*z**2)*St**3
33         +(2*p*z*x+e*z**4-2*e*z**2+e)*St+4*e*y**4+(4*e*z**2+e*(8*x
34         **2+4))*y**2*p*z*y+e*(4*x**2+4)+
35         e*(4*x**4+4*x**2))/(St*(2*St+x**2+y**2+1)**2), (-G*St**5+St*(
36         G*z**4+(p-2*G)*z**2-p+G)+
37         St**3*(-2*G*z**2-p+6*G)+G*(4*y**2+4*x**2+4)*z**2+(-2*y**2-2*x
38         **2)*p+G*(4*y**4+(8*x**2+4)*y**2+
39         4*x**4+4*x**2))/(St*(2*St+x**2+y**2+1)**2)]]
40    return np.array(f), np.array(Df)
41 def LEC_system(u):
42     #x,y,z = u[:3] # n=3
43     #Matriz cuadrada nxn, sub-arreglo desde n hasta n+n*n=n*(n+1)
44     U = u[3:12].reshape([3,3])
45     #Vector, sub-arreglo desde n*(n+1) hasta n*(n+1)+n=n*(n+2)
46     L = u[12:15]
47     # Llama a una funcion diff_rz() con un subarreglo de los
48     # primeros tres elementos de u como argumento y asigna los
49     # valores devueltos a f y Df.
50     f,Df = diff_rz(u[:3])
51     # Calcula el producto punto de la matriz transpuesta U con el
52     # producto punto de la matriz Df y la matriz U. El
53     # resultado se asigna a la variable A.
54     A = U.T.dot(Df.dot(U))

```

```

37 #Extrae los elementos diagonales de la matriz A usando np.
    diag() y crea una copia de ellos, que se asigna a la
    variable dL.
38 dL = np.diag(A).copy();
39 for i in range(3):
40     A[i,i] = 0
41     for j in range(i+1,3): A[i,j] = -A[j,i]
42 #Calcula el producto punto de la matriz U y la matriz A
    modificada y asigna el resultado a la variable dU.
43 dU = U.dot(A)
44 # La funcion devuelve un arreglo concatenado que consiste en
    f, dU aplanado y dL.
45 return np.concatenate([f,dU.flatten(),dL])
46 #SE DECLARAN ARREGLOS CON CONDICIONES INICIALES
47 u0 = np.ones(3)
48 U0 = np.identity(3)
49 L0 = np.zeros(3)
50 u0= np.concatenate([u0, U0.flatten(), L0])
51 #SOLUCION DE ECUACIONES VARACIONALES
52 t = np.linspace(0,200,10000)
53 u = odeint(lambda u,t:LEC_system(u),u0,t, hmax=0.05)
54 L = u[5:,12:15].T/t[5:]
55 #PLOTEO Y EXPORTACION DE GRAFICO
56 plt.plot(t[5:],L.T[:])
57 plt.title('Espectro de Lyapunov')
58 plt.xlabel('Tiempo')
59 plt.ylabel('Exponente')
60 print(L.T)
61 plt.savefig('LEPYTHON.png', dpi=200)

```

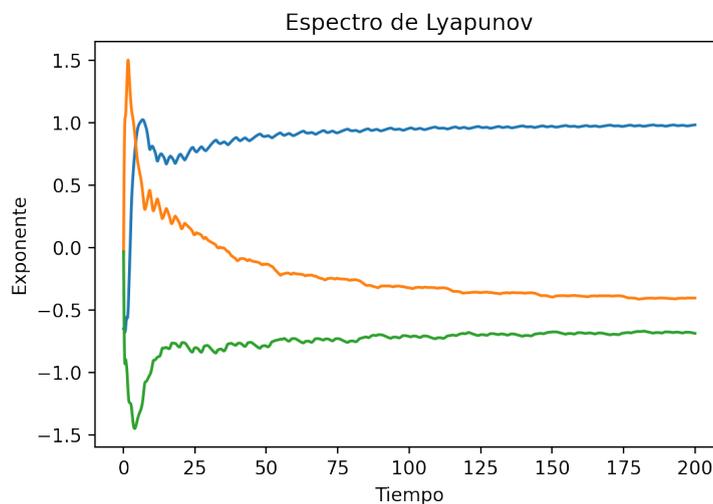


Figura 24: Espectro de Lyapunov para el sistema dímico de polaritón usando python.

Se observa que la figura 23 y la figura 24 nos proporciona información equivalente.

## Referencias

- [1] Charles Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. Wiley, 8 edition, 2004.
- [2] Eyob Sete, Hichem Eleuch, and Raymond Ooi. Entanglement between exciton and mechanical modes via dissipation-induced coupling. *Physical Review A*, 92, 09 2015.
- [3] A Amo, D. Sanvitto, Fabrice Laussy, and Ballarini. Collective fluid dynamics of a polariton condensate in a semiconductor microcavity. *Nature*, 457:291–5, 2009.
- [4] J. J. Hopfield. Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant of crystals. *Phys. Rev.*, 112:1555–1567, Dec 1958.
- [5] Iacopo Carusotto and Cristiano Ciuti. Quantum fluids of light. *Reviews of Modern Physics*, 85(1):299–366, feb 2013.
- [6] Cundapi José. Exponentes de lyapunov en fluidos polaritonicos. In *PROYECTO TERMINAL I*, 2022.
- [7] R. Ruiz-Sánchez, R. Rechtman, and Y. G. Rubo. Autonomous chaos of exciton-polariton condensates. *Phys. Rev. B*, 101:155305, Apr 2020.
- [8] M.P. Marder. *Condensed Matter Physics*. Wiley, 2015.
- [9] Hui Deng, Hartmut Haug, and Yoshihisa Yamamoto. Exciton-polariton bose-einstein condensation. *Rev. Mod. Phys.*, 82:1489–1537, May 2010.
- [10] J Rogel-Salazar. The gross-pitaevskii equation and bose-einstein condensates. *European Journal of Physics*, 34(2):247–257, jan 2013.
- [11] Yago Baltasar del Valle-Inclán Redondo. Spin and lattice properties of optically trapped exciton polaritons. *PhD thesis, University of Cambridge*, 2018.
- [12] Sven Höfling, Matthias Amthor, Arash Rahimi-Iman, Na Young Kim, Julian Fischer, Ivan G. Savenko, Vladimir D. Kulakovski, Ivan A. Shelykh, Stephan Reitzenstein, Alfred Forchel, Yoshihisa Yamamoto, Martin Kamp, and Christian Schneider. An electrically pumped polariton laser. In *2015 IEEE Photonics Conference (IPC)*, pages 613–614, 2015.
- [13] Elena Rozas, Alexey Yulin, Johannes Beierlein, Sebastian Klembt, Sven Höfling, Oleg A. Egorov, Ulf Peschel, Ivan A. Shelykh, Manuel Gundin, Ignacio Robles-López, M. Dolores Martín, and Luis Viña. Effects of the linear polarization of polariton condensates in their propagation in codirectional couplers, 2021.
- [14] S. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Chapman & Hall book. CRC Press, 2019.
- [15] Jinhu Lu and Guanrong Chen. A new chaotic attractor coined. *I. J. Bifurcation and Chaos*, 12:659–661, 03 2002.
- [16] Edward Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2 edition, 2002.

- [17] Morris W Hirsch, Stephen Smale, and Robert L Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic Press, 2004.
- [18] John Guckenheimer and Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer, 1983.
- [19] Gangaram S Ladde and Masilamani Sambandham. *Stochastic versus deterministic systems of differential equations*. CRC Press, 2003.
- [20] P. So. Unstable periodic orbits. *Scholarpedia*, 2(2):1353, 2007. revision #91902.
- [21] Lawrence Perko. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7. Springer Science & Business Media, 2013.
- [22] John M Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [23] Rebecca Crossley, Makrina Agaoglou, Matthaios Katsanikas, and Stephen Wiggins. From poincaré maps to lagrangian descriptors: The case of the valley ridge inflection point potential. *Regular and Chaotic Dynamics*, 26(2):147–164, mar 2021.
- [24] Roberto Castelli, Jean-Philippe Lessard, and Jason Mireles James. Parameterization of invariant manifolds for periodic orbits (i): Efficient numerics via the floquet normal form. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 14:132–167, 01 2015.
- [25] K. Pawelzik and H. G. Schuster. Unstable periodic orbits and prediction. *Phys. Rev. A*, 43:1808–1812, Feb 1991.
- [26] Hiroshi Fujisaka. A generalization of the topological entropy and its applications to some problems of turbulence. *Progress of Theoretical Physics*, 69(1):32–47, 1983.
- [27] Douglas Lind and Klaus Schmidt. Symbolic and algebraic dynamical systems. In *Handbook of dynamical systems*, volume 1, pages 765–812. Elsevier, 2002.
- [28] Edward Ott, Celso Grebogi, and James A. Yorke. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 64:1196–1199, Mar 1990.
- [29] T. D. Sauer. Attractor reconstruction. *Scholarpedia*, 1(10):1727, 2006. revision #91017.
- [30] E. Ott. Controlling chaos. *Scholarpedia*, 1(8):1699, 2006. revision #91167.
- [31] Vyacheslav Pyragas. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*, 170(6):421–428, 1992.
- [32] P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner, and G. Vattay. *Chaos: Classical and Quantum*. Niels Bohr Inst., Copenhagen, 2016.
- [33] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 16(3):285–317, 1985.