



# Fundamentos de la teoría cuántica de campos fuera de equilibrio II

**Autor:**

---

Lucciano Hector Toscano Torres

**Asesor:**

---

Dr. Miguel Angel Bastarrachea Magnani

PROYECTO TERMINAL II: INVESTIGACIÓN TEÓRICA  
CLAVE 2111109. TRIMESTRE 23-P.

**Licenciatura en Física**  
**Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa**

21 de Octubre 2023

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Repaso formalismo de Keldysh</b>	<b>4</b>
<b>3. Modelo de Lipkin-Meshkov-Glick</b>	<b>9</b>
3.1. Representación de Holstein–Primakoff . . . . .	9
<b>4. Acción de Keldysh en el modelo LMG</b>	<b>13</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>16</b>

## Resumen

Como los sistemas de excitones-polaritones (dentro de microcavidades con interacciones fuertes entre luz y materia) suelen existir condensados Bose-Einstein [1], se requiere un modelo fuera de equilibrio para describirlos. Se suele usar la ecuación de Gross-Pitaevskii para ello, sin embargo, es una ecuación semi-clásica por lo que tiene sus limitantes. Por esta razón, en el proyecto anterior se presentó una revisión sobre el *formalismo de Keldysh*, que usa una técnica análoga a la integral de trayectoria de Feynman, que permite la solución de Hamiltonianos tanto en equilibrio como fuera de equilibrio. En el presente proyecto se usará esta técnica para resolver un modelo en particular que es el de *Lipkin-Meshkov-Glick*, ya que puede usarse para describir los condensados BE [2]. El objetivo será plantear el formalismo de Keldysh para el estudio de sistemas polaritónicos interactuantes, en este caso, tomando como ejemplo el modelo de LMG.

## 1. Introducción

La teoría cuántica de campos es la mejor herramienta existente para describir la materia cuántica junto a sus interacciones. Al principio se desarrolló esta teoría para sistemas en equilibrio, siendo la primer forma la electrodinámica cuántica [3, 4, 5]. Fue hasta después que se trató de resolver para sistemas fuera de equilibrio con los trabajos de Schwinger [6] y Keldysh [7]. Keldysh formalizó y mejoró la técnica que actualmente es usada para sistemas tanto en equilibrio como fuera de equilibrio. En particular, en el presente trabajo se usará la teoría de Keldysh para un modelo de muchos cuerpos reducido a grados de libertad colectivos que es el de *Lipkin-Meshkov-Glick (LMG)*.

A pesar de que el modelo LMG fue introducido para física nuclear [8, 9, 10], ahora es usado en distintos sistemas como condensados Bose-Einstein [2], sistemas de espín cuántico [11], y plataformas de información cuántica donde hay enredamiento cuántico [12]. También este sistema se sabe que es integrable además de ser algebraicamente sencillo al describir esencialmente un rotor interactuante. También en el sistema se tienen *transiciones de fases cuánticas (QPT)* por sus siglas en inglés), que relacionan cambios macroscópicos con su estructura microscópica [13]. Usualmente estas transiciones son el cambio abrupto en las propiedades de del estado base a través de un parámetro del Hamiltoniano [14]. En el caso del presente modelo, que tiene interacciones colectivas de spin, tiene transiciones que se pueden pensar de un paramagneto desordenado a un ferromagneto ordenado [15].

Se comenzará con un breve repaso de la teoría de Keldysh, desarrollada en la primer parte del proyecto terminal. Después se introduce el modelo LMG para funciones de onda colectivas, junto a la representación de Holstein-Primakoff que permite expresar los operadores de espín colectivos en términos de una serie de un sólo bosón. El objetivo es calcular la función de partición de Keldysh para este sistema, para que en un trabajo posterior se use en un condensado Bose-Einstein de polaritones bajo la idea de cambios no adiabáticos del sistema, denominados *quenches*.

## 2. Repaso formalismo de Keldysh

Para describir un sistema de muchos cuerpos, que depende del tiempo se tiene que usar el operador de densidad dependiente del tiempo, dado por

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\mathcal{U}}_{t,-\infty} \hat{\rho}(-\infty) \hat{\mathcal{U}}_{-\infty,t}, \quad (2.1)$$

El operador de evolución (tomando  $\hbar = 1$ ) es

$$\hat{\mathcal{U}}_{t,t'} = \mathbb{T} e^{-i \int_{t'}^t \hat{H}(t) dt}, \quad (2.2)$$

donde  $\mathbb{T}$  ordena los operadores a la izquierda que están cronológicamente después o los que están antes a la derecha. Esta es solución del sistema que evoluciona con la ec. de von Neumann

$$i \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)]. \quad (2.3)$$

Fuera de equilibrio se asume que se sabe el estado del sistema en un tiempo en el pasado lejano  $t \rightarrow -\infty$ , donde estaba descrito por  $\hat{\rho}(-\infty) = \rho_0$ . En ese tiempo el Hamiltoniano  $\hat{H}(-\infty) = \hat{H}_0$  no tiene interacciones. Dichas interacciones son cambiadas adiabáticamente para alcanzar su valor real momentos antes del tiempo de observación  $\hat{H}(t')$ . Este Hamiltoniano puede depender explícitamente del tiempo.

Usualmente es de interés conocer el valor esperado de un observable que en este caso depende del tiempo  $\hat{A}(t)$ . Su valor es dado al evolucionar el sistema desde  $t \rightarrow -\infty$  hasta  $t$  donde está el observable, después se avanza hasta  $t \rightarrow \infty$  y se regresa hasta  $t \rightarrow -\infty$ ; así se tiene una trayectoria cerrada de tiempo  $\mathcal{C}$  como en fig. 1. En este caso se tiene un observable en un tiempo  $t$  del lado de ida del contorno, el Hamiltoniano es  $\hat{H}_V \equiv \hat{H}(t) + \hat{A}V(t)$  (si estuviera en el lado de regreso tendría un signo menos)  $V(t)$  es un potencial. Definiendo una función de partición 2.5, tal que al calcular su derivada variacional nos da el valor esperado de nuestra observable dado por

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \frac{Tr[\hat{\mathcal{U}}_{-\infty,+\infty} \hat{\mathcal{U}}_{+\infty,t} \hat{A} \hat{\mathcal{U}}_{t,-\infty} \hat{\rho}(-\infty)]}{Tr[\hat{\rho}(-\infty)]} = \frac{i \delta Z[V]}{2 \delta V(t)} \Big|_{V=0}, \quad (2.4)$$

con

$$Z[V] \equiv \frac{Tr\{\hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{C}}[V] \hat{\rho}(-\infty)\}}{Tr[\hat{\rho}(-\infty)]}, \quad (2.5)$$

también el operador de evolución de contorno cerrado es

$$\hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{C}}[V] = \hat{\mathcal{U}}_{-\infty,+\infty} \hat{\mathcal{U}}_{+\infty,-\infty}. \quad (2.6)$$

La trayectoria es necesaria si el sistema está fuera de equilibrio, ya que el regreso ayuda a quitar las interacciones (o ruido) del sistema que no nos interesan. Si está en equilibrio con solo una rama temporal es suficiente (la de ida).

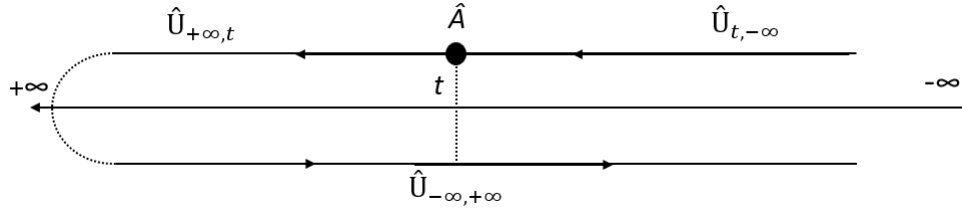


Figura 1: Contorno de tiempo cerrado  $\mathcal{C}$ , cuando  $t \rightarrow +\infty$  el operador de evolución regresa hacia  $t \rightarrow -\infty$ . Este contorno está descrito por 2.4.

Para encontrar la función de partición se usan unos eigenestados de los operadores de creación y aniquilación bosónicos, que facilitan las integrales a realizar, para bajas temperaturas o con funciones de onda coherentes [16]. Tienen como nombre *estados coherentes*, parametrizados por un número complejo  $z$  (eigenvalor) los cuales están definidos como:

$$\hat{a}_i |z\rangle = z |z\rangle; \quad \langle z| \hat{a}_i^\dagger = z^* \langle z|, \quad (2.7)$$

donde  $*$  indica conjugación compleja. Las reglas de conmutación de los operadores de creación y aniquilación bosónicos son

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i = \delta_{ij}. \quad (2.8)$$

De 2.7 y 2.8 podemos tener un Hamiltoniano bien ordenado, con  $\hat{a}_i^\dagger$  a la izquierda y  $\hat{a}_i$  a la derecha, por lo que sus elementos de matriz vienen dados por

$$\langle z| \hat{H}(\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i) |z'\rangle = H(z^*, z') \langle z|z'\rangle. \quad (2.9)$$

Los estados coherentes son una base sobrecompleta, por lo que no son ortogonales [17, 18], esto es

$$|\langle z|z'\rangle|^2 = e^{-|z-z'|^2} \neq 0. \quad (2.10)$$

Asimismo estos estados tienen completitud

$$\int_{-\infty}^{\infty} |z\rangle \langle z| d[z^*, z] = \hat{1}, \quad (2.11)$$

de modo que si  $z = x + iy$ , entonces

$$d[z^*, z] \equiv \frac{d(\text{Re } z)d(\text{Im } z)}{\pi} = \frac{dx dy}{\pi}. \quad (2.12)$$

Ahora se divide el contorno temporal en  $2(N-1)$  partes iguales con longitud  $\delta t = (t_{2N} - t_1)/[2(N-1)]$ , tales que  $t_1 = t_{2N} \rightarrow -\infty$  y  $t_N = t_{N+1} \rightarrow \infty$ . Esto es equivalente al método de Feynman [19] para la integral de trayectoria, solo que se tienen 2 ramas temporales. En consecuencia al calcular las amplitudes de probabilidad de cada división temporal y usar los estados coherentes junto a sus propiedades, la función de partición se vuelve

$$Z = \frac{1}{\text{Tr}[\hat{\rho}_0]} \int \prod_{j=1}^{2N} d[z_j^*, z_j] \exp \left( i \sum_{j,j'=1}^{2N} z_j^* G_{jj'}^{-1} z_{j'} \right). \quad (2.13)$$

$G_{jj'}^{-1}$  es una forma simbólica de definir la inversa de una función de Green. En seguida se toma el límite  $N \rightarrow \infty$ , de modo que las variables pasan a notación continua  $z_j \rightarrow z(t)$  se vuelven campos cuánticos

$$Z[z(t)] = \int \mathbf{D}[z^*(t), z(t)] e^{iS[z^*, z]} \quad (2.14)$$

tal que

$$\mathbf{D}[z^*(t), z(t)] \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{2N} \frac{d[z_j^*, z_j]}{\text{Tr}[\hat{\rho}_0]}. \quad (2.15)$$

Mientras que la acción de *Keldysh-Schwinger*, que es la fase de la función de onda, en este caso es

$$S[z^*, z] = \int_{\mathcal{C}} dt z^*(t) \hat{G}^{-1} z(t) = \int_{\mathcal{C}} dt [iz^*(t) \partial_t z(t) - H(z^*, z)]. \quad (2.16)$$

A partir de esta acción se puede tratar la integral de contorno como una sola integral, con dos componentes del campo bosónico en el contorno de la rama de ida  $z^+(t)$  y en la de regreso  $z^-(t)$ , como resultado se tiene

$$S[z^*, z] = \int_{-\infty}^{\infty} dt [z^{+*}(t) \hat{G}^{-1} z^+(t) - z^{-*}(t) \hat{G}^{-1} z^-(t)] \quad (2.17)$$

$$= i \int_{-\infty}^{\infty} dt (z^{+*} \partial_t z^+ - z^{-*} \partial_t z^-) - \int_{-\infty}^{\infty} dt [H(z^+) - H(z^-)]. \quad (2.18)$$

Con la función de partición definida se puede calcular las funciones de Green (propagadores) de los campos bosónicos a partir de derivadas variacionales, que nos dan los estados cuánticos, su espectro de energías y estados de ocupación. En este caso la función de Green es

$$\langle z^{\pm}(t) z^{\pm}(t')^* \rangle \equiv \int \mathbf{D}[z^*, z] z^{\pm}(t) z^{\pm}(t')^* e^{iS[z^*, z]} \quad (2.19)$$

$$= \frac{1}{Z[0, 0]} \left. \frac{\delta^2 Z[z^*, z]}{\delta z^{\pm*} \delta z^{\pm}} \right|_{z=0} = iG(t, t'), \quad (2.20)$$

escrito en forma matricial

$$\langle z^{\pm}(t) z^{\pm}(t')^* \rangle = \begin{pmatrix} iG^{\top}(t, t') & iG^{<}(t, t') \\ iG^{>}(t, t') & iG^{\bar{\top}}(t, t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iG^{++}(t, t') & iG^{+-}(t, t') \\ iG^{-+}(t, t') & iG^{--}(t, t') \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Tales que  $\langle z^+(t) z^{-*}(t') \rangle \equiv iG^{<}(t, t')$  se llama *G-menor*,  $\langle z^-(t) z^{+*}(t') \rangle \equiv iG^{>}(t, t')$  es *G-mayor*,  $\langle z^+(t) z^{+*}(t') \rangle \equiv iG^{\top}(t, t')$  es la función de *Green ordenada en el tiempo*,  $\langle z^-(t) z^{-*}(t') \rangle \equiv iG^{\bar{\top}}(t, t')$  es la función de *Green antiordenada en el tiempo*. Estos elementos de matriz no son independientes, este fue el aporte de Keldysh [7], hacer una rotación para diagonalizar esta matriz. La *rotación de Keldysh* es a través de una transformación lineal unitaria [20]

$$\hat{U} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \hat{U}^{\dagger}. \quad (2.22)$$

Aplicando la transformación tanto a los campos  $z^+$  y  $z^-$

$$\hat{U} \begin{pmatrix} z^+ \\ z^- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} z^+ + z^- \\ z^+ - z^- \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} z^{cl} \\ z^q \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$z^{cl}$  indica un promedio entre ambas ramas temporales por eso se le llama *término clásico*,  $z^q$  indica una diferencia entre ambas ramas por lo que si hay diferencia entre ellas nos da las fluctuaciones cuánticas. Las relaciones inversas de 2.23 son

$$\begin{pmatrix} z^+ \\ z^- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} z^{cl} + z^q \\ z^{cl} - z^q \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

se pueden usar en 2.18, por lo que se obtiene

$$\begin{aligned} S &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt [(z^{cl} + z^q)^* \partial_t (z^{cl} + z^q) - (z^{cl} - z^q)^* \partial_t (z^{cl} - z^q)] \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} dt [H(\frac{z^{cl} + z^q}{\sqrt{2}}) - H(\frac{z^{cl} - z^q}{\sqrt{2}})] \\ &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt [z^{cl*} \partial_t (z^{cl} + z^q) + z^{q*} \partial_t (z^{cl} + z^q) - z^{cl*} \partial_t (z^{cl} - z^q) + z^{q*} \partial_t (z^{cl} - z^q)] \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} dt [H(\frac{z^{cl} + z^q}{\sqrt{2}}) - H(\frac{z^{cl} - z^q}{\sqrt{2}})] \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} dt (z^{cl*} \partial_t z^q + z^{q*} \partial_t z^{cl}) - \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[ H(\frac{z^{cl} + z^q}{\sqrt{2}}) - H(\frac{z^{cl} - z^q}{\sqrt{2}}) \right]. \quad (2.25) \end{aligned}$$

Además, estos campos complejos se pueden parametrizar por su parte real e imaginaria, con campos reales  $x(t)$  y  $p(t)$ , tal como

$$z^{cl/q} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_{cl/q} + ip_{cl/q}), \quad (2.26)$$

de esta manera al sustituir en 2.25, para el primer término

$$\begin{aligned} i \int_{-\infty}^{\infty} dt (z^{cl*} \partial_t z^q + z^{q*} \partial_t z^{cl}) &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt [(x_{cl} - ip_{cl}) \partial_t (x_q + ip_q) + (x_q - ip_q) \partial_t (x_{cl} + ip_{cl})] \\ &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt [x_{cl} \partial_t (x_q + ip_q) - ip_{cl} \partial_t (x_q + ip_q) + x_q \partial_t (x_{cl} + ip_{cl}) - ip_q \partial_t (x_{cl} + ip_{cl})] \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt (x_{cl} \partial_t p_q + x_q \partial_t p_{cl} - p_{cl} \partial_t x_q - p_q \partial_t x_{cl}) \\ &\quad + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt (x_{cl} \partial_t x_q + x_q \partial_t x_{cl} + p_{cl} \partial_t p_q + p_q \partial_t p_{cl}) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt (x_{cl} \dot{p}_q + x_q \dot{p}_{cl} - p_{cl} \dot{x}_q - p_q \dot{x}_{cl}) + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[ \frac{d}{dt} (x_{cl} x_q + p_{cl} p_q) \right] \end{aligned}$$



La parte imaginaria de la última ecuación es cero, ya que es una diferencial exacta y por las condiciones a la frontera. También, los términos  $x\dot{p}$  pueden ser diferenciales exactas con una parte del Hamiltoniano (ver proyecto terminal 1 [21], ejemplo del oscilador armónico) entonces la acción

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt (p_{cl}\dot{x}_q + p_q\dot{x}_{cl}) - \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[ H\left(\frac{x_{cl} + x_q}{2}, \frac{p_{cl} + p_q}{2}\right) - H\left(\frac{x_{cl} - x_q}{2}, \frac{p_{cl} - p_q}{2}\right) \right]. \quad (2.27)$$

Esta forma de la acción de Keldysh-Schwinger se usará más adelante con el modelo LMG. Por otra lado, aplicando la rotación a 2.21 se obtiene

$$\begin{aligned} \langle z^\alpha(t) z^{\beta*}(t) \rangle &\equiv iG^{\alpha\beta}(t, t') = \hat{U} i\hat{G}(t, t') \hat{U}^\dagger & (2.28) \\ &= \begin{pmatrix} iG^K(t, t') & iG^R(t, t') \\ iG^A(t, t') & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} G^> + G^< & \theta(t - t')(iG^> - iG^<) \\ \theta(t' - t)(iG^< - iG^>) & 0 \end{pmatrix}, & (2.29) \end{aligned}$$

para este caso  $\alpha, \beta \in \{cl, q\}$ , los cuales indican términos clásicos y cuánticos. Además la función escalón,

$$\theta(t - t') = \begin{cases} 1 & \text{si } t > t', \\ 0 & \text{si } t < t'. \end{cases} \quad (2.30)$$

Los elementos de matriz de 2.29 están dados por

$$iG^{cl,cl}(t, t') \equiv iG^K(t, t'), \quad (2.31)$$

$$iG^{cl,q}(t, t') \equiv iG^R(t, t'), \quad (2.32)$$

$$iG^{q,cl}(t, t') \equiv iG^A(t, t'), \quad (2.33)$$

$$iG^{q,q}(t, t') = 0. \quad (2.34)$$

$G^R$  (Green retardada) y  $G^A$  (Green Avanzada) tienen la información de los estados cuánticos del sistema y su espectro de energías.  $G^K$  (Green de Keldysh) tiene la información de los estados de ocupación fuera de equilibrio [22]. Se puede tener esta información con la transformada de Fourier respecto a  $t - t'$  de las tres funciones de Green de la matriz 2.29. Por ejemplo, para un solo nivel bosónico con Hamiltoniano  $\hat{H}(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) = \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a}$ , sus transformadas son [23]

$$\tilde{G}^R(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon - \omega_0 + i0}, \quad (2.35)$$

$$\tilde{G}^A(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon - \omega_0 - i0}, \quad (2.36)$$

$$\tilde{G}^K(\epsilon) = \coth\left(\frac{\epsilon - \mu}{2T}\right) [\tilde{G}^R(\epsilon) - \tilde{G}^A(\epsilon)]. \quad (2.37)$$

La última ecuación es el *teorema de fluctuación disipación*, el cual es una propiedad de los sistemas en equilibrio térmico y relaciona la disipación de la energía con las fuerzas de fluctuación presentes [20, 23].

### 3. Modelo de Lipkin-Meshkov-Glick

Se usará el modelo de Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) [8, 9, 10], basándonos en los resultados de la Ref. [15]. El Hamiltoniano es

$$H = -\frac{J}{2N} \sum_{i,j=1}^N \left( \gamma_x \sigma_i^x \sigma_j^x + \gamma_y \sigma_i^y \sigma_j^y + \gamma_z \sigma_i^z \sigma_j^z \right) - \Delta \sum_{i=1}^N \sigma_i^z, \quad (3.1)$$

$\sigma_i^\alpha, \alpha \in \{x, y, z\}$  son las matrices de spin de Pauli,  $J$  es la energía de interacción,  $N = 2S + 1 \simeq 2S$  es el número cuántico que determina la longitud de pseudo-espin.  $1/N$  garantiza que la energía libre por spin sea finita en el límite termodinámico ( $N \rightarrow \infty$ ). Además,  $\Delta$  es la magnitud del campo magnético (o la energía del espín),  $\gamma_\alpha$  son parámetros que cambian la magnitud de la interacción en cada eje  $\alpha$ . Usando el operador total de spin

$$\hat{S}_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^\alpha, \quad \alpha \in \{x, y, z\}, \quad (3.2)$$

tales que  $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hat{S}_z$ . Al redistribuir las sumas se obtiene

$$H = -\frac{J}{2N} \left[ \gamma_x \left( \frac{2}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^x \right) \left( \frac{2}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_j^x \right) + \gamma_y \left( \frac{2}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^y \right) \left( \frac{2}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_j^y \right) + \gamma_z \left( \frac{2}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^z \right) \left( \frac{2}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_j^z \right) \right] - 2\Delta \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^z \right) \quad (3.3)$$

$$\hat{H} = -\frac{2J}{N} (\gamma_x \hat{S}_x^2 + \gamma_y \hat{S}_y^2 + \gamma_z \hat{S}_z^2) - 2\Delta \hat{S}_z \quad (3.4)$$

De ahí que este Hamiltoniano describa grados de libertad colectivos de espín. También se puede pensar como una cadena de espines interactuando entre sí con alcance infinito [24].

#### 3.1. Representación de Holstein-Primakoff

Tomando una aproximación de campo medio [20], con  $N \gg 1$ , las fluctuaciones cuánticas pequeñas de los spines alrededor de sus valores esperados pueden ser representadas en términos de los operadores de ascenso y descenso de espín ( $\hat{S}_+$  y  $\hat{S}_-$  respectivamente). Estos operadores a su vez pueden ser especificados en términos de una serie de un sólo boson expresada en operadores de creación y aniquilación ( $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$ ) en consecuencia se tiene

$$\hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y = \hat{a}^\dagger (N - \hat{a}^\dagger \hat{a})^{1/2}, \quad (3.5)$$

$$\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y = (N - \hat{a}^\dagger \hat{a})^{1/2} \hat{a}, \quad (3.6)$$

$$\hat{S}_z = \frac{N}{2} - \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (3.7)$$

Esta es la *transformación de Holstein-Primakoff*, por los autores que lo desarrollaron en 1940 [25]. Asimismo 3.5 y 3.6 se pueden desarrollar en series de potencias en el límite termodinámico ( $N \gg 1$ )

$$\hat{S}_- = \hat{a}^\dagger \sqrt{N} \left(1 - \frac{\hat{a}^\dagger \hat{a}}{N}\right)^{1/2} = \hat{a}^\dagger \sqrt{N} \left(\hat{1} - \frac{\hat{a}^\dagger \hat{a}}{2N} + \dots\right) \approx \hat{a}^\dagger \sqrt{N} \left(\hat{1} - \frac{\hat{a}^\dagger \hat{a}}{2N}\right), \quad (3.8)$$

$$\hat{S}_+ = \sqrt{N} \left(\hat{1} - \frac{\hat{a}^\dagger \hat{a}}{2N} + \dots\right) \hat{a} \approx \sqrt{N} \left(\hat{1} - \frac{\hat{a}^\dagger \hat{a}}{2N}\right) \hat{a}. \quad (3.9)$$

A partir de estas ecuaciones, se puede obtener  $\hat{S}_x$  sumando 3.8 y 3.9

$$\hat{S}_+ + \hat{S}_- = 2\hat{S}_x \Rightarrow \hat{S}_x = \frac{\hat{S}_+ + \hat{S}_-}{2} = \frac{\sqrt{N}}{2} \left[ (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) - \frac{\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a}}{2N} \right], \quad (3.10)$$

se requiere  $\hat{S}_x^2/N$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{\hat{S}_x^2}{N} &= \frac{1}{4} \left[ (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) - \frac{\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a}}{2N} \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 - \frac{[(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a}) + (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a})(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)]}{2N} + \frac{(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a})^2}{4N^2} \right\}, \end{aligned}$$

el término  $1/N^2$  decae muy rapido por lo que se toman los primeros dos. Se desarrolla el segundo término aparte, poniendo  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$  a la izquierda con las reglas de conmutación 2.8

$$\begin{aligned} &(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a}) + (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a})(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \\ &\hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger = \\ &2\hat{a}^\dagger (\hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{1}) \hat{a} + (\hat{1} + \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a} + 2\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger + (\hat{1} + \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger = \\ &2\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} + 2\hat{a}^\dagger (\hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{1}) \hat{a}^\dagger + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{1}) + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a} \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} = \\ &2\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a} + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger + \hat{a} \hat{a} = \\ &2\hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger + \hat{a} \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) + \mathcal{O}(\hat{a}^{(\dagger)2}) = 2\hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 + \mathcal{O}(\hat{a}^{(\dagger)2}), \end{aligned}$$

los términos que van como  $\mathcal{O}(\hat{a}^{(\dagger)2}/N)$  son constantes o son cero por lo que se pueden despreciar, ya que  $\hat{a}^{(\dagger)} \propto \sqrt{N}$ . Así se llega a que

$$\frac{\hat{S}_x^2}{N} = \frac{1}{4} \left[ (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 - \frac{1}{N} \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \right]. \quad (3.11)$$

Mientras que para  $\hat{S}_y$  restando las ecuaciones 3.8 y 3.9

$$\hat{S}_+ - \hat{S}_- = 2i\hat{S}_y \Rightarrow \hat{S}_y = \frac{\hat{S}_+ - \hat{S}_-}{2i} = \frac{\sqrt{N}}{2i} \left[ (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) + \frac{\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}}{2N} \right].$$

Procediendo de la misma manera que en el caso anterior con

$$\begin{aligned} \frac{\hat{S}_y^2}{N} &= -\frac{1}{4} \left[ (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) + \frac{\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}}{2N} \right]^2 \\ &= -\frac{1}{4} \left[ (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 + \frac{(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)(\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}) + (\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a})(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)}{2N} \right], \end{aligned}$$

nuevamente el segundo término por separado

$$\begin{aligned}
 & (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)(\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}) + (\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a})(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) = \\
 & \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} + 2\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger = \\
 & 2\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger - 2\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a} - 2\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger + \mathcal{O}(\hat{a}^{(\dagger)2}) = \\
 & 2\hat{a}^\dagger \hat{a}(\hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger) + \mathcal{O}(\hat{a}^{(\dagger)2}) = 2\hat{a}^\dagger \hat{a}[\hat{a}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) - \hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger - \hat{a})] + \mathcal{O}(\hat{a}^{(\dagger)2}) = \\
 & 2\hat{a}^\dagger \hat{a}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) + \mathcal{O}(\hat{a}^{(\dagger)2}) = -2\hat{a}^\dagger \hat{a}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 + \mathcal{O}(\hat{a}^{(\dagger)2}).
 \end{aligned}$$

Por lo que se tiene

$$\frac{\hat{S}_y^2}{N} = -\frac{1}{4} \left[ (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 - \frac{1}{N} \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 \right]. \quad (3.12)$$

En cambio para  $\hat{S}_z^2/N$

$$\frac{\hat{S}_z^2}{N} = \frac{1}{N} \left( \frac{N}{2} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \right)^2 = \frac{N}{4} - \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{N} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (3.13)$$

Sustituyendo las tres expresiones y 3.7, en 3.4 si se toma el hamiltoniano  $H = H_0 + V$ , con términos de segundo orden en  $H_0$  (operadores de un cuerpo) y de cuarto orden en  $V$  (operadores de dos cuerpos)

$$\hat{H}_0 = -\frac{J}{2} \left[ \gamma_x (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 - \gamma_y (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 + \gamma_z (N - 4\hat{a}^\dagger \hat{a}) \right] - \Delta (N - 2\hat{a}^\dagger \hat{a}), \quad (3.14)$$

$$\hat{V} = -\frac{J}{2N} \hat{a}^\dagger \hat{a} \left[ -\gamma_x (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 + \gamma_y (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 + 4\gamma_z \hat{a}^\dagger \hat{a} \right]. \quad (3.15)$$

Ahora se hace el cambio a operadores de cuadratura para expresarlo de manera similar a cómo se realizó en el Proyecto Terminal 1 con el oscilador armónico [21]

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{p}), \quad (3.16)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{p}), \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \hat{x}; \quad (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) = -i\hat{p}; \quad \hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{1}{2} (\hat{x}^2 + \hat{p}^2).$$

Sustituyendo en 3.14

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_0 &= -\frac{J}{2} \left[ \gamma_x (2\hat{x}^2) - \gamma_y (-2\hat{p}^2) + \gamma_z (N - \frac{4}{2}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2)) \right] - \Delta (N - \hat{x}^2 - \hat{p}^2) \\
 &= -J \left[ \gamma_x \hat{x}^2 + \gamma_y \hat{p}^2 + \gamma_z N - \gamma_z \hat{x}^2 - \gamma_z \hat{p}^2 \right] - \Delta N + \Delta (\hat{x}^2 + \hat{p}^2)
 \end{aligned}$$

$$\hat{H}_0 = (\Delta - J\gamma_x + J\gamma_z) \hat{x}^2 + (\Delta - J\gamma_y + J\gamma_z) \hat{p}^2 - \Delta N. \quad (3.18)$$

Comparando este Hamiltoniano libre con el de un oscilador armónico  $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + m\omega^2\hat{x}^2/2$ , se puede notar que la masa y frecuencia, respectivamente, son

$$m = \frac{1}{2(\Delta - J\gamma_y + J\gamma_z)}, \quad (3.19)$$

$$\omega^2 = 4(\Delta - J\gamma_y + J\gamma_z)(\Delta - J\gamma_x + J\gamma_z). \quad (3.20)$$

Después sustituyendo las variables canonicas en 3.15, que es la parte de términos cruzados y operadores de dos términos

$$\hat{V} = \frac{J}{4N}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2) [\gamma_x(2\hat{x}^2) - \gamma_y(-2\hat{p}^2) - 2\gamma_z(\hat{x}^2 + \hat{p}^2)] \quad (3.21)$$

$$= \frac{J}{2N}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2) [(\gamma_x - \gamma_z)\hat{x}^2 + (\gamma_y - \gamma_z)\hat{p}^2]. \quad (3.22)$$

Definiendo

$$\alpha \equiv \Delta - J\gamma_x + J\gamma_z, \quad (3.23)$$

$$\beta \equiv \Delta - J\gamma_y + J\gamma_z, \quad (3.24)$$

$$\gamma_1 \equiv \gamma_x - \gamma_z, \quad (3.25)$$

$$\gamma_2 \equiv \gamma_y - \gamma_z. \quad (3.26)$$

Por lo tanto el Hamiltoniano 3.4 se vuelve

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} = \alpha\hat{x}^2 + \beta\hat{p}^2 + \frac{J}{2N}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2) [\gamma_1\hat{x}^2 + \gamma_2\hat{p}^2] - \Delta N. \quad (3.27)$$

Al sustituirlo dentro del formalismo de Keldysh y emplear estados coherentes, las cuadraturas serán reemplazadas por las correspondientes variables clásicas  $(\hat{x}\hat{p}) \rightarrow (x, p)$ .

## 4. Acción de Keldysh en el modelo LMG

La integral de camino de Keldysh viene dada por la función de partición fuera de equilibrio 2.14, a partir de ésta se puede derivar funcionalmente para obtener los correladores de los campos bosónicos. Para ello es necesario calcular la acción 2.27. Empezando con la parte del Hamiltoniano con  $x = (x_{cl} + x_q)/2$  y  $p = (p_{cl} + p_q)/2$ , calculamos la diferencia entre el Hamiltoniano semi-clásico en cada rama

$$\begin{aligned}
 & H\left(\frac{x_{cl} + x_q}{2}, \frac{p_{cl} + p_q}{2}\right) - H\left(\frac{x_{cl} - x_q}{2}, \frac{p_{cl} - p_q}{2}\right) = \\
 & \quad \alpha \left(\frac{x_{cl} + x_q}{2}\right)^2 + \beta \left(\frac{p_{cl} + p_q}{2}\right)^2 \\
 & + \frac{J}{2N} \left[ \left(\frac{x_{cl} + x_q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p_{cl} + p_q}{2}\right)^2 \right] \left[ \gamma_1 \left(\frac{x_{cl} + x_q}{2}\right)^2 + \gamma_2 \left(\frac{p_{cl} + p_q}{2}\right)^2 \right] - \Delta N \\
 & \quad - \alpha \left(\frac{x_{cl} - x_q}{2}\right)^2 - \beta \left(\frac{p_{cl} - p_q}{2}\right)^2 \\
 & - \frac{J}{2N} \left[ \left(\frac{x_{cl} - x_q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p_{cl} - p_q}{2}\right)^2 \right] \left[ \gamma_1 \left(\frac{x_{cl} - x_q}{2}\right)^2 + \gamma_2 \left(\frac{p_{cl} - p_q}{2}\right)^2 \right] + \Delta N = \\
 & \quad \frac{\alpha}{4} \left[ (x_{cl}^2 + x_q^2 + 2x_{cl}x_q) - (x_{cl}^2 + x_q^2 - 2x_{cl}x_q) \right] \\
 & \quad + \frac{\beta}{4} \left[ (p_{cl}^2 + p_q^2 + 2p_{cl}p_q) - (p_{cl}^2 + p_q^2 - 2p_{cl}p_q) \right] \\
 & \quad + \frac{J}{2N(16)} \times \\
 & \times \left\{ (x_{cl}^2 + x_q^2 + 2x_{cl}x_q + p_{cl}^2 + p_q^2 + 2p_{cl}p_q) \left[ \gamma_1(x_{cl}^2 + x_q^2 + 2x_{cl}x_q) + \gamma_2(p_{cl}^2 + p_q^2 + 2p_{cl}p_q) \right] \right. \\
 & \left. - (x_{cl}^2 + x_q^2 - 2x_{cl}x_q + p_{cl}^2 + p_q^2 - 2p_{cl}p_q) \left[ \gamma_1(x_{cl}^2 + x_q^2 - 2x_{cl}x_q) + \gamma_2(p_{cl}^2 + p_q^2 - 2p_{cl}p_q) \right] \right\} \\
 & = \alpha x_{cl}x_q + \beta p_{cl}p_q + \frac{J}{2N(16)} \times \\
 & \times \left\{ (x_{cl}^2 + x_q^2 + p_{cl}^2 + p_q^2) \left[ \gamma_1(x_{cl}^2 + x_q^2 + 2x_{cl}x_q) + \gamma_2(p_{cl}^2 + p_q^2 + 2p_{cl}p_q) \right] \right. \\
 & \quad + 2(x_{cl}x_q + p_{cl}p_q) \left[ \gamma_1(x_{cl}^2 + x_q^2 + 2x_{cl}x_q) + \gamma_2(p_{cl}^2 + p_q^2 + 2p_{cl}p_q) \right] \\
 & \quad - (x_{cl}^2 + x_q^2 + p_{cl}^2 + p_q^2) \left[ \gamma_1(x_{cl}^2 + x_q^2 - 2x_{cl}x_q) + \gamma_2(p_{cl}^2 + p_q^2 - 2p_{cl}p_q) \right] \\
 & \quad \left. + 2(x_{cl}x_q + p_{cl}p_q) \left[ \gamma_1(x_{cl}^2 + x_q^2 - 2x_{cl}x_q) + \gamma_2(p_{cl}^2 + p_q^2 - 2p_{cl}p_q) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Luego, tendremos

$$\begin{aligned}
 &= \alpha x_{cl}x_q + \beta p_{cl}p_q + \frac{J}{2N(16)} \{4(x_{cl}^2 + x_q^2 + p_{cl}^2 + p_q^2) [\gamma_1 x_{cl}x_q + \gamma_2 p_{cl}p_q] \\
 &\quad + 4(x_{cl}x_q + p_{cl}p_q) [\gamma_1(x_{cl}^2 + x_q^2) + \gamma_2(p_{cl}^2 + p_q^2)]\} \\
 &= \alpha x_{cl}x_q + \beta p_{cl}p_q + \frac{J}{8N} \{(x_{cl}^2 + x_q^2 + p_{cl}^2 + p_q^2)(\gamma_1 x_{cl}x_q + \gamma_2 p_{cl}p_q) \\
 &\quad + (x_{cl}x_q + p_{cl}p_q) [\gamma_1(x_{cl}^2 + x_q^2) + \gamma_2(p_{cl}^2 + p_q^2)]\} \\
 &= \alpha x_{cl}x_q + \beta p_{cl}p_q + \frac{J}{8N} \{2\gamma_1 x_{cl}x_q(x_{cl}^2 + x_q^2) + 2\gamma_2 p_{cl}p_q(p_{cl}^2 + p_q^2) \\
 &\quad + (\gamma_1 + \gamma_2)[x_{cl}x_q(p_{cl}^2 + p_q^2) + p_{cl}p_q(x_{cl}^2 + x_q^2)]\}.
 \end{aligned}$$

De este modo la acción es

$$\begin{aligned}
 S_K = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left( \frac{1}{2} [p_{cl}\dot{x}_q + p_q\dot{x}_{cl}] - \alpha x_{cl}x_q - \beta p_{cl}p_q - \frac{J}{8N} \{2\gamma_1 x_{cl}x_q(x_{cl}^2 + x_q^2) + 2\gamma_2 p_{cl}p_q(p_{cl}^2 + p_q^2) \right. \\
 \left. + (\gamma_1 + \gamma_2)[x_{cl}x_q(p_{cl}^2 + p_q^2) + p_{cl}p_q(x_{cl}^2 + x_q^2)] \right), \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

que al ser una función par por el orden cuadrático de los operadores entonces

$$\begin{aligned}
 S_K = \int_0^{\infty} dt (p_{cl}\dot{x}_q + p_q\dot{x}_{cl} - 2\alpha x_{cl}x_q - 2\beta p_{cl}p_q - \frac{J}{4N} \{2\gamma_1 x_{cl}x_q(x_{cl}^2 + x_q^2) + 2\gamma_2 p_{cl}p_q(p_{cl}^2 + p_q^2) \\
 + (\gamma_1 + \gamma_2)[x_{cl}x_q(p_{cl}^2 + p_q^2) + p_{cl}p_q(x_{cl}^2 + x_q^2)] \}), \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

con esta acción se tiene la función de partición en los campos  $x_{cl/q}$  y  $p_{cl/q}$ . Sin embargo, para este modelo la dinámica esta gobernada por el Hamiltoniano de la forma  $H = p^2/(2m) + m\omega^2 x^2/2 + ux^4/(2N)$  [15], entonces se simplifica la acción

$$S_K = \int_0^{\infty} dt \left[ p_{cl}\dot{x}_q + p_q\dot{x}_{cl} - 2\alpha x_{cl}x_q - 2\beta p_{cl}p_q - \frac{J}{2N} \gamma_1 x_{cl}x_q(x_{cl}^2 + x_q^2) \right]. \quad (4.3)$$

En consecuencia, se puede obtener la función de partición a partir de los puntos de silla, con derivadas funcionales de la acción para cada uno de las cuatro términos clásicos y cuánticos [20], comenzando por los momentos

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta S_k}{\delta p_{cl/q}} \Big|_{t=0} = 0 = \int_0^{\infty} dt \frac{\partial}{\partial p_{cl/q}} [\dots] \Big|_{t=0} \\
 \Rightarrow \dot{x}_{q0/cl0} - 2\beta p_{q0/cl0} = 0 \Rightarrow \dot{x}_{q0/cl0} = 2\beta p_{q0/cl0}
 \end{aligned}$$

después las posiciones, para  $x_{cl}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta S_k}{\delta x_{cl}} \Big|_{t=0} = 0 = \int_0^{\infty} dt \frac{\partial}{\partial x_{cl}} [\dots] \Big|_{t=0} \\
 - 2\alpha x_{q0} - \frac{J\gamma_1}{2N} [x_{q0}(x_{cl0}^2 + x_{q0}^2) + 2x_{cl0}^2 x_{q0}] = 0 \\
 x_{cl0} = \pm \sqrt{-\frac{4\alpha N}{3J\gamma_1} - x_{q0}^2}; \left( -\frac{4\alpha N}{3J\gamma_1} - x_{q0}^2 \right) > 0. \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

De manera análoga para  $x_q$

$$x_{q0} = \pm \sqrt{-\frac{4\alpha N}{3J\gamma_1} - x_{cl0}^2}; \left( -\frac{4\alpha N}{3J\gamma_1} - x_{cl0}^2 \right) > 0. \quad (4.5)$$

Una vez que se obtienen dichos valores, se pueden substituir para obtener la función de partición

$$Z = \int \mathbf{D}[x_{cl/q}, p_{cl/q}] W(x_{cl0/q0}, p_{cl0,q0}) e^{iS_K}, \quad (4.6)$$

donde  $W(x_{cl0/q0}, p_{cl0,q0})$  es la transformada de Wigner de la matriz de densidad, dada por

$$W(x, p) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x + y | \hat{\rho}(t) | x - y \rangle e^{-2ipy} dy \quad (4.7)$$

Después de este paso, se pueden obtener las fluctuaciones alrededor de los puntos estacionarios, a partir de las segundas derivadas de  $S_K$  y pensar en procesos fuera de equilibrio específicos. Pero eso será parte de un trabajo futuro.



## 5. Conclusiones

El método de Keldysh nos permite resolver sistemas fuera de equilibrio y que presentan interacciones fuertes, por lo que resultan útiles para estudiar sistemas de muchos cuerpos como condensados interactuantes y superfluidos más allá de campo medio. Adicionalmente, se requiere especificar el tipo de proceso que se quiere considerar en el sistema. Aquí, se propuso aplicar el modelo de Keldysh al Hamiltoniano de LMG, un paradigma de las interacciones colectivas de espín y las transiciones de fase cuánticas que recientemente se ha empleado para el estudio de procesos no adiabáticos (*quenches*). Básándonos en la Ref. [15], se propuso la derivación de la acción de Keldysh para este modelo. Como se observó, para el modelo LMG de partículas con interacciones de larga distancia de spin, se necesitó de la aproximación de Holfstein-Primakoff que reduce los operadores de espín colectivos a un sólo bosón. Sin embargo, también pueden usarse otras representaciones como la de Schwinger de SU(2) para los bosones [20], solo que la primera es más sencilla de trabajar y se obtienen una comparación más sencilla con varios experimentos, sobre todo aquellos que consideran condensados.

Se ha conseguido llegar a la función de partición de el sistema, para algun trabajo posterior se calculará la segunda derivada variacional de los campos bosónicos lo que nos ayudará a obtener  $G^A$ ,  $G^R$  y  $G^K$  los cuales nos darán su distribución y espectro de energía. Además, se requiere especificar el protocolo específico fuera de equilibrio en este sistema y comparar con resultados numéricos que provengan de la diagonalización exacta del Hamiltoniano de LMG.

## Referencias

- [1] I. Carusotto and C. Ciuti. Quantum fluids of light. *Rev. Mod. Phys.*, 85:299–366, Feb 2013.
- [2] G. Chen, J. Q. Liang, and S. Jia. Interaction-induced lipkin-meshkov-glick model in a bose-einstein condensate inside an optical cavity. *Opt. Express*, 17(22):19682–19690, Oct 2009.
- [3] R. P. Feynman. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 20:367–387, Apr 1948.
- [4] S. Tomonaga, Z. K., and T. Tati. On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields. ii: Case of interacting electromagnetic and electron fields. *Progress of Theoretical Physics*, 2(3):101–116, 10 1947.
- [5] J. Schwinger. On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.*, 73:416–417, Feb 1948.
- [6] J. Schwinger. Brownian motion of a quantum oscillator. *Journal of Mathematical Physics*, 2(3):407–432, 12 1961.
- [7] L. V. Keldysh. Diagram technique for nonequilibrium processes. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 47:1515–1527, 1964.
- [8] H.J. Lipkin, N. Meshkov, and A.J. Glick. Validity of many-body approximation methods for a solvable model: (i). exact solutions and perturbation theory. *Nuclear Physics*, 62(2):188–198, 1965.
- [9] N. Meshkov, A.J. Glick, and H.J. Lipkin. Validity of many-body approximation methods for a solvable model: (ii). linearization procedures. *Nuclear Physics*, 62(2):199–210, 1965.
- [10] A.J. Glick, H.J. Lipkin, and N. Meshkov. Validity of many-body approximation methods for a solvable model: (iii). diagram summations. *Nuclear Physics*, 62(2):211–224, 1965.
- [11] R. Botet, R. Jullien, and P. Pfeuty. Size scaling for infinitely coordinated systems. *Phys. Rev. Lett.*, 49:478–481, Aug 1982.
- [12] S. Dusuel and J. Vidal. Finite-size scaling exponents of the lipkin-meshkov-glick model. *Phys. Rev. Lett.*, 93:237204, Dec 2004.
- [13] S. Sachdev. *Quantum Phase Transitions*. Cambridge University Press, 2 edition, 2011.
- [14] R. H. Romero, M. A. B. Magnani, and R. Linares. Critical phenomena in lightn-dash;matter systems with collective matter interactions. *Entropy*, 24(9), 2022.

- 
- [15] P. Titum and M. F. Maghrebi. Nonequilibrium criticality in quench dynamics of long-range spin models. *Phys. Rev. Lett.*, 125:040602, Jul 2020.
- [16] W. M. Zhang, D. H. Feng, and R. Gilmore. Coherent states: Theory and some applications. *Rev. Mod. Phys.*, 62:867–927, Oct 1990.
- [17] M. O. Scully and M. S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [18] C. Gerry and P. Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2005.
- [19] J. J. Sakurai and J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2017.
- [20] A. Altland and B. D. Simons. *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge University Press, 2 edition, 2010.
- [21] L. H. Toscano. *Fundamentos de la teoría cuántica de campos fuera de equilibrio*. Tesis de grado licenciatura, Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Iztapalapa, 2023.
- [22] J. Rammer. *Quantum Field Theory of Non equilibrium States*. Cambridge University Press, 2007.
- [23] A. Kamenev. *Field Theory of Non-Equilibrium Systems*. Cambridge University Press, 2011.
- [24] M. Gessner, V. M. Bastidas, T. Brandes, and A. Buchleitner. Semiclassical excited-state signatures of quantum phase transitions in spin chains with variable-range interactions. *Phys. Rev. B*, 93:155153, Apr 2016.
- [25] T. Holstein and H. Primakoff. Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet. *Phys. Rev.*, 58:1098–1113, Dec 1940.