



**UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
METROPOLITANA**
Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Licenciatura en Física
Proyecto Terminal I: Investigación teórica

**CAOS EN UN BILLAR SUAVE
TRIANGULAR**

REALIZADO POR: **Luis Gerardo González Pérez**

MATRÍCULA: **2203009038.**

PARA OBTENER EL GRADO DE: **Licenciatura en Física**

ASESOR: **DR. MIGUEL ANGEL BASTARRACHEA MAGNANI**

COORDINADOR: **DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARÍA**

4 DE OCTUBRE DE 2024

IZTAPALAPA, CIUDAD DE MÉXICO



Índice general

| | |
|-----------------------------------|-----------|
| 1. Introducción | 7 |
| 1.1. Caos y regularidad | 8 |
| 2. Billares duros | 9 |
| 2.1. Billar circular | 11 |
| 2.2. Billar elíptico | 12 |
| 3. Billar triangular | 15 |
| 4. Análisis dinámico | 23 |
| 4.1. Tipos de órbitas | 23 |
| 4.2. Mapeo de Poincaré | 27 |
| 5. Conclusiones | 35 |
| 6. Apéndice | 37 |

Resumen

En el presente trabajo se hace un análisis de 3 tipos de billares duros con en el objetivo de aprender las técnicas necesarias para el estudio de un billar suave triangular. Se inicia con un análisis analítico de las colisiones de una partícula en mesas de billar circulares y elípticas, encontrando una familia de trayectorias en el billar elíptico y la razón de la existencia de estas. Se mostrará que la dinámica de una partícula en una mesa de billar depende de la geometría de su frontera. Además, se realizó un análisis cualitativo a través de un mapeo de Poincaré utilizando las coordenadas de Poincaré-Birkhoff, mostrando que hay regularidad en las trayectorias del espacio fase para diferentes condiciones iniciales, tanto en el billar elíptico y circular, exhibiendo que el movimiento no es caótico. De igual forma, se mostrará la equivalencia matemática del modelo de 3 partículas en un anillo no interactuantes con el billar triangular duro para un futuro estudio de un billar suave triangular, que permite la introducción de caos modulable.

Capítulo 1

Introducción

Un *billar* es un modelo matemático donde una o varias partículas libres se mueven en región limitada por una frontera donde pueden colisionar con ella o entre ellas [1]. Un billar de paredes duras tiene la cualidad de que la partícula colisiona con la frontera de manera especular y elástica. Y dado que es una partícula libre, su energía y momento se conservan. Donde su trayectoria es determinada por la geometría de la frontera, lo que permite tener distintos tipos de billares [1].

Entre las diferentes geometrías de billares se encuentran la circular, elíptica, el billar de Sinai [2], la triangular, entre otros. El estudio de estos es importante por la equivalencia matemática de algunos billares con sistemas físicos. Por ejemplo, el billar de Sinai tiene una equivalencia matemática a un gas confinado en un cámara. También son usados para el estudio del caos, ya que está presente en las trayectorias de diferentes billares, en especial en los billares suaves, que además permiten la modulación de éste [3].

Se ha encontrado que el modelo de 3 partículas moviéndose dentro de un anillo es matemáticamente equivalente al movimiento de una partícula en una mesa de billar triangular [4]. Una razón para estudiar el billar triangular es justamente esta equivalencia matemática, pues las dimensiones geométricas del billar están determinadas por las masas de las tres partículas. El billar triangular de paredes duras, al igual que el billar circular y elíptico, su comportamiento dinámico está determinado por la geometría de la frontera, entonces aquí realmente el comportamiento dinámico está determinado por la masa de las 3 partículas. Esto permite analizar casos límites al modificar sus masas, y obtener una generalización de distintos billares triangulares.

Otro tipo de billar es el *billar de paredes suaves*, donde las colisiones con la frontera no son de manera especular. Para suavizar las paredes en los billares, se introduce una función hamiltoniana, de modo que ahora la información de la dinámica del billar no está únicamente en la geometría de la frontera, sino también en las ecuaciones de Hamilton [5]. Además, se permite parametrizar la suavidad de las paredes. Lo interesante de los billares suaves es que permiten estudiar el caos introduciéndolo con la parametrización de la suavidad de las paredes [5].

Para el caso de un billar triangular, pero de paredes suaves, dado que el sistema se volvió hamiltoniano al introducir la suavidad de las paredes, entender su dinámica implica resol-

ver las ecuaciones canónicas de Hamilton. La solución a estas se puede hacer de manera numérica, en este trabajo se hará en el lenguaje *Julia*. De igual forma se analizará su dinámica de manera numérica por medio las trayectorias, de mapeos de Poincaré y exponentes de Lyapunov.

1.1. Caos y regularidad

El *caos* es un comportamiento aperiódico en un sistema determinista que exhibe una dependencia sensible en las condiciones iniciales [6]. Cuando se habla de comportamiento regular en sistemas dinámicos, se hace referencia a trayectorias periódicas o cuasiperiódicas [7]. En el billar triangular, al igual que uno circular y elíptico, la partícula tiene una trayectoria cuasiperiódica. Sin embargo, cuando se suaviza la pared del billar triangular, se va perdiendo la regularidad de la trayectoria. En el espacio fase es donde también se puede visualizar el comportamiento caótico, este se muestra con la regularidad de las trayectorias para diferentes condiciones iniciales, en sistemas caóticos se presenta una separación exponencial entre dos trayectorias vecinas, con la que se puede cuantificar el caos en sistemas clásicos. De entre las múltiples técnicas, cualitativas o cuantitativas, para estudiar sistemas caóticos existen dos que son los mapas de Poincaré y los exponentes de Lyapunov. Los exponentes de Lyapunov miden la tasa media de separación exponencial entre dos trayectorias vecinas [8]. Los mapas de Poincaré son una herramienta cualitativa para analizar una dinámica complicada, donde, de un espacio fase de más de 2 dimensiones se toma un plano, una sección de superficie, y el conjunto de puntos que hay en el plano que representan el paso de la órbita a través de ella se le conoce como sección de Poincaré [9], el mapa de Poincaré es la regla de correspondencia que dicta la posición de los puntos la sección de superficie [6]. El interés de estudiar el caso es por su presencia en múltiples sistemas y fenómenos naturales, como en crecimiento de poblaciones, en el movimiento del aire, en oscilaciones autoasistidas como las que hay en el corazón [6].

Capítulo 2

Billares duros

Una reflexión especular es aquella donde el ángulo de incidencia α_i y el ángulo de reflexión α_f .

$$\alpha_i = \alpha_f. \quad (2.0.1)$$

Los ángulos de incidencia y reflexión son tomados respecto a la línea tangente al punto de colisión de la partícula con una curva y las trayectorias con la que se acerca y se aleja de la misma, como se muestra en la figura 2.1. Suponiendo que la colisión es elástica, la partícula cambia su velocidad sin cambiar su energía cinética. En esta línea tangente al punto de colisión, sea un vector normal \hat{N} , perpendicular a la curva, y sea \hat{T} un vector tangente al punto de colisión y perpendicular a \hat{N} . La partícula, antes de colisionar, tiene una velocidad de incidencia $\vec{v}_{inci} = \vec{v}_i$, que es

$$\vec{v}_i = -v_{iN}\hat{N} + v_{iT}\hat{T}, \quad (2.0.2)$$

mientras que la velocidad de reflexión $\vec{v}_{reflex} = \vec{v}_f$, la velocidad después de colisionar con la curva, es

$$\vec{v}_f = v_{fN}\hat{N} + v_{fT}\hat{T}. \quad (2.0.3)$$

Por la dirección de los vectores, al restarlos se tiene que

$$\vec{v}_f - \vec{v}_i = \gamma\hat{N}, \quad (2.0.4)$$

$$\vec{v}_f - \vec{v}_i = (v_{fN} + v_{iN})\hat{N} + (v_{fT} - v_{iT})\hat{T} = \gamma\hat{N}. \quad (2.0.5)$$

$$(2.0.6)$$

Por lo tanto,

$$v_{fT} = v_{iT}, \quad (2.0.7)$$

$$v_{fN} + v_{iN} = \gamma. \quad (2.0.8)$$

Dado que las colisiones son elásticas, la energía cinética se conserva, esto es, la energía antes, E_i , y después de la colisión, E_f , es la misma

$$E_i = \frac{1}{2}(v_{iN}^2 + v_{iT}^2) = \frac{1}{2}(v_{fN}^2 + v_{fT}^2) = E_f, \quad (2.0.9)$$

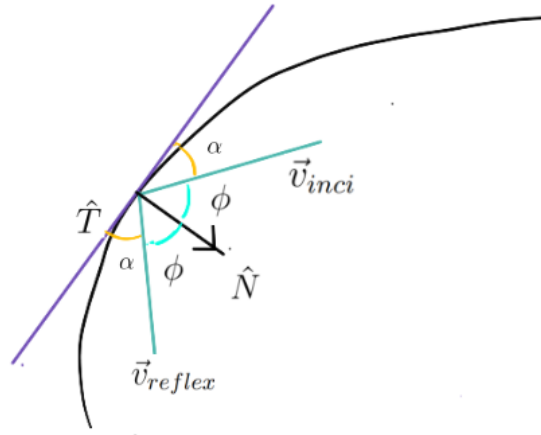


Figura 2.1: Reflexión especular

por 2.0.7 se tiene que

$$v_{iN} = \pm v_{fN}. \quad (2.0.10)$$

Entonces, para que la ecuación 2.0.8 no sea cero, se debe cumplir que $v_{iN} = v_{fN}$, y así se tiene que

$$\gamma = -2v_{iN} = -2\vec{v}_i \cdot \hat{N}, \quad (2.0.11)$$

y la velocidad después de la colisión sería

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i - 2(\vec{v}_i \cdot \hat{N})\hat{N}. \quad (2.0.12)$$

El movimiento de la partícula libre se puede modelar con las ecuaciones de Hamilton [10]. Dado que no hay una fuerza actuando sobre la partícula, la función hamiltoniana, tomando una masa unitaria, es

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2}, \quad (2.0.13)$$

donde las ecuaciones canónicas son

$$\dot{q}_x = p_x \quad \dot{q}_y = p_y, \quad (2.0.14)$$

$$\dot{p}_x = 0 \quad \dot{p}_y = 0. \quad (2.0.15)$$

Resolviendo estas ecuaciones, dadas unas condiciones iniciales (CI), se obtiene la trayectoria de la partícula.

Definición 2.1: Un billar de paredes duras, o billar duro, corresponde al movimiento de una partícula puntual libre en una región $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, que se le llama la *mesa de billar*, con reflexiones especulares y elásticas en la frontera $\partial\mathcal{D} = \Gamma_1 \cup \Gamma \cup \dots \cup \Gamma_n$, donde cada Γ_k se le conoce como pared, que puede ser suave o con picos[1].

Una vez colocada la partícula en \mathcal{D} con unas condiciones iniciales dadas, se moverá e impactará con $\partial\mathcal{D}$ con una velocidad incidente \vec{v}_i , rebotará especularmente, y su velocidad cambiará a \vec{v}_f instantáneamente, y seguirá a su camino hasta volver a colisionar con $\partial\mathcal{D}$ y

volver a cambiar su velocidad. El camino de la partícula seguirá indefinidamente debido a que la energía se conserva.

Se pueden resolver las ecuaciones canónicas para un billar y graficar su movimiento, una opción es mediante un programa en *Julia*. El modelo debe contemplar la solución de las ecuaciones 2.0.14 y 2.0.15 para unas CI dadas. Dado la ausencia de interacción externa, la partícula debe de moverse en línea recta, por lo que la solución a las ecuaciones de movimiento deben de ser para un movimiento rectilíneo uniforme. En *Julia* se plantean las ecuaciones canónicas como un problema de ecuaciones diferenciales, dando un valor de posición y velocidad por cada paso especificado, hasta que choque con $\partial\mathcal{D}$, este choque será detectado por una función que evalúa cada punto de la trayectoria de la partícula, y una vez que el punto de posición se encuentre en $\partial\mathcal{D}$, el programa detendrá el movimiento. Con el choque en la frontera, el programa cambiará la velocidad de la partícula de acuerdo con 2.0.12, así la posición de choque y la velocidad de reflexión se convertirán en un las nuevas CI, que el programa usará para resolver de nuevo las ecuaciones canónicas y dar posición y velocidad de la partícula en cada paso. Este proceso se repetirá hasta que la partícula haya colisionado el número de veces que se le haya indicado al programa. Lo que se graficará será cada punto de posición que proporcione el programa, así se tendrá la trayectoria de la partícula dentro de la frontera. El código del programa se muestra en el apéndice de este documento.

2.1. Billar circular

Un billar circular, como su nombre lo indica, la frontera es una circunferencia y se contempla paredes duras.

Sea un círculo unitario \mathcal{D} tal que $x^2 + y^2 \leq 1$, con una frontera $\partial\mathcal{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ siendo esta la circunferencia unitaria. Se coloca una partícula en \mathcal{D} , en la posición inicial (x_0, y_0) , con una velocidad inicial (v_{x0}, v_{y0}) . Esta comienza a moverse, y dada la nula interacción externa, lo hará en línea recta hasta colisionar con la frontera de manera especular.

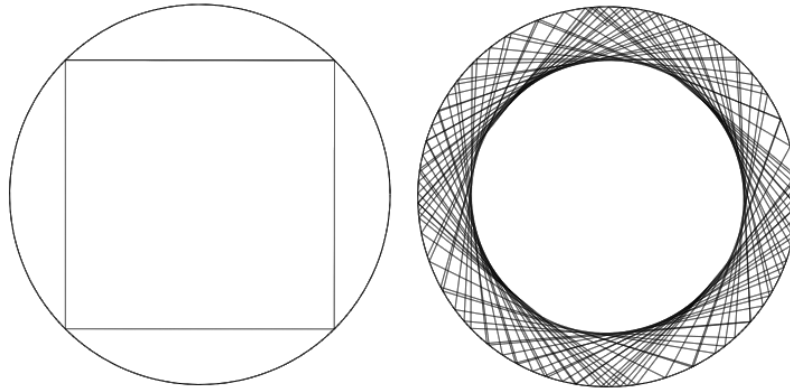
Para obtener la velocidad de la partícula después de la colisión es necesario obtener el vector unitario, \hat{N} , perpendicular a $\partial\mathcal{D}$, dado que la mesa de billar es un círculo, se tiene que

$$\hat{N} = x\hat{x} + y\hat{y}, \quad (2.1.1)$$

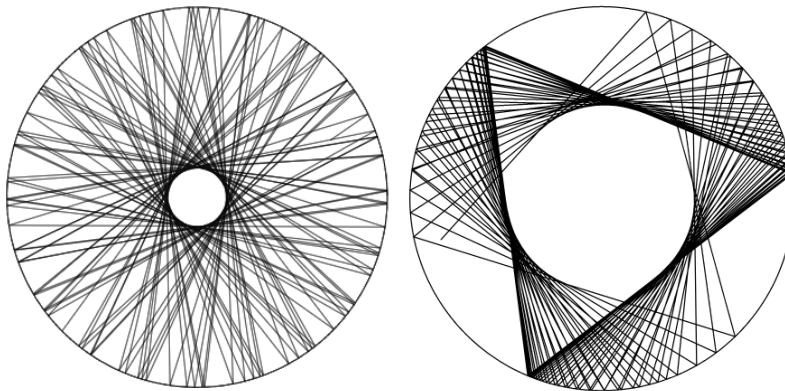
en la figura 2.2 se muestran ejemplos del billar circular.

En la figura 2.2 se puede observar que en algunos billares forma un círculo interior concéntrico a \mathcal{D} , esta es una cáustica, que es curva formada rayos reflejados [11]. La cáustica formada por la trayectoria de la partícula a \mathcal{D} depende enteramente del ángulo de incidencia sobre $\partial\mathcal{D}$, por lo que la forma de esta está determinada por las condiciones iniciales.

Para comprender mejor esto, tómesese una trayectoria incidente l_1 en $\partial\mathcal{D}$ y una reflejada l_2 , hay una línea l que tiene por extremo el punto de colisión y pasa por el centro de \mathcal{D} , dado que la colisión es especular, el ángulo entre la línea l y l_1 y el formado entre l y l_2 es el



$$(a) \text{ CI: } (x, y, p_x, p_y) = (0.7071068, 0.7071068, -2.0, 0.0) = (b) \text{ CI: } (x, y, p_x, p_y) = (0.0, 0.9, -3.2, 2.5)$$



$$(c) \text{ CI: } (x, y, p_x, p_y) = (0.7, 0.3, 2.6, 1.8) = (d) \text{ CI: } (x, y, p_x, p_y) = (-0.837212, -0.2132, 3.812326, 4.234)$$

Figura 2.2: Billares circulares, muestreo sobre diferentes CI

mismo, son ángulos congruentes, por lo que I_1 y I_2 son tangentes al mismo círculo [12]. Por ello es que se forman curvas dentro de las fronteras.

2.2. Billar elíptico

Otro tipo de billar duro es el elíptico, cuya frontera es $\partial\mathcal{D} = \{(x, y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$, y los puntos dentro de la frontera son tales que $\mathcal{D} = \{(x, y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

Para poder obtener la velocidad después de la colisión, es necesario encontrar un vector unitario \hat{N} perpendicular a $\partial\mathcal{D}$. En este caso, la frontera está dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.2.1)$$

Un vector unitario a la frontera puede estar definido por el gradiente, sea $f = f(x, y)$, tal

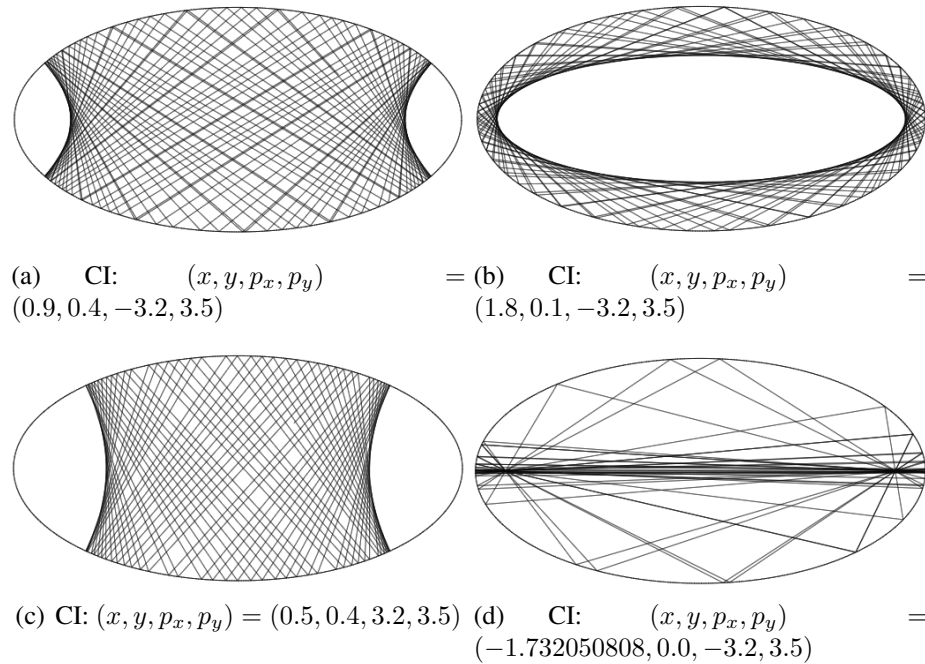


Figura 2.3: Billares elípticos, muestreo sobre diferentes CI

que

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.2.2}$$

de modo que

$$\hat{N} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|},$$

$$\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}(b^2 x \hat{x} + a^2 y \hat{y}). \tag{2.2.3}$$

Empleando este vector unitario, se puede modelar el billar elíptico. La metodología es la misma que la del billar circular, que consta de resolver las ecuaciones de Hamilton a partir de unas CI, hacer que el programa calcule la posición y velocidades a cada paso, hasta que el programa detecte que la partícula chocó con $\partial\mathcal{D}$, por medio de una función, y cambie la velocidad basándose en 2.0.12, de modo que ésta después del choque, junto con su posición de impacto, se convierten en las nuevas CI, y el proceso se repite hasta que el programa realice el número de colisiones solicitadas por el usuario. En la figura 2.3 se muestran ejemplos de este tipo de billares calculados con el programa que se ofrece en el apéndice. Para el billar elíptico también hay cáusticas, en este caso las curvas son elipses e hipérbolas confocales a la frontera del billar [13].

Capítulo 3

Billar triangular

Otra geometría particular de los billares es la geometría triangular, donde una partícula en movimiento está confinada en una frontera compuesta de 3 líneas rectas, conectadas por 3 vértices.

El movimiento de una partícula en un billar triangular de paredes duras es equivalente al movimiento de 3 partículas, moviéndose sin fricción, en un anillo, donde colisionan de manera elástica [4]. De modo que para estudiar la dinámica de una partícula en un billar triangular, es necesario encontrar las ecuaciones que relacionan ambos sistemas, demostrar la equivalencia.

Se tienen 3 partículas, donde sus masas y velocidades son m_k y v_k ($k = 1, 2, 3$). Dado que no hay interacción externa, y que las colisiones son elásticas, la energía del sistema consta de pura energía cinética, que se conserva, dada por

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k v_k^2, \quad (3.0.1)$$

y el momento total,

$$P = \sum_k m_k v_k, \quad (3.0.2)$$

que también se conserva.

Dado que el momento es constante, se toma como $P = 0$. Con base en esto, la energía cinética se puede modificar tal que

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k v_k^2 - \frac{P^2}{2M}, \quad (3.0.3)$$

donde $M = \sum_k m_k$ que es la masa total. Así

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2) - \frac{1}{2M} (m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3)^2 = \\ &= \frac{1}{2M} (m_1^2 v_1^2 + m_1 m_2 v_1^2 + m_1 m_3 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + m_1 m_2 v_2^2 + m_2 m_3 v_2^2 + m_3^2 v_3^2 \\ &+ m_1 m_3 v_3^2 + m_2 m_3 v_3^2 - m_1^2 v_1^2 - m_2^2 v_2^2 - m_3^2 v_3^2 - 2m_1 m_2 v_1 v_2 - 2m_1 m_3 v_1 v_3 - 2m_2 m_3 v_2 v_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2M} (m_1 m_2 v_1^2 + m_1 m_3 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 + m_2 m_3 v_2^2 + m_1 m_3 v_3^2 + m_2 m_3 v_3^2 \\
 &\quad - 2m_1 m_2 v_1 v_2 - 2m_1 m_3 v_1 v_3 - 2m_2 m_3 v_2 v_3), \\
 T &= \frac{1}{2M} \left[\frac{m_1 m_2 m_3}{m_3} (v_1 - v_2)^2 + \frac{m_1 m_2 m_3}{m_2} (v_1 - v_3)^2 + \frac{m_1 m_2 m_3}{m_1} (v_2 - v_3)^2 \right]. \quad (3.0.4)
 \end{aligned}$$

Se define $\Pi = m_1 m_2 m_3$ y donde las diferencias de velocidades se escriben con \dot{x}_k , tal que $\dot{x}_3 = v_1 - v_2$, de modo que la ecuación 3.0.4 ahora es

$$T = \frac{\Pi}{2M} \sum_k \frac{\dot{x}_k^2}{m_k}. \quad (3.0.5)$$

De igual forma se puede definir un nuevo vector, cuyas componentes pueden obtener de la energía cinética. Tomando el valor del momento total definido por 3.0.2, que es cero, se tiene que

$$T = \frac{2(m_2 + m_3)}{2(m_2 + m_3)} T = \frac{1}{2(m_3 + m_2)} [2(m_2 + m_3)T + m_1^2 v_1^2 - m_1^2 v_1^2], \quad (3.0.6)$$

y usando 3.0.2 en la energía cinética se llega a que

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2(m_3 + m_2)} [(m_2 + m_3)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2) - (m_3 v_3 + m_2 v_2)^2 + m_1^2 v_1^2], \\
 T &= \frac{1}{2(m_3 + m_2)} [m_2 m_1 v_1^2 + m_3 m_1 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + m_3 m_2 v_2^2 + m_2 m_3 v_3^2 + m_3^2 v_3^2 + \\
 &\quad - m_3^2 v_3^2 - m_2^2 v_2^2 - 2m_2 m_3 v_2 v_3 + m_1^2 v_1^2] = \\
 &= \frac{1}{2(m_3 + m_2)} [m_2 m_1 v_1^2 + m_3 m_1 v_1^2 + m_3 m_2 v_2^2 + m_2 m_3 v_3^2 + m_1^2 v_1^2 - 2m_2 m_3 v_2 v_3] = \\
 &\quad \frac{1}{2(m_3 + m_2)} [m_2 m_3 (v_2 - v_3)^2 + (m_1 + m_2 + m_3) m_1 v_1^2], \\
 T &= \frac{1}{2} M \left[\frac{m_2 m_3}{(m_2 + m_3) M} (v_2 - v_3)^2 + \frac{m_1}{m_2 + m_3} v_1^2 \right] = \frac{1}{2} M (u_1^2 + u_2^2). \quad (3.0.7)
 \end{aligned}$$

Con la ecuación 3.0.7 se puede definir un vector

$$\vec{W} = u_1 \hat{e}_1 + u_2 \hat{e}_2. \quad (3.0.8)$$

Este vector se puede interpretar como el vector de velocidad de una partícula de masa M . Obsérvese la ecuación 3.0.6, lo que se hizo fue suma y restar el cuadrado del momento de la partícula 1, pero bien pudo usar el de la partícula 2 o 3. Si este fuera el caso, se tendrían 2 representaciones más del mismo \vec{W} . Los vectores unitarios \hat{e}_1 y \hat{e}_2 se encuentran en el plano donde se mueven las partículas, pero estos tiene un origen común que es la partícula 1.

Si bien en algunos artículos [4] se menciona la equivalencia de una partícula en un billar triangular con el movimiento de 3 varillas en un anillo en vez de 3 partículas, se toma el

movimiento de sus centros de masa, por lo que con las 3 partículas con masa da el mismo resultado. Las componentes de 3.0.8 son

$$u_1 = (v_2 - v_3) \sqrt{\frac{m_2 m_3}{(m_2 + m_3)M}} \quad \text{y} \quad u_2 = \sqrt{\frac{m_1}{m_2 + m_3}} v_1. \quad (3.0.9)$$

Entonces, tomando cuenta las ecuaciones 3.0.7 y 3.0.8, el movimiento de 3 varillas, o partículas, se redujo al movimiento de una sola. Siguiendo los mismos pasos se puede definir otro vector de velocidad con componentes

$$\bar{u}_1 = (v_1 - v_3) \sqrt{\frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_3)M}} \quad \text{y} \quad \bar{u}_2 = v_2 \sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_3}}, \quad (3.0.10)$$

o también

$$\tilde{u}_1 = (v_1 - v_2) \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)M}} \quad \text{y} \quad \tilde{u}_2 = v_3 \sqrt{\frac{m_3}{m_1 + m_2}}, \quad (3.0.11)$$

que cumplen también con 3.0.7. El vector \vec{W} es el vector velocidad de una partícula, y cada una de las representaciones de \vec{W} da el mismo vector, pero desde un punto de referencia diferente.

Dado que hay más representaciones de \vec{W} , existe una transformación que lleva a \vec{W} de una representación a otra [14]. Se tiene que

$$\bar{u}_1 = \left(\frac{m_1 v_1 - m_1 v_3}{m_1} \right) \sqrt{\frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_3)M}} = \left(\frac{-m_3 v_3 - m_2 v_2 - m_1 v_3}{m_1} \right) \sqrt{\frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_3)M}},$$

$$\bar{u}_1 = -[(m_3 + m_1)v_3 + m_2 v_2] \sqrt{\frac{m_3}{(m_1 + m_3)M m_1}}. \quad (3.0.12)$$

Sustituyendo la expresión para v_2 en términos de \bar{u}_2 en 3.0.12 se llega a que

$$\sqrt{\frac{(m_1 + m_3)M m_1}{m_3}} \bar{u}_1 = -\sqrt{m_2(m_1 + m_3)} \bar{u}_2 - (m_1 + m_3)v_3,$$

$$v_3 = -\sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_3}} \bar{u}_2 - \sqrt{\frac{M m_1}{m_3(m_1 + m_3)}} \bar{u}_1. \quad (3.0.13)$$

La expresión 3.0.13, junto con la de v_2 , se sustituye en u_1 , de modo que ahora

$$u_1 = \left(\frac{M}{\sqrt{m_2(m_1 + m_3)}} \bar{u}_2 + \sqrt{\frac{M m_1}{m_3(m_1 + m_3)}} \bar{u}_1 \right) \sqrt{\frac{m_2 m_3}{M(m_2 + m_3)}},$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_3 + m_1)(m_3 + m_2)}} \bar{u}_1 + \sqrt{\frac{M m_3}{(m_3 + m_1)(m_3 + m_2)}} \bar{u}_2. \quad (3.0.14)$$

El objetivo es tener una expresión $u_1 = u_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ y $u_2 = u_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, para esto,

$$u_2 = \frac{m_1 v_1}{m_1} \sqrt{\frac{m_1}{m_2 + m_3}} = \frac{-m_2 v_2 - m_3 v_3}{m_1} \sqrt{\frac{m_1}{m_2 + m_3}},$$

$$u_2 = - \left(m_1 \sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_3}} \bar{u}_2 - \sqrt{\frac{m_3 m_1 M}{m_1 + m_3}} \bar{u}_1 \right) \frac{1}{\sqrt{m_1(m_2 + m_3)}},$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{m_3 M}{(m_3 + m_1)(m_3 + m_2)}} \bar{u}_1 - \sqrt{\frac{m_2 m_1}{(m_3 + m_2)(m_3 + m_1)}} \bar{u}_2. \quad (3.0.15)$$

Con esto se puede encontrar una matriz de rotación para \vec{W} , y cambiar la representación de este. Este vector es

$$\vec{W} = u_1 \hat{e}_1 + u_2 \hat{e}_2,$$

o también es

$$\vec{W} = \bar{u}_1 \hat{\hat{e}}_1 + \bar{u}_2 \hat{\hat{e}}_2.$$

Se tienen dos bases que generan el mismo vector, $\{\hat{e}_i\}$ y $\{\hat{\hat{e}}_i\}$, donde los elementos de una base, por medio de una combinación lineal, son capaces de generar cada elemento de la otra base, donde

$$\hat{\hat{e}}_i = \sum_j a_{ij} \hat{e}_j,$$

entonces

$$\vec{W} = \sum_j u_j \hat{e}_j = \sum_i \bar{u}_i \hat{\hat{e}}_i = \sum_i \sum_j \bar{u}_i a_{ij} \hat{e}_j.$$

Por lo tanto,

$$u_j = \sum_i a_{ij} \bar{u}_i,$$

$$a_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial \bar{u}_i}. \quad (3.0.16)$$

Con base en la expresión 3.0.16 se puede obtener la matriz de rotación de 3.0.14 y 3.0.15, a continuación se muestran los cálculos de todos los elementos.

$$a_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} = \sqrt{\frac{m_2 m_1}{(m_2 + m_3)(m_1 + m_3)}}, \quad (3.0.17)$$

$$a_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} = \sqrt{\frac{M m_3}{(m_2 + m_3)(m_1 + m_3)}}, \quad (3.0.18)$$

$$a_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} = \sqrt{\frac{M m_3}{(m_2 + m_3)(m_1 + m_3)}}, \quad (3.0.19)$$

$$a_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} = -\sqrt{\frac{m_2 m_1}{(m_2 + m_3)(m_1 + m_3)}}, \quad (3.0.20)$$

entonces, si

$$\cos \theta_3 = \sqrt{\frac{m_2 m_1}{(m_2 + m_3)(m_1 + m_3)}} \quad y \quad \sin \theta_3 = \sqrt{\frac{M m_3}{(m_2 + m_3)(m_1 + m_3)}}, \quad (3.0.21)$$

la rotación queda como

$$\begin{pmatrix} \hat{\hat{e}}_1 \\ \hat{\hat{e}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \\ \sin \theta_3 & -\cos \theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.0.22)$$

Este proceso se puede hacer para cada una de las otras 2 representaciones del vector \vec{W} . Si se hace esto, las funciones trigonométricas son

$$\cos \theta_2 = \sqrt{\frac{m_1 m_3}{(m_2 + m_1)(m_2 + m_3)}}, \quad \sin \theta_2 = \sqrt{\frac{m_2 M}{(m_2 + m_1)(m_2 + m_3)}}, \quad (3.0.23)$$

$$\cos \theta_1 = \sqrt{\frac{m_2 m_3}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)}}, \quad \sin \theta_1 = \sqrt{\frac{m_1 M}{(m_1 + m_3)(m_1 + m_2)}}. \quad (3.0.24)$$

Las tangentes de cada ángulo son

$$\tan \theta_1 = \sqrt{\frac{m_1 M}{m_2 m_3}}, \quad \tan \theta_2 = \sqrt{\frac{m_2 M}{m_1 m_3}}, \quad \tan \theta_3 = \sqrt{\frac{m_3 M}{m_1 m_2}}. \quad (3.0.25)$$

Los ángulos aquí obtenidos son los ángulos internos de una figura, determinados enteramente por la razón entre masas de las 3 partículas. Con estas expresiones de las tangentes, se puede obtener una expresión que contempla las masas, esta es

$$\cot \theta_1 \cot \theta_2 \cot \theta_3 = \sqrt{\frac{m_2 m_3 m_1 m_3 m_1 m_2}{m_1 m_2 m_3 M M M}} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3}{M}},$$

$$M \cot \theta_1 \cot \theta_2 \cot \theta_3 = \sqrt{\frac{\Pi}{M}}. \quad (3.0.26)$$

A la expresión 3.0.26 se le puede modificar el lado izquierdo de la igualdad, de forma que

$$\sqrt{\frac{\Pi}{M}} = m_3 \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_3 M}} = m_2 \sqrt{\frac{m_1 m_3}{m_2 M}} = m_1 \sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_1 M}}, \quad (3.0.27)$$

entonces la expresión 3.0.25 se convierte en

$$M \cot \theta_1 \cot \theta_2 \cot \theta_3 = m_k \cot \theta_k \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.0.28)$$

Con esta expresión se pueden tener las expresiones

$$\cot \theta_2 \cot \theta_3 = \frac{m_1}{M}, \quad (3.0.29)$$

$$\cot \theta_1 \cot \theta_3 = \frac{m_2}{M}, \quad (3.0.30)$$

$$\cot \theta_1 \cot \theta_2 = \frac{m_3}{M}, \quad (3.0.31)$$

que al sumarlas da

$$\cot \theta_2 \cot \theta_3 + \cot \theta_1 \cot \theta_3 + \cot \theta_1 \cot \theta_2 = 1,$$

$$\cot \theta_1 (\cot \theta_3 + \cot \theta_2) + \cot \theta_3 \cot \theta_2 = \cot \theta_1 \left(\frac{\cos \theta_3}{\sin \theta_3} + \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2} \right) + \cot \theta_2 \cot \theta_3 = 1,$$

$$1 = \cot \theta_1 \left(\frac{\sin \theta_2 \cos \theta_3 + \sin \theta_3 \cos \theta_2}{\sin \theta_2 \sin \theta_3} \right) + \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_3}{\sin \theta_2 \sin \theta_3},$$

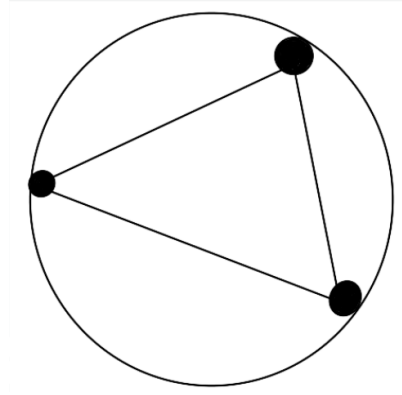


Figura 3.1: 3 partículas no interactuantes moviéndose en un anillo

$$\begin{aligned}\sin \theta_2 \sin \theta_3 &= \cot \theta_1 (\sin (\theta_2 + \theta_3)) + \cos \theta_2 \cos \theta_3, \\ 0 &= \cot \theta_1 (\sin (\theta_2 + \theta_3)) + \cos (\theta_2 + \theta_3), \\ 0 &= \frac{\cos \theta_1 \sin (\theta_2 + \theta_3) + \sin \theta_1 \cos (\theta_2 + \theta_3)}{\sin \theta_1}, \\ 0 &= \frac{\sin (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)}{\sin \theta_1},\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\sin (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 0,$$

lo que implica que

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi, \quad (3.0.32)$$

lo que significa que la figura formada es un triángulo. Por lo tanto, tres masas no interactuantes moviéndose en el contorno de un anillo circular son equivalentes al movimiento de una sola partícula en un triángulo, como se ve en la figura 3.1. Este triángulo tiene lados de longitud l_i ; donde \hat{e}_2 es paralelo a l_1 , \hat{e}_3 es paralelo a l_2 y así sucesivamente; y tiene alturas h_k , donde \hat{e}_1 es paralelo a h_1 , \hat{e}_2 es paralelo a h_2 y así sucesivamente[4].

Cada una de las representaciones del vector de velocidad \vec{W} son el mismo vector de velocidad de una partícula en un billar triangular, pero cada representación de este es desde un lado del triángulo diferente, entonces la transformación de una base a otra es una rotación.

La posición de una partícula en el triángulo está definida por 3 variables, d_1 , d_2 y d_3 , que son las distancias más cortas a los lados l_1 , l_2 y l_3 respectivamente. El área total del triángulo es

$$A = \frac{1}{2}l_1h_1 = \frac{1}{2}l_2h_2 = \frac{1}{2}l_3h_3, \quad (3.0.33)$$

pero esta también puede ser escrita en términos de las coordenadas de la partícula en el billar, tal que

$$A = \sum_k \frac{1}{2}d_k l_k, \quad (3.0.34)$$

entonces

$$\sum_k d_k l_k = l_1 h_1 = l_2 h_2 = l_3 h_3. \quad (3.0.35)$$

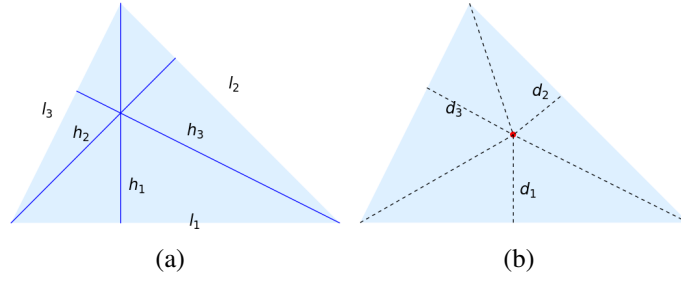


Figura 3.2: Triángulo sobre el que se mueve la partícula con velocidad \vec{W}

La expresión 3.0.35 se puede comprobar analizando la geometría del billar triangular. La figura 3.2 muestra el billar triangular con sus medidas, en la figura se puede ver que el área total del triángulo es igual a la suma de las áreas de los 3 triángulos formados a partir de las coordenadas que describen la posición de una partícula en este billar.

Teniendo las tres partículas en un anillo circular de longitud de arco L constante, la longitud de arco que hay entre 2 partículas es tal que

$$\sum_k x_k = L. \quad (3.0.36)$$

En el billar triangular se cumple que

$$d_k L = h_k x_k, \quad (3.0.37)$$

entonces, tomando que $\dot{d}_1 = u_1$, se tiene que

$$d_1 = x_1 \sqrt{\frac{m_2 m_3}{(m_2 + m_3)M}},$$

por lo que

$$d_1 L = L x_1 \sqrt{\frac{m_2 m_3}{(m_2 + m_3)M}} = x_1 \left(L \sqrt{\frac{m_2 m_3}{(m_2 + m_3)M}} \right).$$

Por lo que

$$h_1 = L \sqrt{\frac{m_2 m_3}{(m_2 + m_3)M}}, \quad (3.0.38)$$

haciendo lo mismo, tomando que $\dot{d}_2 = \bar{u}_1$ y que $\dot{d}_3 = \tilde{u}_1$, se llega a que

$$h_2 = L \sqrt{\frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_3)M}}, \quad (3.0.39)$$

$$h_3 = L \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)M}}. \quad (3.0.40)$$

Por último, los lados de del triángulo son

$$l_1 = L\sqrt{\frac{m_1(m_2 + m_3)}{M^2}}, \quad (3.0.41)$$

$$l_2 = L\sqrt{\frac{m_2(m_1 + m_3)}{M^2}}, \quad (3.0.42)$$

$$l_3 = L\sqrt{\frac{m_3(m_2 + m_1)}{M^2}}. \quad (3.0.43)$$

Cabe aclarar que con esto se demuestra que el movimiento de tres partículas, o varillas, en un anillo, son equivalentes a un billar triangular, donde \vec{W} es el vector de velocidad de esta partícula en el billar triangular y la colisión de masas en el anillo son equivalentes a la colisión de la partícula con uno de los lados l_k , donde los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 [4].

Capítulo 4

Análisis dinámico

A la hora de trazar la trayectoria de una partícula dentro de un billar de cualquiera de las geometrías propuestas en este trabajo, se puede notar que hay familias de trayectorias, y que estas dependen tanto de la forma de la frontera como de las condiciones iniciales. Por ejemplo, en el billar elíptico se destacan 3 trayectorias, que no aparecen en el billar circular, pues estas dependen de la forma de la frontera. De esto surge la idea de que la dinámica del sistema depende de la geometría del billar. A continuación se hace un análisis geométrico de los billares para poder comprender el por qué la forma de las trayectorias. Además de realizarse secciones de Poincaré que permiten una mejor visualización de las trayectorias en el espacio fase para los diferentes billares. En los billares duros se esperan trayectorias regulares, trayectorias no caóticas.

4.1. Tipos de órbitas

En el billar circular, las trayectorias de una partícula forman cáusticas, y la forma de estas depende del ángulo de incidencia al momento de colisionar con la frontera. En el billar elíptico se nota más el cambio de trayectorias, pues de acuerdo con la figura 2.3, hay 3 tipos de trayectorias, y todas ellas dependen de la geometría del billar, pues esta determina la forma en la que colisionará la partícula con la frontera, lo que dará lugar a las figuras.

Para una elipse, decimos que los focos son $F_1 = (c, 0)$ y $F_2 = (-c, 0)$, como se muestra en la figura 4.1, entonces existen 2 tipos de trayectorias definidas por las CI. Si la trayectoria de una partícula cruza el segmento de recta, $\overline{F_1F_2}$, que une a los focos F_1 y F_2 , entonces, después de una reflexión en un punto $P \in \partial\mathcal{D}$, la trayectoria de la partícula será tal que volverá a cruzar el segmento $\overline{F_1F_2}$, formando la trayectoria mostrada en la figura 2.3 (a), (c) y (d). A este tipo de trayectorias que siempre cruzan $\overline{F_1F_2}$ se les conoce como *trayectorias internas* [1], y forman una hipérbola cuyos focos son F_1 y F_2 . Las trayectorias que están más allá del segmento $\overline{F_1F_2}$ se les conoce como *trayectorias externas* [1], y estas forman una elipse concéntrica con la elipse formada por la frontera de la mesa de billar.

La diferencia entre una trayectoria interna y una externa es si la partícula cruza $\overline{F_1F_2}$ o no, hay un límite en las condiciones entre ambos tipos de trayectorias, donde unas condiciones

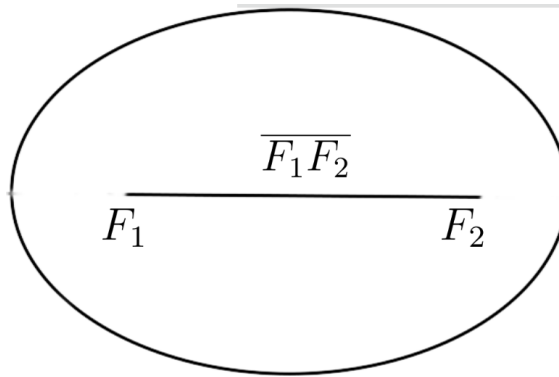


Figura 4.1: Elipse con focos F_1 y F_2 , cuyo segmento que los une es $\overline{F_1F_2}$

llevan a una trayectoria externa y otras a la interna. El límite entre tener una trayectoria interna y una externa está en los focos. Sin embargo, toda trayectoria que pase por uno de los focos, cruzará el otro foco después de cada colisión, es decir, si la trayectoria pasa por F_1 , después colisionar la partícula con $\partial\mathcal{D}$, cruzará por F_2 , luego volverá a colisionar, cruzará F_1 , así siempre.

Para demostrar esto, se supondrá una trayectoria que cruce por $F_1 = (c, 0)$, luego colisiona en un punto $P = (x_1, y_1) \in \partial\mathcal{D}$, la línea tangente a P en $\partial\mathcal{D}$ forma un ángulo α con la trayectoria, es decir, la partícula tiene una trayectoria tal que α es el ángulo con el que incide en P respecto a la línea tangente, y como las colisiones son especulares, el ángulo de la trayectoria después de la colisión que forma respecto a la línea tangente es también α . Entonces, la trayectoria de la partícula pasará por F_1 , que se encuentra en el eje mayor, colisionará, rebotará la partícula y seguirá en línea recta, pasando por el eje mayor de nuevo, para luego colisionar con la frontera y volver a cambiar su trayectoria. Lo que se debe de calcular es el punto, $F_2 = (x_3, 0)$ donde la trayectoria reflejada cruza después de la primera colisión, en el eje mayor.

Se tiene dos líneas rectas que se interceptan, el ángulo que forman es tal que

$$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}, \quad (4.1.1)$$

donde m_1 es la pendiente de una recta y m_2 es la pendiente de la otra recta con la que se intercepta la primera [15]. En el caso de la elipse, la pendiente de la recta tangente a P en $\partial\mathcal{D}$ es m_p , donde

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) = 2 \frac{x}{a^2} + 2 \frac{y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0, \quad (4.1.2)$$

$$m_p = \frac{dy}{dx} \Big|_{(x_1, y_1)} = -\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2}.$$

Esta es la pendiente de la recta tangente al punto P , mientras que la tangente de la trayectoria que pasa por F_1 es

$$m_{F_1} = \frac{-y_1}{c - x_1}, \quad (4.1.3)$$

y la pendiente de la trayectoria reflejada es

$$m_{F_2} = \frac{y_1}{x_3 + x_1}. \quad (4.1.4)$$

Ahora, por 4.1.2, 4.1.3 y 4.1.4, se tiene que

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{m_p - m_{F_1}}{1 + m_p m_{F_1}} = \frac{-\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2} + \frac{y_1}{c - x_1}}{1 + \frac{y_1 x_1 b^2}{y_1 a^2 (c - x_1)}} = \frac{\frac{-x_1 b^2 c + x_1^2 b^2 + y_1^2 a^2}{y_1 a^2 (c - x_1)}}{\frac{y_1 a^2 c - y_1 x_1 a^2 + y_1 x_1 b^2}{y_1 a^2 (x - x_1)}}, \\ \tan \alpha &= \frac{a^2 b^2 - x_1 b^2 c}{y_1 a^2 c - c^2 x_1 y_1} = \frac{b^2 (a^2 - x_1 c)}{y_1 c (a^2 - c x_1)} \\ \tan \alpha &= \frac{b^2}{y_1 c}. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Mientras que para el ángulo entre la trayectoria reflejada y la tangente, se tiene que

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{m_p - m_{F_2}}{1 + m_p m_{F_2}} = \frac{-\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2} - \frac{y_1}{x_3 + x_1}}{1 - \frac{y_1 x_1 b^2}{y_1 a^2 (x_3 + x_1)}} = -\frac{\frac{y_1^2 a^2 + x_1 x_3 b^2 + x_1^2 b^2}{y_1 a^2 (x_3 + x_1)}}{\frac{y_1 x_3 a^2 + y_1 x_1 a^2 - y_1 x_1 b^2}{y_1 a^2 (x_3 + x_1)}} \\ &= -\frac{a^2 b^2 + x_1 x_3 b^2}{y_1 x_3 a^2 + c^2 y_1 x_1}, \\ \tan \alpha &= -\frac{b^2 (a^2 + x_3 x_1)}{y_1 (x_3 a^2 + c^2 x_1)}. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Igualando 4.1.5 con 4.1.6 se puede obtener el valor de x_3 , y así obtener el punto donde la trayectoria reflejada intercepta al eje mayor.

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{y_1 c} &= -\frac{b^2 (a^2 + x_3 x_1)}{y_1 (a^2 x_3 + c^2 x_1)}, \\ a^2 x_3 + c^2 x_1 &= -c a^2 - c x_3 x_1, \\ x_3 &= \frac{-c (a^2 + c x_1)}{a^2 c x_1} = -c, \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

de modo que la trayectoria que cruzar un foco, al colisionar, se dirigirá hacia el otro foco [11].

Este caso es la separación entre tener una trayectoria interna o una externa. Obsérvese la figura 4.2, se tiene una frontera elíptica $\partial \mathcal{D}$ cuyos focos son F_1 y F_2 , el segmento que une ambos focos es $\overline{F_1 F_2}$. Una partícula parte del punto A_0 y colisiona con $\partial \mathcal{D}$ y rebota hasta llegar a A_2 . Esta partícula tiene una trayectoria lineal sin cruzar por $\overline{F_1 F_2}$. Ahora supóngase que la partícula parte de F_1 a A_1 , y como se mostró antes, la partícula colisionará con la frontera y pasará por F_2 . Dado que las colisiones son especulares, al

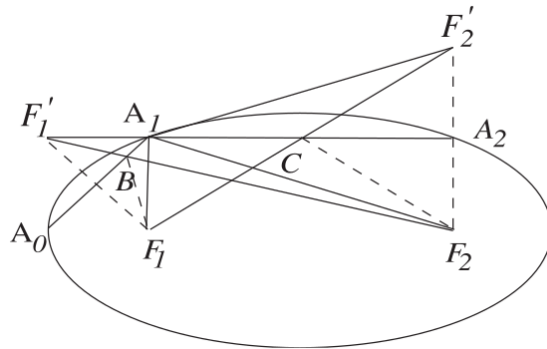


Figura 4.2: Trayectorias internas para un billar elíptico. Figura tomada de [11]

ángulo formado por $\overline{A_0A_1}$ y $\overline{A_1A_2}$ forman un ángulo α con una recta tangente a A_1 , mientras que $\overline{F_1A_1}$ y $\overline{A_1F_2}$ forma un ángulo β con la misma tangente, entonces

$$\angle A_0A_1F_1 = \angle F_2A_1A_2. \quad (4.1.8)$$

Ahora, se toma la línea $\overline{A_0A_1}$ como un espejo, lo mismo para $\overline{A_1A_2}$, para reflejar los focos, entonces ahora se tienen los puntos F_1' y F_2' , y como son reflejos de F_1 y de F_2 , entonces $\overline{F_1'A_1} = \overline{F_1A_1}$ y $\overline{F_2'A_1} = \overline{F_2A_1}$.

Ahora supóngase que se tiene una segunda frontera elíptica con focos F_1 y F_2 , pero diferente a la que pasa por A_1 , donde el segmento de recta $\overline{A_0A_1}$ es tangente a esta. Los puntos B y C son tales que $B = \overline{F_1F_1'} \cap \overline{A_0A_1}$ y $C = \overline{F_1F_2'} \cap \overline{A_1A_2}$. De nuevo, tomando en cuenta que toda trayectoria que pase por un foco cruzará el otro y que $\overline{A_0A_1}$ es tangente a B y a la frontera elíptica, se tiene que por una colisión especular

$$\angle A_0BF_1 = \angle A_1BF_2. \quad (4.1.9)$$

De manera análoga, dado que $\overline{A_1A_2}$ es tangente a C , el ángulo

$$\angle F_1CA_1 = \angle F_2CA_2. \quad (4.1.10)$$

Ciertamente, por medio de las colisiones especulares se pueden deducir las igualdades 4.1.9 y 4.1.10, pero para demostrar que forman parte de una trayectoria interna debe demostrarse que tanto C como B pertenecen a la misma frontera. Para esto, se debe comprobar que la suma de las distancias de los focos a B es igual a la suma de distancias de los focos a C , demostrar que tienen una elipse en común.

De esta misma trayectoria se pueden ver 2 triángulos, uno que es el triángulo $F_1'A_1F_2$ y el otro es $F_1A_1F_2'$. Del triángulo $F_1'A_1F_2$, el ángulo $\angle F_1'A_1F_2$ es igual a la suma de $\angle F_1'A_1A_0$, $\angle A_0A_1F_1$ y $\angle F_1A_1F_2$, pero como $\overline{F_1'A_1} = \overline{F_1A_1}$ y uno es el reflejo del otro, $\angle F_1'A_1A_0 = \angle A_0A_1F_1$, entonces

$$\angle F_1'A_1F_2 = 2\angle A_0A_1F_1 + \angle F_1A_1F_2. \quad (4.1.11)$$

Mientras que para el triángulo $F_1A_1F_2'$, el ángulo $\angle F_1A_1F_2'$ es la suma de los ángulos $\angle F_1A_1F_2$, $\angle F_2A_1A_2$ y $\angle F_2'A_1A_2$, y dado que $\overline{A_1F_2'} = \overline{F_2A_1}$ porque F_2' es un reflejo de F_2 , $\angle F_2A_1A_2 = \angle F_2'A_1A_2$. Entonces

$$\angle F_1A_1F_2' = 2\angle F_2A_1A_2 + \angle F_1A_1F_2, \quad (4.1.12)$$

y por 4.1.8

$$\angle F_1 A_1 F_2' = 2\angle F_2 A_1 A_2 + \angle F_1 A_1 F_2 = 2\angle A_0 A_1 F_1 + \angle F_1 A_1 F_2 = \angle F_1' A_1 F_2,$$

entonces los dos triángulos son congruentes. Esto implica que $\overline{F_1 F_2'} = \overline{F_1' F_2}$. Ahora, lo que se quiere es demostrar que B y C pertenecen a la misma frontera, si esto es correcto

$$\overline{F_1 B} + \overline{B F_2} = \overline{F_1 C} + \overline{C F_2},$$

$$\overline{F_1' B} + \overline{B F_2} = \overline{F_1' F_2} = \overline{F_1 C} + \overline{C F_2'} = \overline{F_1 F_2'},$$

para que C y B se encuentren en la misma elipse debe cumplir que $\overline{F_1' F_2} = \overline{F_1 F_2'}$, y de hecho, se demostró que es correcto, por lo que B y C sí están en la misma elipse. Esto quiere decir que los segmentos $\overline{A_0 A_1}$ y $\overline{A_1 A_2}$ jamás tocarán el segmento que une a los focos, sino que todos los puntos de las trayectorias pertenecerán a elipses concéntricas a $\partial\mathcal{D}$. Entonces, toda trayectoria que no pase por el segmento $\overline{F_1 F_2}$ no lo hará nunca, y que la cáustica que se formará es una elipse confocal a la frontera del billar. Este análisis fue tomado de [11].

4.2. Mapeo de Poincaré

Cuando analizar las trayectorias de un cuerpo se vuelve complicado, es necesario una manera diferente de visualizar la dinámica. Una forma de hacer esto es con el espacio fase, un espacio cuyas coordenadas son la posición y el momento [10]. En los billares, el movimiento de la partícula es bidimensional, por lo que hay dos coordenadas para la posición y dos para el momento en el espacio fase.

Por ejemplo, supóngase que se tiene un cuerpo de masa m que se mueven en un plano, por lo que tendrá 2 coordenadas para la posición y 2 componentes para el momento. Por lo que las trayectorias en el espacio fase serán de 4 dimensiones. Supóngase que la energía de este cuerpo se conserva, de modo que

$$E = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y),$$

donde $V(x, y)$ es la energía potencial del sistema. Podemos escribir un momento en términos de x , y y p_x , tal que

$$p_y = \sqrt{2m(E - V(x, y)) - p_x^2}.$$

Con esto se reduce un grado de libertad, y las trayectorias en el espacio fase son de 3 dimensiones. Del espacio fase podemos tomar una sección, una sección de superficie. En vez de revisar la trayectoria del espacio fase, simplemente se toman los puntos donde ésta atraviesa la sección de superficie. Y bien puede tomarse la sección de superficie en $y = 0$, de tal modo que

$$p_y = \sqrt{2m(E - V(x, 0)) - p_x^2}.$$

El conjunto de puntos en la sección de superficie debido a la intersección de una trayectoria con esta se le conoce como sección de Poincaré. Mientras que el mapeo de Poincaré

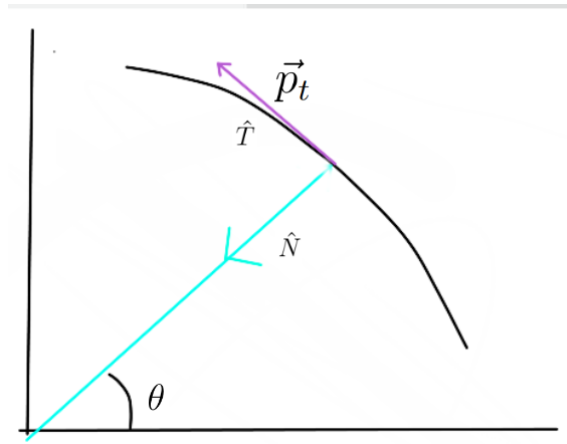


Figura 4.3: Coordenadas en el punto de colisión.

es la regla de correspondencia que da la posición de las intersecciones de la trayectoria y la sección de superficie [6]. Esta es una forma de discretizar el movimiento de un cuerpo, pues si bien las trayectorias son continuas, la sección de Poincaré son puntos.

Para un billar de paredes duras, dado que está libre de interacción externa, el movimiento de la partícula es lineal. Sin embargo, lo que cambia la trayectoria es la colisión con las paredes, por ello la información de la dinámica no está en el interior de la frontera, sino que está en la frontera misma, en las colisiones. Lo importante es encontrar un mapeo que tome en cuenta el momento y la posición en la frontera.

Las colisiones se distinguen por una posición, que se definirá por el ángulo polar, θ , y por el momento tangencial en el punto de colisión, p_t , como se muestra en la figura 4.3. Las coordenadas del espacio fase más usadas en billares son las coordenadas de Poincaré-Birkhoff [13], que son la longitud de arco, \mathcal{S} , de la frontera y el momento tangencial, $p_t = \sin \phi$, donde ϕ es el ángulo entre el momento antes de la colisión y el vector perpendicular a la frontera. Entonces, cuando una partícula colisiona en la frontera, tiene un momento dado y el punto de colisión tiene cierta longitud de arco, y los puntos en la sección de superficie serán (\mathcal{S}, p_t) .

Dado que la longitud de arco está relacionado con el ángulo polar, para el mapeo se usará este, dado por θ , y el momento tangencial. La manera de obtener el ángulo polar es partir de las coordenadas x y y . Para el caso del billar circular, se tiene que

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}. \quad (4.2.1)$$

Para obtener el momento tangencial se debe de tomar el momento de la partícula justo antes de colisionar con la frontera. El momento está compuesto de una parte perpendicular y una parte tangencial a la frontera, tal que

$$\vec{p} = p_p \hat{N} + p_t \hat{T}, \quad (4.2.2)$$

donde \hat{N} es un vector unitario perpendicular a la frontera en el punto colisión, y \hat{T} es un vector unitario tangencial al punto de colisión. De modo que

$$p_t = \vec{p} \cdot \hat{T}. \quad (4.2.3)$$

El vector tangente \hat{T} se puede obtener a partir de una parametrización de $\partial\mathcal{D}$. Para el billar circular, la frontera está parametrizada en términos de γ , cuya función vectorial es

$$\vec{r}(\gamma) = \langle x, y \rangle = \langle r \cos \gamma, r \sin \gamma \rangle. \quad (4.2.4)$$

El vector tangente a la frontera es

$$\hat{T} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\gamma}}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\gamma} \right|}, \quad (4.2.5)$$

$$\hat{T} = \frac{\langle -r \sin \gamma, r \cos \gamma \rangle}{r},$$

$$\hat{T}(\gamma) = \langle -\sin \gamma, \cos \gamma \rangle. \quad (4.2.6)$$

De esta forma, y usando 4.2.3 se obtiene el momento tangencial al punto de colisión. Por convención, si el momento tangencial tiene dirección antihoraria, entonces es positivo, y si tiene dirección horaria, es negativo. En cuanto a θ , sus valores son tales que $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Una forma alternativa de obtener el momento tangencial es con el vector perpendicular a $\partial\mathcal{D}$, donde

$$\hat{N} = \frac{\frac{d\hat{T}}{d\gamma}}{\left| \frac{d\hat{T}}{d\gamma} \right|} = -\langle \cos \gamma, \sin \gamma \rangle, \quad (4.2.7)$$

y por ello, el ángulo que hay entre el momento y \hat{N} es

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{p} \cdot \hat{N}}{|\vec{p}|}, \quad (4.2.8)$$

y la componente tangencial del momento es

$$p_t = |\vec{p}| \sin \phi, \quad (4.2.9)$$

en la figura 4.4 se muestran algunas secciones de Poincaré para el billar duro circular. La sección de Poincaré para diferentes condiciones iniciales para el billar duro circular se puede ver en la figura 4.6.

Las secciones de Poincaré son horizontales. En la figura 4.6 se puede observar que para diferentes condiciones iniciales, una trayectoria en el espacio fase mantiene una separación constante respecto a las trayectorias vecinas. Cambiar las condiciones iniciales, preserva la regularidad en las trayectorias. Por lo que el billar duro circular no es un sistema caótico.

Para el billar duro elíptico se puede hacer lo mismo, obtener las secciones de Poincaré. En este caso, primero se debe definir el ángulo polar, este es

$$\tan \theta = \frac{ay}{bx}. \quad (4.2.10)$$

Mientras que para el momento tangencial se debe de tener la forma del vector tangencial a la frontera. La parametrización de la frontera del billar elíptico es

$$\vec{r}(\gamma) = \langle a \cos \gamma, b \sin \gamma \rangle, \quad (4.2.11)$$

donde, por 4.2.5, se tiene

$$\hat{T} = \frac{\langle -a \sin \gamma, b \cos \gamma \rangle}{\sqrt{a^2 \sin^2 \gamma + b^2 \cos^2 \gamma}} = \frac{\langle -a^2 y, b^2 x \rangle}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}, \quad (4.2.12)$$

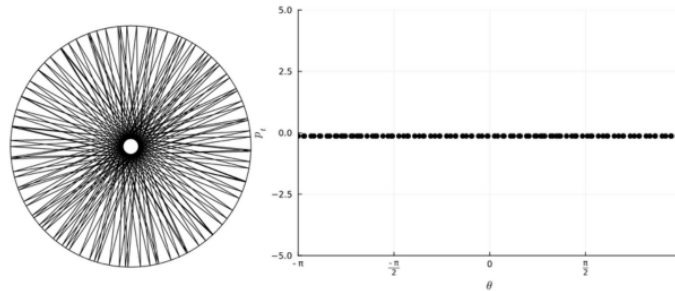
por lo que

$$p_t = \vec{p} \cdot \hat{T},$$

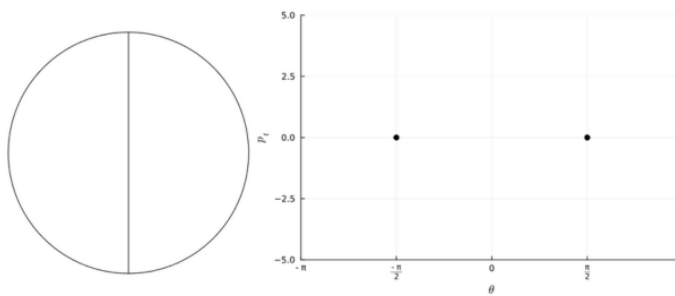
en figura 4.5, se muestran algunos ejemplos de secciones de Poincaré para diferentes CI para el billar duro elíptico, y una sección de Poincaré de múltiples CI, (figura 4.7).

En la figura 4.7 se observa que para diferentes CI, la distancia que tiene una trayectoria con las trayectorias vecinas se mantiene, no hay una separación exponencial entre trayectorias vecinas, por lo que se puede decir que hay regularidad en las trayectorias en el espacio fase para un billar duro elíptico, este billar no es un sistema caótico.

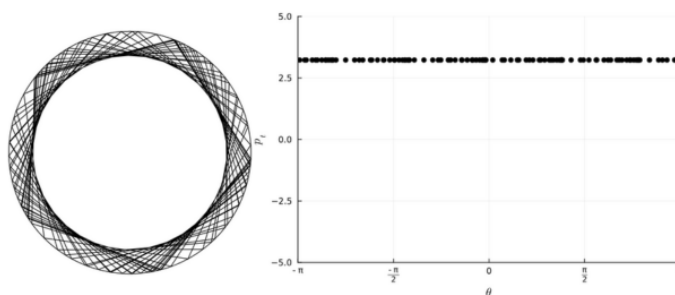
Además, hay algo importante a resaltar, y es que la información del comportamiento dinámico de los billares duros depende de su geometría. Para poder obtener la velocidad al instante después de que la partícula haya colisionado con la frontera, es necesario encontrar el vector \hat{N} , que depende de la forma de la frontera. Con las coordenadas de Poincaré-Birkhoff, para poder obtener el momento tangencial, que es el que proporciona información sobre las trayectorias, es necesario obtener el vector \hat{T} , que, de nuevo, depende de la geometría de la frontera.



(a) CI: $x = 0.567547, y = 0.3465, p_x = -1.67, p_y = -1.2544$

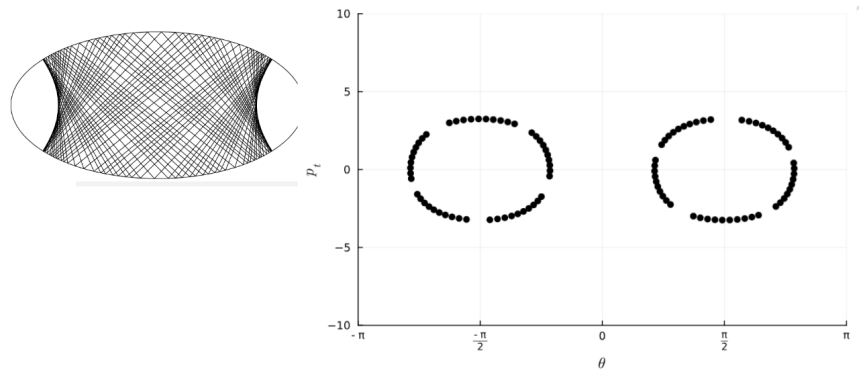


(b) CI: $x = 0, y = 0, p_x = 0, p_y = 3.544$

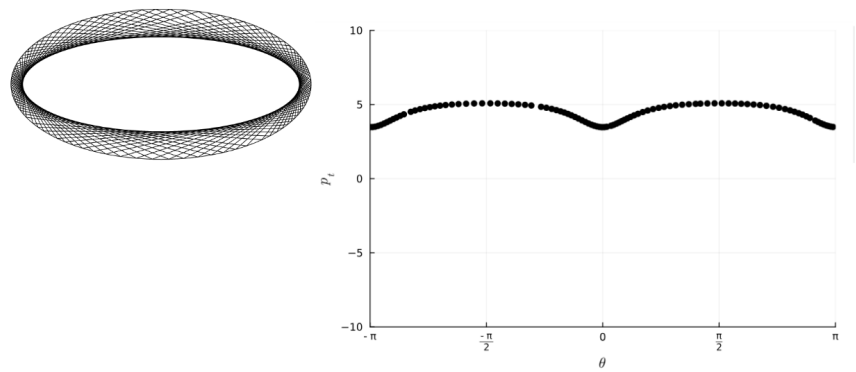


(c) CI: $x = 0.923, y = 0.142, p_x = 1.57, p_y = 3.74$

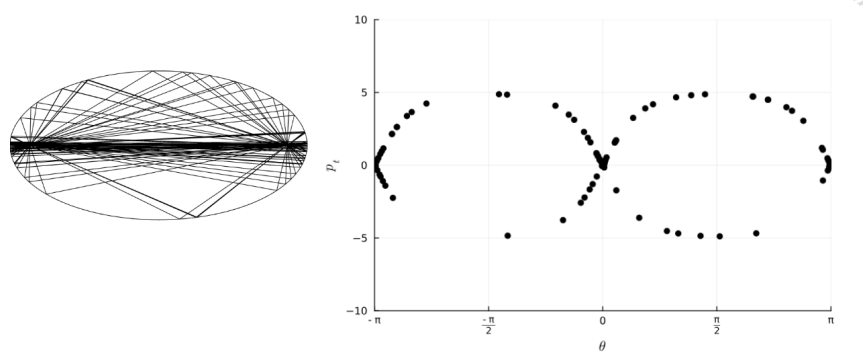
Figura 4.4: Secciones de Poincaré para un billar duro circular



(a) CI: $x = -0.62873, y = 0.523, p_x = -2.988735, p_y = -3.75$



(b) CI: $x = 1.2873, y = 0.4989893, p_x = -4.738654235, p_y = 2.8235$



(c) CI: $x = 1.732050808, y = 0.0, p_x = 4.54235, p_y = 3.35$

Figura 4.5: Secciones de Poincaré para un billar duro elíptico

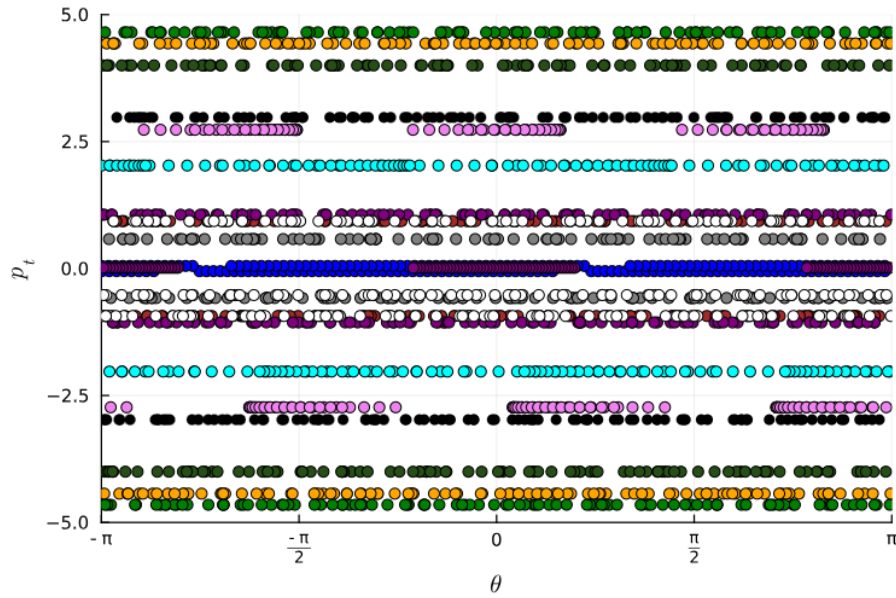


Figura 4.6: Sección de Poincaré para el billar duro circular

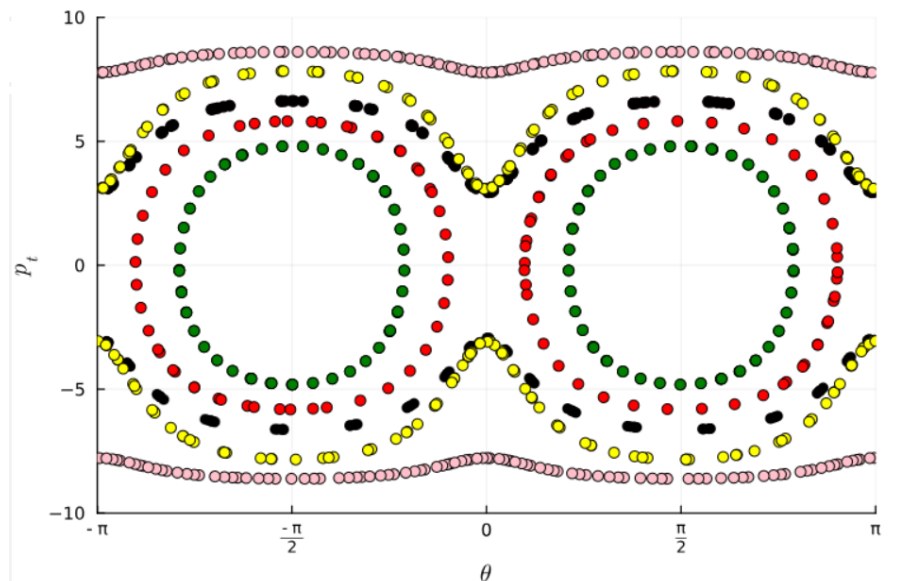


Figura 4.7: Sección de Poincaré para un billar duro elíptico

Capítulo 5

Conclusiones

Se concluye, a través de un análisis matemático y de una comprobación numérica, que la dinámica de los billares duros depende del tipo de frontera que tenga la mesa de billar. El mapeo de Poincaré, tomando las coordenadas de Poincaré-Birkhoff, muestra una regularidad en las trayectorias, y órbitas casi periódicas en los billares. En el caso del billar circular, en las secciones de Poincaré se muestran líneas rectas, por lo que el momento tangencial no cambia, hay una regularidad en las trayectorias en el espacio fase, por lo que este billar no es un sistema caótico. Mientras que para el billar elíptico sí hay un cambio en el momento, incluso hay una dependencia en el tipo de trayectoria que tenga la partícula dentro de la frontera, dado que bajo ciertas condiciones iniciales, hay un movimiento casiperiódico. Pero a pesar de eso, la regularidad en el espacio fase también se mantiene, por lo que también no es un sistema caótico.

Además, con el análisis matemático del momento en las fronteras de los billares, se puede apreciar una dependencia en el vector unitario tangente a la frontera, \hat{T} , que es diferente para cada geometría. De ahí el origen de las diferencias de dinámicas en los billares de paredes duras.

También se concluye que el modelo de 3 partículas moviéndose en un anillo es equivalente a un billar triangular. Con el álgebra adecuada se puede reducir el problema de los 3 cuerpos a un problema de un solo cuerpo en una mesa de billar triangular, donde los ángulos internos de la frontera triangular dependen de las masas de las 3 partículas. El hecho de que exista esta equivalencia permitirá el estudio de billares suaves al transformar el sistema a uno hamiltoniano.

El trabajo realizado en este documento es una introducción a conceptos útiles y necesarios para el estudio de billares con un grado mayor de complejidad, billares suaves. Los billares son un modelo adecuado para el estudio y entendimiento de caos clásico. Donde será necesario utilizar otras técnicas en el estudio de trayectorias en el espacio fase, como el uso de los exponentes de Lyapunov, que muestran si hay regularidad. Y así poder determinar si un billar suave triangular es un sistema caótico

Capítulo 6

Apéndice

```
[1]: using DifferentialEquations#Para resolver ecuaciones diferenciales
```

```
[2]: using Plots#Para graficar
```

```
[3]: using LinearAlgebra#Para manejo de vectores
```

```
[4]: using LaTeXStrings#Para duentes y expresiones
```

```
[5]: function part_lib!(du,u,p,t)#Función hamiltoniana de una partícula libre
    du[1]=u[3] #dx/dt=px
    du[2]=u[4] #dy/dt=py
    du[3]=0 #dpx/dt=0
    du[4]=0 #dpy/dt=0
end
```

```
[5]: part_lib! (generic function with 1 method)
```

```
[6]: function frontera(x,y,par) #Función que me dice si mi partícula está dentro de la frontera circular
    valor=sqrt(x^2+y^2)
    valor<=par
end
```

```
[6]: frontera (generic function with 1 method)
```

```
[7]: function billares(CI,par)#Función que me da la posición de colisión en un billar duro circular
    lapso=(0.0,1.0)
    prob=ODEProblem(part_lib!,CI,lapso)
    global sol=solve(prob,RK4(),saveat=0.0001)
    indice=0
    for i in 1:length(sol.t)
        if frontera(sol.u[i][1],sol.u[i][2],par)!=false
            indice=i-1
            break
        end
    end
    x=[sol.u[i][1] for i in 1:indice]
    y=[sol.u[i][2] for i in 1:indice]
    px=[sol.u[i][3] for i in 1:indice]
    py=[sol.u[i][4] for i in 1:indice]
    return x,y,px,py
end
```

```
[7]: billares (generic function with 1 method)
```

```
[8]: function printbillar(par)#Función para pintar la frontera del billar duro circular
    paso=range(0,stop=2π, length=1000)[2]
    θcoor=vcat(collect(paso:paso:2π-paso),paso)
```

```
rcoor=par
plot!(rcoor.*cos.(θcoor),rcoor.*sin.(θcoor),legend=false,aspect_ratio=:equal,ticks=false,linewidth=:black,framestyle=:none)
end
```

[8]: printbillar (generic function with 1 method)

```
[9]: function especular2!(u,par)#Función que me da la velocidad de reflexión en el billar duro circular
a1=2*(u[3]*(u[1])^2 + u[4]*u[1]*u[2])
b1=2*(u[3]*u[1]*u[2] + u[4]*(u[2]^2))
u[3]-= a1
u[4]-= b1
return u[3],u[4]
end
```

[9]: especular2! (generic function with 1 method)

```
[10]: function mapeo(u0)#Función que construye las secciones de Poincaré de un billar duro circular
c= u0[2]/u0[1]
p=sqrt(u0[3]^2 + u0[4]^2)
momen=[u0[3];u0[4]]
norm=[u0[1];u0[2]]
vetan=[-u0[2];u0[1]]
if u0[1]>0 && u0[2]>0
theta=atan(c)
```

```
elseif u0[1]<0 && u0[2]>0
theta=atan(c) + pi
elseif u0[1]<0 && u0[2]<0#
theta=atan(c) - pi
elseif u0[1]>0 && u0[2]<0
theta= atan(c)
elseif u0[1]==0 && u0[2]>0
theta=pi/2
elseif u0[1]==0 && u0[2]<0
theta=-pi/2
end
pt=dot(vetan,momen)
scatter!([theta], [pt], mc=:rose, legend=false,xlabel=L"\theta",ylabel=L"p_t",
xticks=(-pi/2:pi),["-\pi","-\pi/2","0","pi/2","pi"])
ylims!(-5,5)
xlims!(-pi,pi)
end
```

[10]: mapeo (generic function with 1 method)

```
[11]: function evolucion(CI, params, N)#Función que obtiene todas las trayectorias de un billar duro circular y que las grafica
solver = RK4();
icolision = 0
qx , qy, px, py = billares(CI, params)
```

```
u0 = [last(qx) , last(qy) , last(px) , last(py)]
println(u0)
icolision += 1
while icolision < N
mapeo(u0)#Dado que el código necesario para pintar las trayectorias de una partícula en una mesa de billar
especular2!(u0, params)#es el mismo para realizar las secciones de Poincaré, si se quiere las trayectorias se coloca
prob = ODEProblem(part_lib!, u0 , (0.0,1.0))#como comentario la instrucción para realizar la sección de Poincaré.
sol = solve(prob, solver, saveat = 0.00001)
qx2 = [sol.u[i][1] for i in 1:length(sol.u)]
qy2 = [sol.u[i][2] for i in 1:length(sol.u)]
px2 = [sol.u[i][3] for i in 1:length(sol.u)]
py2 = [sol.u[i][4] for i in 1:length(sol.u)]
qx2 , qy2 , px2 , py2 = billares(u0,params)
u0 = [last(qx2) , last(qy2) , last(px2) , last(py2)]

append!(qx , qx2)
append!(qy , qy2)#
append!(px , px2)
append!(py , py2)
qx2 , qy2 , px2 , py2 = billares(u0,params)
append!(qx , qx2)
append!(qy , qy2)
append!(px , px2)
append!(py , py2)
```

```

    u0 = [last(qx2) , last(qy2) , last(px2) , last(py2)]
    icollision += 1
end
mapeo(u0)
#plot!(qx,qy,lc=:black)
end

```

[11]: evolucion (generic function with 1 method)

```

[12]: function frontera2(x,y,a,b)#Función que me dice si mi partícula está dentro de la frontera elíptica
    valor=(x/a)^2 + (y/b)^2
    valor<=1
end

```

[12]: frontera2 (generic function with 1 method)

```

[13]: function printbillar2(a,b)#Función para pintar la frontera del billar elíptico
    paso=range(0,stop=2π, length=1000)[2]
    θcoor=vcat(collect(paso:paso:2π-paso),paso)
    plot!(a.*cos.(θcoor),b.*sin.(θcoor),legend=false,aspect_ratio=:equal,ticks=false,linewidth=:black,framestyle=:none)
end

```

[13]: printbillar2 (generic function with 1 method)

```

[14]: function billares2(CI,a,b)#Función que me da la posición de colisión en un billar elíptico
    lapso=(0.0,1.0)
    prob=ODEProblem(part_lib!,CI,lapso)
    global sol=solve(prob,RK4(),saveat=0.0001)
    indice=0
    for i in 1:length(sol.t)
        if frontera2(sol.u[i][1],sol.u[i][2],a,b)==false#
            indice=i-1
            break
        end
    end
    x=[sol.u[i][1] for i in 1:indice]
    y=[sol.u[i][2] for i in 1:indice]
    px=[sol.u[i][3] for i in 1:indice]
    py=[sol.u[i][4] for i in 1:indice]
    return x,y,px,py
end

```

[14]: billares2 (generic function with 1 method)

```

[15]: function especular3!(u,a,b)#Función que me da la velocidad de reflexión en un billar duro elíptico
    a1=2*((b^4)*u[3]*(u[1])^2 + (a^2)*(b^2)u[4]*u[1]*u[2])
    b1=2*((b^2)*(a^2)*u[3]*u[1]*u[2] + (a^4)*u[4]*(u[2]^2))

```

```

    c1=b^4*u[1]^2+a^4*u[2]^2
    u[3]= a1/c1
    u[4]= b1/c1
    return u[3],u[4]
end

```

[15]: especular3! (generic function with 1 method)

```

[16]: function angulo(u0,a,b)#Función que me da el ángulo de la posición de colisión
    c=(a*u0[2])/(b*u0[1])
    if u0[1]>0 && u0[2]>0
        theta=atan(c)
    elseif u0[1]<0 && u0[2]>0
        theta=atan(c) + pi
    elseif u0[1]<0 && u0[2]<0
        theta=atan(c) - pi
    elseif u0[1]>0 && u0[2]<0
        theta= atan(c)
    end
    return theta
end

```

[16]: angulo (generic function with 1 method)

[17]: `function mapeo2(u0,a,b)#Función que construye las secciones de Poincaré en un billar duro elíptico`

```

a1=a*u0[2]
a2=b*u0[1]
c=abs(a1/a2)
p=sqrt(u0[3]^2 + u0[4]^2)
momen=[u0[3];u0[4]]
t1=sqrt(a^4*u0[2]^2 + b^4*u0[1]^2)
vetan=[-a^2*u0[2];b^2*u0[1]]
theta=angulo(u0,a,b)
pt=dot(vetan,momen)/t1
scatter!([theta], [pt], mc=:pink, legend=false, xlabel=L"\theta", ylabel=L"p_t",
         xticks=([-n:n/2:n;], ["-\pi", "-\pi/2", "0", "\pi/2", "\pi"]),
         ylims!(-10,10)
         xlims!(-n,n)
end

```

[17]: `mapeo2` (generic function with 1 method)

[18]: `function evolucion2(CI,a,b,N)#Función que obtiene todas las trayectorias de un billar duro elíptico y que las grafica`

```

solver = RK4();
icolision = 0
qx , qy, px, py = billares2(CI,a,b)
u0 = [last(qx) , last(qy) , last(px) , last(py)]
println(u0)

```

```

icolision += 1
while icolision < N
    mapeo2(u0,a,b)#Dado que el código necesario para pintar las trayectorias de una partícula en una mesa de billar
    especular3!(u0,a,b)#es el mismo para realizar las secciones de Poincaré, si se quiere las trayectorias se coloca
    prob = ODEProblem(part_lib!, u0 , (0.0,1.5))#como comentario la instrucción para realizar la sección de Poincaré.
    sol = solve(prob, solver, saveat = 0.00001)
    qx2 = [sol.u[i][1] for i in 1:length(sol.u)]
    qy2 = [sol.u[i][2] for i in 1:length(sol.u)]
    px2 = [sol.u[i][3] for i in 1:length(sol.u)]
    py2 = [sol.u[i][4] for i in 1:length(sol.u)]
    qx2 , qy2 , px2 , py2 = billares2(u0,a,b)
    u0 = [last(qx2) , last(qy2) , last(px2) , last(py2)]#
    #println(u0)
    append!(qx , qx2)
    append!(qy , qy2)
    append!(px , px2)
    append!(py , py2)
    qx2 , qy2 , px2 , py2 = billares2(u0,a,b)
    append!(qx , qx2)
    append!(qy , qy2)
    append!(px , px2)
    append!(py , py2)
    u0 = [last(qx2) , last(qy2) , last(px2) , last(py2)]
    icolision += 1#
end
mapeo2(u0,a,b)
#plot!(qx,qy,lc=:black)
end

```

[18]: `evolucion2` (generic function with 1 method)

Bibliografía

- [1] N. Chernov and R. Markarian. *Chaotic billiards*. Number 127. (American Mathematical Soc., 2006).
- [2] Y. G. Sinai. Dynamical systems with elastic reflections. *Russian Mathematical Surveys*, 25(2):137, (1970).
- [3] H. A. Oliveira, G. A. Emidio, and M. W. Beims. Three unequal masses on a ring and soft triangular billiards. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 22(2):026111, (2012).
- [4] S. L. Glashow and L. Mittag. Three rods on a ring and the triangular billiard. *Journal of statistical physics*, 87:937–941, (1997).
- [5] T. Kroetz, H. A. Oliveira, J. S. E. Portela, and R. L. Viana. Dynamical properties of the soft-wall elliptical billiard. *Phys. Rev. E*, 94:022218, (2016).
- [6] S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. (CRC press, 2018).
- [7] H. N. Núñez. *Regularidad y caos en sistemas dinámicos*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, (1990).
- [8] M. Tabor. *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction*. (Wiley-Interscience, 1989).
- [9] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical mechanics*. (American Association of Physics Teachers, 2002).
- [10] J. B. Marion. *Classical dynamics of particles and systems*. (Academic Press, 2013).
- [11] S. Tabachnikov. *Geometry and Billiards*. (American Mathematical Society, 2005).
- [12] R. Benítez. *Geometría Plana*. (Editorial Trillas, 2007).
- [13] H.-H. Jodl H.H. Korsch and T. Hartmann. *Chaos: A program collection for the PC*. (Springer, 2008).
- [14] D. Lovelock and H. Rund. *Tensors, differential forms, and variational principles*. (Courier Corporation, 1989).
- [15] J. Stewart. *Calculus: early transcendentals*. (Cengage Learning, 2012).