



**UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
METROPOLITANA**
Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Licenciatura en Física

Proyecto Terminal II: Investigación teórica

**CAOS EN UN BILLAR SUAVE
TRIANGULAR II**

REALIZADO POR: **Luis Gerardo González Pérez**

MATRÍCULA: **2203009038.**

PARA OBTENER EL GRADO DE: **Licenciatura en Física**

ASESOR: **DR. MIGUEL ANGEL BASTARRACHEA MAGNANI**

COORDINADOR: **DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARÍA**

20 DE ENERO DE 2024

IZTAPALAPA, CIUDAD DE MÉXICO



Índice general

1. Introducción	7
2. Billares Suaves	11
2.1. Dinámica Hamiltoniana	11
2.2. Billares suaves	13
2.3. Regularidad y caos	14
3. Ecuaciones diferenciales	17
3.1. Método Runge-Kutta	17
3.2. Paso Adaptativo	19
4. Billar elíptico	21
4.1. Billar elíptico suave	21
4.2. Secciones de Poincaré	24
5. Billar Triangular	31
5.1. Billar triangular duro	31
5.2. Mapa de Poincaré	36
5.3. Billar triangular suave	39
A. Códigos	45

Resumen

En el presente trabajo se analiza la dinámica de un billar elíptico, suavizado por una función *error* al tratarla como potencial en una función hamiltoniana que describa al sistema. Por medio de las ecuaciones canónicas de movimiento y secciones de Poincaré usando coordenadas de Poincaré-Birkhoff, para exhibir un movimiento caótico modulado por un parámetro de dureza.

Además, se analiza la dinámica de una partícula en un billar triangular duro para diferentes ángulos, de igual forma, con secciones de Poincaré, mostrando la presencia o ausencia de regularidad de las trayectorias en este. Además, se discute la noción de ergodicidad y los valores angulares que la introducen en el caso de billares triangulares y su equivalencia con el movimiento de 3 partículas en un anillo. También se discuten las perspectivas para la solución de un billar triangular suave, donde el potencial en la función hamiltoniana implica una interacción entre las 3 partículas.

Todo esto se realizó haciendo uso del lenguaje de programación *Julia*, con el cual las ecuaciones canónicas fueron resueltas con un código que simula las ecuaciones y condiciones mencionadas en este trabajo.

Capítulo 1

Introducción

Conocer el estado de movimiento de un cuerpo es conocer su posición y momento para todo tiempo. Para esto es necesario obtener una ecuación que tenga la información dinámica del cuerpo, la ecuación de movimiento [1]. Una manera de obtener esta ecuación es a través de las ecuaciones canónicas de Hamilton [2], que son ecuaciones diferenciales. Al resolverlas, con una condición inicial, es que se puede conocer su posición y momento a todo tiempo, tanto pasado como futuro.

Las ecuaciones canónicas provienen de derivar una función hamiltoniana, que bajo ciertas condiciones es igual a la energía del sistema. Entonces, el problema del estado de movimiento se reduce a encontrar la función hamiltoniana y resolver las ecuaciones canónicas. Un ejemplo es el tiro parabólico, donde un cuerpo es afectado por la fuerza de gravedad de la Tierra. La ecuación de movimiento y solución de este ejemplo es conocida [3]. La trayectoria que sigue el cuerpo es una parábola, la forma de esta dependerá de dónde y con qué velocidad empiece su movimiento el cuerpo. Pero, sin importar las condiciones iniciales, la trayectoria será una parábola.

Los cuerpos pueden diferentes trayectorias, diferentes tipos de movimiento, como lo es el periódico, pero hay un tipo especial de movimiento. El *caos* es un tipo de movimiento aperiódico, en sistemas deterministas, que exhibe una alta sensibilidad a condiciones iniciales [4], esto significa que 2 trayectorias distarán en gran medida si sus condiciones iniciales son aproximadas, no como el caso del tiro parabólico, donde 2 trayectorias serán casi idénticas si sus condiciones iniciales son aproximadas. El caos está presente en múltiples sistemas de la naturaleza, como lo es en gases.

Un sistema que puede presentar un movimiento caótico es el de una partícula moviéndose en una región delimitada por una frontera, en un plano, esto es, un billar. Un billar es un modelo matemático que consiste en una, o varias partículas que se mueven en un contenedor y colisionan con sus paredes o entre ellas [5]. Cuando el contenedor es plano, y las partículas colisionan de manera especular con las paredes del contenedor, se tiene un billar plano de paredes duras, o billar duro, donde la región del contenedor es \mathcal{D} y la frontera que forman las paredes es $\partial\mathcal{D}$. Este modelo recuerda a un gas contenido en un recipiente con un volumen dado.

Ejemplos de billares son el de Sinaí, presentado en 1963 por Yakov Sinaí [6], que consiste

en partículas moviéndose dentro de un contenedor cuadrado con un disco en el centro; y el billar de Bunimovich, presentado por Leonid Bunimovich en 1979 [7], donde el contenedor es un rectángulo limitado por arcos de circunferencia. Estos billares son interesantes por su equivalencia con modelos de gases [5], pero también por exhibir movimiento caótico.

Sistemas, como algunos gases, pueden ser modelados como billares de paredes duras, o billares duros. Por medio de la física estadística es que se puede calcular propiedades de los gases, como lo es su temperatura y presión, de modo que los cálculos coincidan con lo medido experimentalmente. Por ejemplo, para medir la presión de un gas, se debe medir las colisiones que tengan las partículas con las paredes del contenedor, y promediarlas sobre el tiempo; mientras que una manera de calcular la presión es tomando las trayectorias de las partículas en el espacio fase y promediar sobre el ensamble. La física estadística hace coincidir ambos resultados suponiendo que a tiempos largos, ambos promedios son iguales, esto es lo que se conoce como la hipótesis ergódica [8].

Algunos billares pueden ser estudiados con la teoría ergódica, debido a la equivalencia de algunos con modelos de gases, pero también por su movimiento caótico, pues algunos sistemas caóticos también son ergódicos [9]. También se ha discutido las condiciones para que billares cuya frontera sea un polígono sean un sistema ergódico [10].

Una forma de poder estudiar el movimiento de un billar es a través de su trayectoria en el espacio fase, haciendo uso de las secciones de Poincaré y coordenadas de Poincaré-Birkhoff, comentados en capítulos posteriores. A pesar de que algunos billares presenten caos, no siempre es esto así. Billares como el circular y el circular mostraron ser sistemas no caóticos ni ergódicos, mostrando regularidad en su trayectoria a través de los mapas de Poincaré [11].

Los billares planos duros se pueden modelar con una función hamiltoniana de un pozo de potencial infinito, donde el pozo es la región del contenedor. Ahora, si bien el billar elíptico no es caótico, se puede introducir el caos por medio de una función potencial. Los billares cuya función hamiltoniana tenga un potencial de interacción en función de la parametrización de la frontera se les conoce como billares suaves. A diferencia de los billares duros, las colisiones de las partículas con la frontera no son especulares. La información del movimiento se puede obtener de las ecuaciones canónicas de Hamilton. Los mapas de Poincaré de billares suaves muestran diferencias con los billares duros, una de ellas es que aparecen regiones caóticas que pueden ser modeladas con un parámetro del potencial en la función hamiltoniana [12].

Los billares suaves tienen De entre las diferentes geometrías de las fronteras de billares duros, se encuentra el billar triangular. Este es de especial interés porque tiene una equivalencia a un sistema de 3 partículas en un anillo. Por lo que el billar triangular suave sería equivalente al movimiento de 3 partículas interactuantes. Al igual que el billar elíptico, en el billar triangular es posible introducir el caos al suavizarlo.

En el presente trabajo se explican algunas herramientas para el estudio de billares duros y suaves, como formas de suavizar los billares, maneras de obtener las ecuaciones de movimiento de Hamilton y métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales. Se estudia el movimiento de un billar elíptico con el fin de exhibir sus propiedades y técnicas

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

para analizar el billar suave triangular. También se estudia el billar triangular duro con el fin de comparar con el caso suave.

Capítulo 2

Billares Suaves

Un billar es un modelo matemático que consiste en un dominio en un contenedor, donde una partícula puntual se mueve libremente en este y colisiona de manera especular con la frontera [5]. Cuando el contenedor es un plano, se le llama mesa de billar. En billares duros, la dinámica de la partícula depende de la forma de la frontera, donde las trayectorias se pueden clasificar por familias [5] para diferentes billares. Los billares duros tienen diferentes aplicaciones en la física, como para el estudio de átomos fríos [13] y para el estudio del caos clásico y cuántico [14], además de mostrar propiedades referentes con la teoría ergódica, usada en la física estadística [9].

Un tipo especial de billares son los conocidos como billares suaves, cuya dinámica se encuentra en una función hamiltoniana que tiene un potencial dependiente de la forma de la frontera. En el presente capítulo se presentan las propiedades de un potencial que puede tener un billar suave, y las propiedades que puede tener tanto en su movimiento como en el espacio fase. Este capítulo tiene como objetivo presentar algunas herramientas para el estudio de billares suaves.

2.1. Dinámica Hamiltoniana

En cuanto al movimiento de un cuerpo, el objetivo es conocer su estado de movimiento, esto es, su posición y momento, en el espacio, en función del tiempo. Sin embargo, el principal problema es encontrar la ecuación que nos permita conocer esto, las ecuaciones de movimiento. Hay múltiples formas de encontrar esta ecuación, una de ellas es empleando la segunda ley de movimiento de Newton [1]; otra es usando las ecuaciones de Euler-Lagrange [2], y una más es usando las ecuaciones canónicas de Hamilton [1].

Supóngase que se tiene un cuerpo de masa m , cuyas coordenadas de posición son q_i ($i = 1, 2, 3$), y las de momento son p_i ($i = 1, 2, 3$), que cambia su posición respecto al tiempo t , despreciando las dimensiones del cuerpo, sus ecuaciones de movimiento se obtienen de una función hamiltoniana

$$H = H(q_1, \dots, p_1, \dots, t). \quad (2.1.1)$$

La forma de esta función es

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad (2.1.2)$$

donde L es la función lagrangiana. Las ecuaciones de movimiento canónicas, derivables de la función hamiltoniana, son

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2.1.3)$$

Cuando se habla del movimiento de un cuerpo, se dice que la energía de este se conserva cuando no está sujeto a fuerzas no conservativas, como lo es la fricción. La función hamiltoniana tiene diferentes propiedades, una de ellas es que es igual a la energía del cuerpo, E , cuando: la energía cinética es una función homogénea de segundo orden, cuando las fuerzas que actúan sobre el cuerpo provienen de una función potencial, y cuando la función L no depende explícitamente del tiempo [1].

Si bien, obtener las ecuaciones de movimiento canónicas es relativamente simple al saber H , resolverlas para conseguir la posición en función del tiempo es complicado, y dado que están acopladas, es preferible optar por una solución numérica. La solución en sí es complicada de determinar, pero se puede obtener información de su movimiento a través del espacio fase [4].

Ahora supóngase un sistema bidimensional, como los billares, donde una partícula se mueve en un plano, el espacio fase asociado a este sistema contempla 4 dimensiones, dos espaciales y dos de momento, una forma de obtener información de su movimiento es a través de la trayectoria que tenga en este espacio. Pero debido a su dimensión, se complica analizar sus trayectorias. Sin embargo, para los sistemas analizados en este trabajo, se puede reducir el número de grados de libertad a través de las constantes de movimiento, esto es, constantes que dependen de las condiciones iniciales [1]. Cuando la energía de un sistema con 4 grados de libertad,

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + V(x, y),$$

es una constante de movimiento, es decir, que se conserva, se tiene un momento

$$p_y = \pm \sqrt{2m(E - V(x, y)) - p_x^2}, \quad (2.1.4)$$

de modo que con esta expresión se reduce un grado de libertad, pero sigue sin ser suficiente. Del espacio fase de 3 dimensiones, se puede tomar una sección de este, un plano, por ejemplo $y = 0$, y colocar un punto en él cada vez que la trayectoria en el espacio fase lo cruce; obteniendo, así, un mapa que dice dónde pasa la trayectoria y cuáles son algunas propiedades. Fijando una de las variables de la posición, por ejemplo $y = 0$, se llega a la expresión

$$p_y = \pm \sqrt{2m(E - V(x, 0)) - p_x^2}, \quad (2.1.5)$$

así reduciendo otro grado de libertad. La expresión 2.1.5 es lo que se conoce como mapeo en el espacio fase [15].

2.2. Billares suaves

Un billar de paredes duras, o billar duro, se puede analizar por medio de una función hamiltoniana de una partícula libre, donde las colisiones de la partícula con la frontera son especulares, instantáneas. Como se mencionó antes, el tipo de trayectoria que sigue la partícula depende enteramente de la forma de la frontera. Sin embargo, se puede suavizar la frontera agregando un potencial suave [12] a la función hamiltoniana de la partícula, de modo que ahora las colisiones con la frontera ya no son especulares [16].

Al agregar una potencial suave a la función hamiltoniana se dice que se *suaviza la frontera*. Entonces, para una partícula moviéndose en una región \mathcal{D} en un plano, la frontera de \mathcal{D} es $\partial\mathcal{D}$. Para suavizar $\partial\mathcal{D}$, se debe tener una función hamiltoniana del tipo

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + V(x, y; h), \quad (2.2.1)$$

donde h es un parámetro que modula la dureza de la frontera, esto es, permite la transición de un billar duro a un billar suave para valores bajos de este, y viceversa para valores grandes. Dada la forma de la función hamiltoniana 2.2.1, esta es igual a la energía del sistema y se conserva.

Las propiedades de $V = V(x, y; h) = V(\vec{x}; h)$ deben ser específicas para poder suavizar $\partial\mathcal{D}$. Una de ellas es que $V \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$ en \mathcal{D} [16]. Además, para $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, $V \rightarrow 0$. Para el caso de billares, que el potencial tienda a cero a una distancia larga implica que la partícula ha escapado de \mathcal{D} . Vale la pena hacer notar que debido al posible escape de la región donde la partícula interacciona con el potencial, es que los billares suaves equivalen a ciertos tipos de problemas de esparcimiento (*scattering*) [17].

En los problemas de esparcimiento se describe la trayectoria de una partícula que incide en una región en el espacio donde se ve afectada por un potencial, y que además es posible que escape de sus efectos. Los problemas de esparcimiento se pueden clasificar en 2, los caóticos y los no caóticos; los no caóticos son aquellos donde la energía de la partícula es superior al valor máximo del potencial; mientras que los caóticos son aquellos donde se tiene un movimiento caótico transitorio [18]. Los billares suaves estudiados en este trabajo permiten introducir trayectorias cónicas por medio del valor de h . Donde a la región del espacio donde la partícula interactúa con el potencial se le conoce como *región de esparcimiento*.

El propósito es que, en billares, con este tipo de potenciales, la región limitada por $\partial\mathcal{D}$ se convierta en la región de esparcimiento. Para hacerlo, estos deben contemplar la parametrización de la frontera del billar, de lo contrario, la partícula no lo tomaría en cuenta y podría cruzar $\partial\mathcal{D}$ sin ningún problema. Una forma hacer esto es agregar una dependencia respecto a un parámetro o poner el potencial en función de la ecuación de la frontera.

A partir de las ecuaciones canónicas es que se tiene una ecuación de movimiento que

contemple los momentos y las posiciones, donde, tomando 2.2.1, estas son

$$\dot{x} = p_x, \dot{y} = p_y, \quad (2.2.2)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad (2.2.3)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial V}{\partial y}. \quad (2.2.4)$$

Dado que estas ecuaciones están acopladas, resulta difícil, o directamente imposible, obtener una solución analítica. Por ello es necesario recurrir a métodos numéricos.

Además, por las propiedades de los potenciales suaves [16], debe existir una transición paulatina de una dinámica propia de un billar suave a la de un billar de paredes duras, con la variación del parámetro de dureza, cuando $h \rightarrow 0$, la función hamiltoniana es la de una partícula libre en $\partial\mathcal{D}$. Y ya que el problema es uno de esparcimiento, bien podría observarse trayectorias caóticas en el espacio fase.

El objetivo es poder obtener la ecuación de movimiento para la partícula dentro de $\partial\mathcal{D}$ con las ecuaciones canónicas a partir de la función 2.2.1, resolverlas, poder graficar la trayectoria de la partícula y observar cómo varía conforme se cambia el valor del parámetro h y las condiciones iniciales. Además de determinar las trayectorias en \mathcal{D} , es necesario un análisis de las secciones de Poincaré [4], pues en ellos se puede observar si las trayectorias son regulares o caóticas.

2.3. Regularidad y caos

En billares suaves, el parámetro h no solamente puede modificar el movimiento, sino que también la forma de la frontera importa. La forma de la frontera se puede definir a través de parámetros, como puede ser la excentricidad e en billares elípticos, o pendientes de rectas en billares triangulares, que junto con la dureza, determinarán algunas de las propiedades que pueden observarse en un mapa de Poincaré.

Para un billar suave, la función hamiltoniana está dada por 2.2.1, al contemplar la forma de la frontera, el potencial debería ser $V(x, y; h, e)$, donde e controla la geometría de la mesa de billar. La razón por la que una función hamiltoniana puede modelar un billar suave es porque las equipotenciales coinciden con la frontera de una mesa de billar.

Generalmente, cuando se cambian las condiciones iniciales de movimiento de un cuerpo, su trayectoria mostrará cierto parecido con las obtenidas debido a condiciones iniciales distintas, como por ejemplo el movimiento parabólico debido a un cuerpo que se mueve bajo interacción con la fuerza gravitacional. Sin embargo, hay un tipo especial de movimiento, que es aperiódico en sistemas deterministas que exhiben una dependencia sensible en las condiciones iniciales [1], a este movimiento se le conoce como caótico. El interés en estudiar billares suaves es debido a que se puede introducir el caos con h del potencial. Una forma cualitativa de analizar movimientos caóticos es con las secciones de Poincaré.

Anteriormente [11] se estudiaron los billares circulares y elípticos duros, donde sus respectivos mapas de Poincaré mostraban regularidad en su movimiento. El objetivo es estu-

diar un billar suave, conocer la trayectoria de una partícula en una mesa de billar, donde interactúa con un potencial. Dado que el sistema tiene una transición a un movimiento caótico, el mapa de Poincaré mostrará pérdida de regularidad. Sin embargo, si el mismo billar, cuando sus paredes son duras, tiene una órbita periódica, es posible observar, para valores pequeños de h , islas elípticas, figuras elípticas en la sección de Poincaré, cerca de esta órbita [19], que disminuyen las propiedades caóticas del sistema [20]. Estas islas reflejan un movimiento regular, esto es, trayectorias estables dentro del movimiento caótico, en torno a puntos por los que nunca pasa a menos que el movimiento empiece en ellos, puntos de equilibrio inestables.

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales

Una ecuación que contiene derivadas de una o varias funciones desconocidas, respecto a una o más variables independientes, se le conoce como *ecuación diferencial* (DE) [21]. En caso de que la ecuación tenga derivadas respecto a una única variable se le llama *ecuación diferencial ordinaria* (ODE), y si la ecuación tiene derivadas parciales de una o más variables se le llama *ecuación diferencial parcial* (PDE). No siempre se tiene una única ecuación diferencial para un conjunto de funciones desconocidas, se puede tener más de una, en ese caso se tiene un *sistema de ecuaciones diferenciales*. Con las DE se puede modelar diferentes sistemas, desde poblaciones de insectos hasta el comportamiento de un fluido. Conocer la solución de una ODE o PDE implica conocer la función que satisface la ecuación. El principal problema es que resolver una ecuación de estos tipos de manera analítica se puede complicar o que directamente no pueda resolverse. Por ello, es necesario usar métodos diferentes que ayuden a encontrar algo cercano a una solución analítica; entre ellos están los métodos numéricos. Por medio de iteraciones, los métodos numéricos permiten obtener una aproximación con una alta precisión en un intervalo dado. En este capítulo se muestra un método numérico para ecuaciones diferenciales, y un método que permite agilizar los cálculos de las soluciones, que se utilizará en la solución de las ecuaciones de movimiento de billares.

3.1. Método Runge-Kutta

El resolver una DE implica encontrar la solución a esta, primero se define qué es lo que se considera solución. **Definición:** Una solución a un problema de valor inicial $y' = f(x, y)$ con $y(x_0) = y_0$ en el intervalo $[x_0, x_1]$ es una función derivable $y = y(x)$ de modo que

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in [x_0, x_1]. \quad (3.1.1)$$

La representación gráfica de la solución $y = y(x)$ tiene que pasar por el punto inicial (x_0, y_0) [22].

Para una g dada, se puede desarrollar en serie de potencias a la función $y(x)$ en torno a un punto x_i , de modo que

$$y(x_i + g) = y(x_i) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{y^{(k)}(x_i)}{k!} \right) g^k + \mathcal{O}(g^n), \quad (3.1.2)$$

donde $\mathcal{O}(g^n)$ son términos de orden superior a n en h .

A partir de la definición 3.1.1 se pueden encontrar los términos de las derivadas de la función, y colocarlas en la serie de Taylor. Para esto, se tiene que

$$y' = f(x, y), \quad (3.1.3)$$

$$y'' = f_x + f_y y' = f_x + f_y f, \quad (3.1.4)$$

$$y^{(3)} = f_{xx} + f_{yx} y' + y''(f_{xy} + f_{yy} y') + f_y y'', \quad (3.1.5)$$

$$y^{(3)} = f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_y (f_x + f_y f). \quad (3.1.6)$$

Estos términos se sustituyen en la serie de Taylor y se tendría la solución a la ODE de manera aproximada, pues para tener la solución exacta es necesario calcular términos infinitos. Al cortar la serie surge el *error de truncamiento*, entre más términos se contemple de la serie, menor será este error.

Si bien no es una solución exacta al problema, sí es una aproximación útil. El valor g es un parámetro que debe estar dentro del rango $[x_0, x_1]$. Por medio de iteraciones, se puede graficar la solución numérica, donde g determina el tamaño de los pasos.

El método de Runge-Kutta toma la idea de desarrollar la función en serie con parámetros indeterminados, sin que se pierda la precisión que ofrece una serie de Taylor. En este caso, se parte de una ODE como 3.1.1, entre los puntos (x_k, y_k) y (x_{k+1}, y_{k+1}) , donde se desarrolla la función en una serie de la forma

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \sum_{i=1}^n w_i K_i, \quad (3.1.7)$$

donde

$$K_i = gf(x_k + a_i g, y_k + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j). \quad (3.1.8)$$

La precisión del método depende del orden en el que se tome la serie y de los parámetros indeterminados, que serían b_{ij} , w_i y a_i . Tomando que $y_{k+1} = y(x_{k+1})$ se tiene que

$$y_k = y(x_k), \quad (3.1.9)$$

$$K_1 = gf(x_k, y_k), \quad (3.1.10)$$

$$K_2 = gf(x_k + a_2 g, y_k + b_{21} K_1), \quad (3.1.11)$$

$$K_3 = gf(x_k + a_3 g, y_k + b_{31} K_1 + a_{32} K_2), \quad (3.1.12)$$

$$K_4 = gf(x_k + a_4, y_k + b_{41} K_1 + b_{42} K_2 + b_{43} K_3), \quad (3.1.13)$$

así sucesivamente.

Los parámetros se obtienen de desarrollar 3.1.7 y compararla con la serie de Taylor. En el presente trabajo se usó el método de Runge-Kutta a cuarto orden (RK4), cuyos términos

son

$$y(x_k + g) = y_k + \frac{g}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad (3.1.14)$$

$$K_1 = f(x_k, y_k), \quad (3.1.15)$$

$$K_2 = f\left(x_k + \frac{1}{2}g, y_k + \frac{1}{2}gK_1\right), \quad (3.1.16)$$

$$K_3 = f\left(x_k + \frac{1}{2}g, y_k + \frac{1}{2}gK_2\right), \quad (3.1.17)$$

$$K_4 = f(x_k + g, y_k + gK_3). \quad (3.1.18)$$

3.2. Paso Adaptativo

Los métodos numéricos para resolver ODE son amplios, con una precisión bastante aceptable. El problema de los métodos es el tiempo de cálculo; para resolver una ODE con un método numérico es necesario establecer el tamaño de los pasos. Si el rango donde se quiere la solución es grande en comparación con el tamaño de los pasos, el cálculo puede tardar en realizarse. El método de Runge-Kutta no es la excepción a este problema.

Otro inconveniente, donde el tamaño de los pasos también tiene algo que ver, es la forma de las soluciones. Por ejemplo, se tiene que en un rango la solución varía lentamente, entonces no es necesario que el tamaño de los pasos sea pequeño, puede darse un tamaño grande sin perder la precisión. En cambio, si la solución, en otro rango, varía rápidamente, en este caso no se puede tomar un tamaño de paso grande porque se perdería la precisión. Lo ideal es lograr que el tamaño del paso se adapte a los cambios de la solución.

Es necesario que los pasos del método se adapten mientras se continúa con el cálculo. Dado que no se conoce la solución, para saber cuándo cambiar el tamaño del paso es necesario fijarse en la precisión de estos. Para empezar, supóngase que se tiene una ODE, si la solución numérica para unas condiciones específicas tiene una diferencia grande para dos tamaños de pasos distintos, digamos, uno g y otro $2g$, entonces es preferible tomar un tamaño de pasos pequeños. De igual forma, si la diferencia de dos resultados, uno con un tamaño de paso g y otro con tamaño $\frac{1}{2}g$ es pequeña, es preferible tomar pasos más grandes. El punto clave es la variación entre 2 resultados con pasos distintos, que puede escribirse como

$$\Delta = y_2 - y_1, \quad (3.2.1)$$

donde las y_1 y y_2 son los resultados del método numérico. En este método debe haber una tolerancia, un valor que no debe ser superado por la diferencia, el cual definirá el tamaño de los pasos al compararse con la diferencia [23].

La importancia de un paso adaptativo es que es capaz de acortar los tiempos de cálculo sin variar la precisión. Si la diferencia entre dos resultados de una ODE por algún método numérico, una Δ calculada dos veces con tamaño de paso g y otra Δ calculada una vez con tamaño $2g$, no supera una tolerancia establecida, es preferible usar un tamaño $2g$, pues la cantidad de cálculos con tamaño g son el doble que con $2g$ para obtener un mismo

resultado. Dada la función 3.1.2, una con un tamaño de paso $2g$ se tiene que es

$$y(x + 2g) = y_1 + \frac{1}{n!} \phi_n (2g)^n + \mathcal{O}((2g)^n), \quad (3.2.2)$$

donde y_1 son todos los términos de la serie de orden menor a n , y otra con tamaño g , pero con los cálculos realizados 2 veces,

$$y(x + 2h) = y_2 + 2(g)^n \frac{1}{n!} \phi_n + \mathcal{O}(g^2), \quad (3.2.3)$$

donde las ϕ_n son constantes. Se observa que para obtener el mismo resultado, en un caso hay que hacer el doble de cálculos. Ahora, dado que Δ es proporcional a g^n , esto es, la diferencia depende del orden de la serie, entonces $g \sim \Delta^{\frac{1}{n}}$, entonces si se tiene un tamaño de paso g_i y otro g_{i+1} , con un método al mismo orden, se tiene que

$$\frac{g_i}{g_{i+1}} = \left| \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} \right|^{\frac{1}{n}}. \quad (3.2.4)$$

De esta forma, si Δ_{i+1} es más grande que Δ_i , el tamaño g_i del paso será menor que el tamaño g_{i+1} , en cambio, si Δ_{i+1} es menor que Δ_i , entonces g_i será mayor que g_{i+1} . Esta es una forma de saber cuándo tomar tamaños de pasos grandes o pequeños, para agilizar los cálculos, sin necesidad de saber la solución y sin perder precisión [23].

Para el caso del billar triangular duro, se usará el método RK4 debido a que las ecuaciones de movimiento no son de gran dificultad. Para el caso del billar elíptico suave se usará el método Runge-Kutta-Oliver de 6 etapas y orden 5, debido a la complejidad de las ecuaciones de movimiento, y a que es necesaria una mejor precisión para analizar su dinámica cerca de la frontera.

Capítulo 4

Billar elíptico

Un tipo de billar es aquel cuya mesa es elíptica centrada en el origen. Las colisiones de la partícula con la frontera son especulares para el caso de que la frontera sea dura, y, como se ha mencionado, aparecen diferentes tipos de familias. Cada familia depende de las condiciones iniciales [5]. Unas trayectorias son *internas* y otras *externas*, donde las primeras surgen debido a que la posición inicial de la partícula se encuentra entre la región delimitada por los focos; la segunda es porque la posición inicial está más allá de esta región. Este tipo de billares es adecuado para ilustrar la suavidad de la frontera, y para mostrar la transición de esparcimiento no caótico a uno caótico en los mapas de Poincaré, donde aparecen islas de estabilidad.

El caso del billar elíptico duro fue resuelto en [11]. Entonces, el objetivo de este capítulo es ver las nuevas propiedades que presenta el billar elíptico suave en comparación con el duro, y tomarlo como punto de apoyo para comparar el billar triangular suave y duro.

4.1. Billar elíptico suave

Para billares duros, con mesa de billar \mathcal{D} , la partícula tiene una función hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + V(x, y), \quad (4.1.1)$$

donde

$$V(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in \mathcal{D} \\ \infty & \text{si } (x, y) \notin \mathcal{D} \end{cases},$$

que es de un pozo de potencial infinito [24].

Es posible introducir la suavidad al billar cambiando el potencial de pozo infinito por un potencial de interacción de la partícula. Dado que el potencial debe cumplir con ciertas condiciones, no todos son candidatos para suavizar la frontera del billar. Dentro de los posibles potenciales, está la función *error*

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (4.1.2)$$

debido a que tiende a una constante para números muy grandes de x , esto es

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pm\infty} e^{-t^2} dt = \pm 1,$$

esto permite que pueda haber un escape de la partícula.

Ya que las distancias en los billares son finitas, no es posible que la función error se vuelva constante para grandes valores de estas. Lo que va a definir qué tanto se ve afectado el movimiento de una partícula por el potencial es el parámetro h , que modulará la dureza de la frontera del billar. A mayores valores de h , el potencial se irá ajustando ya sea a $+1$ o -1 . En la figura 4.1 se puede observar que conforme se aumenta el valor de h , la función tiende más rápido a 1 y -1 .

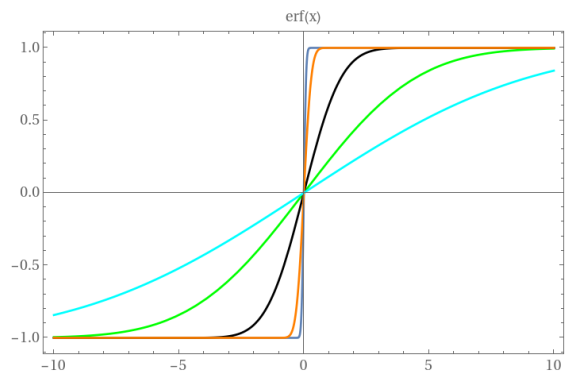


Figura 4.1: Función error con diferentes valores de h

La mesa de billar que se tomará en cuenta es

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) : x^2 + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad (4.1.3)$$

donde

$$\partial\mathcal{D} = \left\{ (x, y) : x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} \quad (4.1.4)$$

es la frontera, y dado que se quiere que el potencial se limite a esta región, debe ser función de la parametrización de la frontera, por lo que

$$V(x, y) = \operatorname{erf}\left[h\left(x^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\right]. \quad (4.1.5)$$

En la figura 4.2 se muestra el potencial para diferentes valores de h , para diferentes durezas. Las curvas de nivel del potencial son elipses con diferentes excentricidades. Sin embargo, se puede observar que conforme h aumenta, las curvas de nivel se van acercando a la forma de $\partial\mathcal{D}$, esto es, la frontera del billar va dejando de ser suave y se va acercando a un caso de paredes duras porque el potencial se va asemejando a un pozo.

El potencial de la partícula, con masa unitaria, es independiente del tiempo, depende únicamente de las posiciones, y depende de manera paramétrica de la dureza de la frontera.

Y dado que la energía cinética es homogénea de segundo orden, la función hamiltoniana que describe la dinámica de la partícula en \mathcal{D} es

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + \text{erf} \left[h \left(x^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \right], \quad (4.1.6)$$

cuyas ecuaciones canónicas son

$$\dot{q}_x = p_x, \quad (4.1.7)$$

$$\dot{q}_y = p_y \quad (4.1.8)$$

y para la derivada de los momentos se tiene

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-h^2 \left(x^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(h \left(x^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \right),$$

$$\dot{p}_x = -\frac{4hx}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-h^2 \left(x^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 \right), \quad (4.1.9)$$

de igual forma

$$\dot{p}_y = -\frac{4hy}{b^2\sqrt{\pi}} \exp \left(-h^2 \left(x^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 \right). \quad (4.1.10)$$

Con esto se consigue un sistema de ecuaciones que contiene la trayectoria y momento de la partícula a todo tiempo t . La solución a este sistema se obtiene de manera numérica, usando el lenguaje *Julia*, por medio del método *Runge-Kutta-Oliver de orden 5 y 6 etapas* (RKO65) [25] de la librería *DifferentialEquations*, del lenguaje *Julia*, el cual tiene pasos adaptativos.

La razón del uso de los pasos adaptativos en la solución de las ecuaciones es debido a que cuando el momento de la partícula comienza a cambiar de dirección, se deben tomar pasos pequeños, mientras que cuando la dirección del momento no cambia de manera significativa, se pueden tomar pasos más grandes. El paso adaptativo que se toma para el cálculo es

$$dt = \epsilon_0 + \epsilon_1 |V(x, y)|, \quad (4.1.11)$$

de modo que cuando el valor del potencial sea bajo, el término predominante será $\epsilon_0 = 1 \times 10^{-5}$, en caso contrario, se deberá tomar en cuenta el término $\epsilon_1 = 1 \times 10^{-3}$ [12].

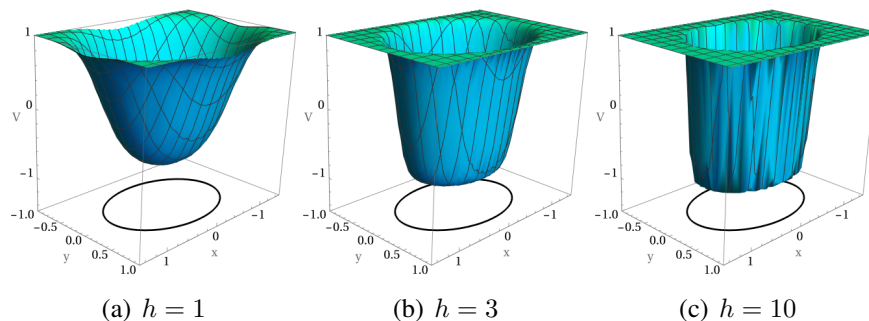


Figura 4.2: Potencial suave para el billar elíptico

Nótese que ϵ_0 es significativo cuando $|V(x, y)|$ es pequeño, o cero, esto ocurre en los puntos más cercanos a $\partial\mathcal{D}$, como puede observarse en 4.2, y es donde la energía cinética de la partícula crece. En cambio, en el fondo del potencial, su valor es mínimo, pero como los pasos toman en cuenta el valor absoluto de V , ϵ_1 se vuelve significativo, esto pasa cerca del centro de \mathcal{D} .

El problema ahora es determinar las condiciones iniciales de la partícula que no violen la conservación de la energía, que no escapen del potencial y que estén en \mathcal{D} . Dado que la energía total de la partícula es una integral de movimiento, pues la función hamiltoniana se conserva y no depende explícitamente del tiempo, por lo que se tiene que

$$E = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + V(x, y),$$

$$p_y = \sqrt{2(E - V(x, y)) - p_x^2}. \quad (4.1.12)$$

El valor máximo del potencial es cuando la energía cinética es cero, en ese caso

$$E = V(x, y) = \text{erf}\left(h\left(x^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\right),$$

dado un valor de y , el valor máximo de x que cumple esta condición es

$$x_{max} = \sqrt{\frac{\text{erf}^{-1}(E)}{h} - \frac{y^2}{b^2} + 1}. \quad (4.1.13)$$

Entonces, la coordenada de la partícula que está dentro de $\partial\mathcal{D}$ e interactúa con el potencial sin escapar es $x_{min} \leq x \leq x_{max}$, donde x_{min} tiene la misma forma funcional que x_{max} pero con signo negativo.

Para el momento se hace algo similar, el valor de p_x máximo es tal que $p_y = 0$, entonces

$$p_{xmax} = \sqrt{2(E - V(x, y))}, \quad (4.1.14)$$

y por ello $p_{xmin} \leq p_x \leq p_{xmax}$, donde p_{xmin} es $-p_{xmax}$. Y para p_y se usa la expresión 4.1.12.

4.2. Secciones de Poincaré

Una vez resueltas las ecuaciones canónicas, se puede trazar la trayectoria de la partícula en la mesa de billar. En la figura 4.3 se pueden observar trayectorias para diferentes valores de la dureza. Nótese que conforme se aumenta el valor de h , las trayectorias se van acercando más a $\partial\mathcal{D}$, y se van asemejando a las familias de trayectorias de un billar elíptico de paredes duras [11].

Los valores de los momentos p_x y p_y generados aleatoriamente están dentro del rango explicado anteriormente, esto sin violar la conservación de la energía; si no, la partícula

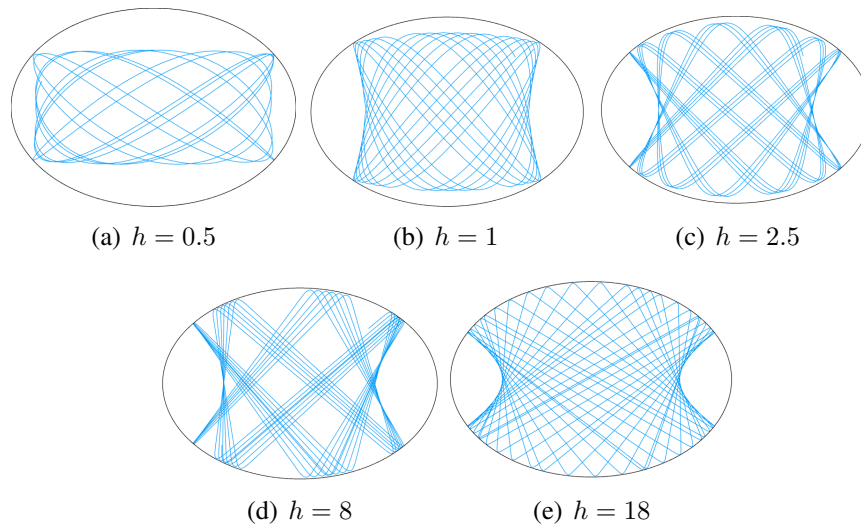


Figura 4.3: Trayectorias de partículas para diferentes valores de h , con una elipse de excentricidad $e = 0.72$, con $E = 0$ y valor inicial $x = 0.4$, mientras que los valores de p_x y p_y fueron generados de manera aleatoria sin violar la conservación de la energía.

escaparía de la mesa de billar. El valor de la excentricidad de la elipse elegido fue tomado de la referencia [12].

Con la figura 4.3 se puede observar que, conforme aumenta el valor de la dureza, las curvas de nivel del potencial tienden a juntarse con la frontera. Por ejemplo, para $h = 1$, las curvas de nivel son diferentes en tamaño unas de otras, no habría problema en que sean concéntricas sin tocarse. Para $h = 10$, dado que las paredes del potencial tienden a una forma vertical, las curvas de nivel no son muy diferentes en forma unas de las otras. Si se sigue aumentando la dureza, se irán acercando a la frontera. Por ello, las trayectorias de la partícula se van asemejando a la de un billar de paredes duras conforme aumenta el valor de h .

Sin embargo, la simple trayectoria no nos dice todo de la dinámica del sistema. Además, la solución de las ecuaciones no es analítica; no hay una expresión del vector de posición de la partícula. Las secciones de Poincaré sirven para saber el tipo de trayectoria que se tiene a partir de un mapeo; y dado que se trata de un billar, lo conveniente es usar los mapas con coordenadas de Poincaré-Birkhoff [26], que toman en cuenta la frontera, para tener otra forma de observar la transición de un billar suave a un billar duro. Si bien para un billar de paredes duras se toma el momento tangente a la frontera $\partial\mathcal{D}$ en el punto de colisión y la longitud de arco en este mismo punto, para un billar de paredes suaves la partícula no llega a colisionar con $\partial\mathcal{D}$, pero sí hay un cambio de signo del momento.

La trayectoria de la partícula en la mesa de billar no llega a la frontera $\partial\mathcal{D}$ para bajas durezas, pero el cambio de signo del momento viene cuando la partícula colisiona con una equipotencial. Las equipotenciales son

$$\operatorname{erf} \left[h \left(x^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \right] = k,$$

donde k es una constante. Las curvas que forman son

$$f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1 = \frac{1}{h} \operatorname{erf}^{-1}(k) = c, \quad (4.2.1)$$

donde c es también una constante real. Con esta expresión también se puede apreciar que conforme se aumenta h , la curva de la equipotencial tiende a la forma de $\partial\mathcal{D}$, pues $c \rightarrow 0$.

De la expresión 4.2.1 se puede obtener un vector normal a la equipotencial, con el cual se puede determinar cuándo el momento perpendicular a ella se vuelve cero. Entonces, el vector normal es

$$\hat{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{b^4}}} \left\langle x, \frac{1}{b^2} y \right\rangle. \quad (4.2.2)$$

Entonces, la partícula se moverá en un punto en la mesa de billar con cierto momento \vec{p} ; se irá acercando a una equipotencial determinada por h , hasta que p_{\perp} , que es el momento perpendicular a la equipotencial, sea cero y p_{\parallel} , que es el momento tangente a la equipotencial, sea máximo, esto es

$$\begin{aligned} -\vec{p} \cdot \hat{n} &= \frac{-1}{|\nabla f|} \left(xp_x + \frac{1}{b^2} yp_y \right) = 0, \\ xp_x + \frac{1}{b^2} yp_y &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Esto es cierto si la partícula colisiona con una equipotencial. Nótese que realmente no importa qué equipotencial sea, pues el término c , que diferencia una de las demás, no aparece en 4.2.3, por la derivada. Por lo tanto, cuando esta expresión se cumple

$$p_{\parallel} = p_x^2 + p_y^2. \quad (4.2.4)$$

Si bien, la expresión 4.2.3 aplica para cualquier equipotencial, la dinámica no es la misma para cualquier equipotencial.

Los métodos numéricos dan un valor de la posición por cada paso, por lo que el código del apéndice A encargado de resolver las ecuaciones diferenciales da un conjunto de valores para la posición y otro para el momento. Justo por esta forma de trabajar del código es que no es posible encontrar los puntos exactos donde se cumpla la condición 4.2.3. En el movimiento de la partícula en la mesa de billar puede observarse que hay un instante donde el momento tiene una dirección, respecto a $-\hat{n}$, pasa a tener dirección tal que $-\vec{p} \cdot \hat{n} = 0$ y después el momento cambia de dirección respecto a $-\hat{n}$ de nuevo, pero como las colisiones no son especulares, no se puede asegurar que tenga la misma magnitud que antes, ni la misma dirección, justo como se ve en la figura 4.4. Pero algo es claro, y es que el valor del producto escalar cambia de signo, y esto es lo que detecta el código. Este método está basado en la referencia [11].

En la figura 4.5 se muestran diferentes trayectorias junto con sus respectivos mapas de Poincaré. Por sí solos, no son muy diferentes, a primera vista, de los mapas para un billar elíptico de paredes duras. En la figura 4.6 se muestran distintos mapas de Poincaré para diferentes condiciones iniciales y diferentes durezas; donde conforme se aumenta el valor de h , la forma se va asemejando más a la del billar duro. En los mapas se observa un

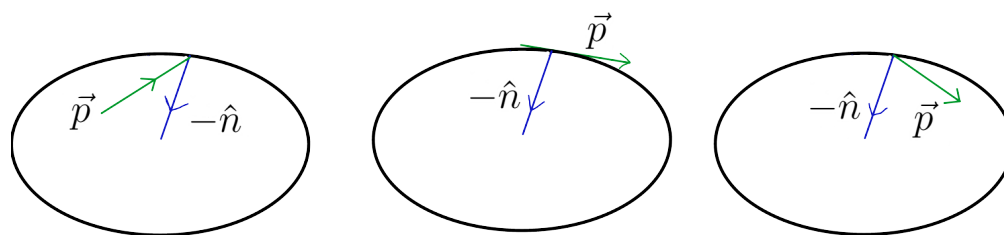


Figura 4.4: Cambio de dirección del momento al llegar a la equipotencial, donde el vector verde es el momento \vec{p} , el azul \hat{n} es un vector normal a la equipotencial, que es la curva negra. Se puede observar que el producto escalar de \vec{p} y $-\hat{n}$ tiene un cambio de signo, por lo que hubo un punto donde $-\vec{p} \cdot \hat{n} = 0$.

punto el origen, esto es porque el código genera un vector $(0, 0, 0, 0)$ al que se le agregan los valores de posición y momento, por lo que este punto no debe ser tomado en cuenta. Ya que las islas más grandes rodean 2 puntos específicos, $(\theta, p_t) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ y $(\theta, p_t) = (\frac{\pi}{2}, 0)$, se entiende que estos son puntos inestables. Sin embargo, pueden verse trayectorias que forman islas en puntos distintos a los demás, como se ve en 4.6(c). En la figura 4.7 se observan mejor estas islas, donde algunas trayectorias no rodean el mismo punto que las demás, y terminan por reducir las propiedades ergódicas del sistema [19].

Para durezas menores a 3 es posible observar regiones con puntos dispersos, que no forman islas alrededor de puntos inestables, lo cuál se debe a trayectorias caóticas. Tanto en 4.6 como en 4.7 aparecen trayectorias caóticas. A pesar de que ambas figuras muestran el mismo sistema hamiltoniano, los valores e y h hacen que los mapas sean distintos. El parámetro h es el que permite la transición a un movimiento caótico en ciertas regiones de la mesa de billar.

Entre las diferencias que se pueden notar entre los billares elípticos duros [11] y suaves son las trayectorias en \mathcal{D} , pues cuando se suaviza la frontera, la partícula no toca esta, a menos que los valores de h sean altos. Además, en las secciones de Poincaré de los billares suaves se observan trayectorias que forman islas en puntos de equilibrio inestables, islas que no son observadas en las secciones para el caso duro. Por último, en billares elípticos suaves, sus secciones de Poincaré muestran pérdida de regularidad de las trayectorias para valores bajos de h , mientras que en el caso duro, todas las trayectorias son regulares. Con esto, se puede esperar encontrar las diferencias que puede haber entre el billar triangular duro y el suave.

	x	y	p_x	p_y
(a)	-0.0671744528426824	0.4	1.0	0.55091257537668043
(b)	0.13282554715731765	0.4	0.0	1.4100987599123218
(c)	-0.06717445284268242	0.4	1.0	1.0

Tabla 4.1: Tabla de condiciones iniciales de los billares mostrados en la figura 4.5

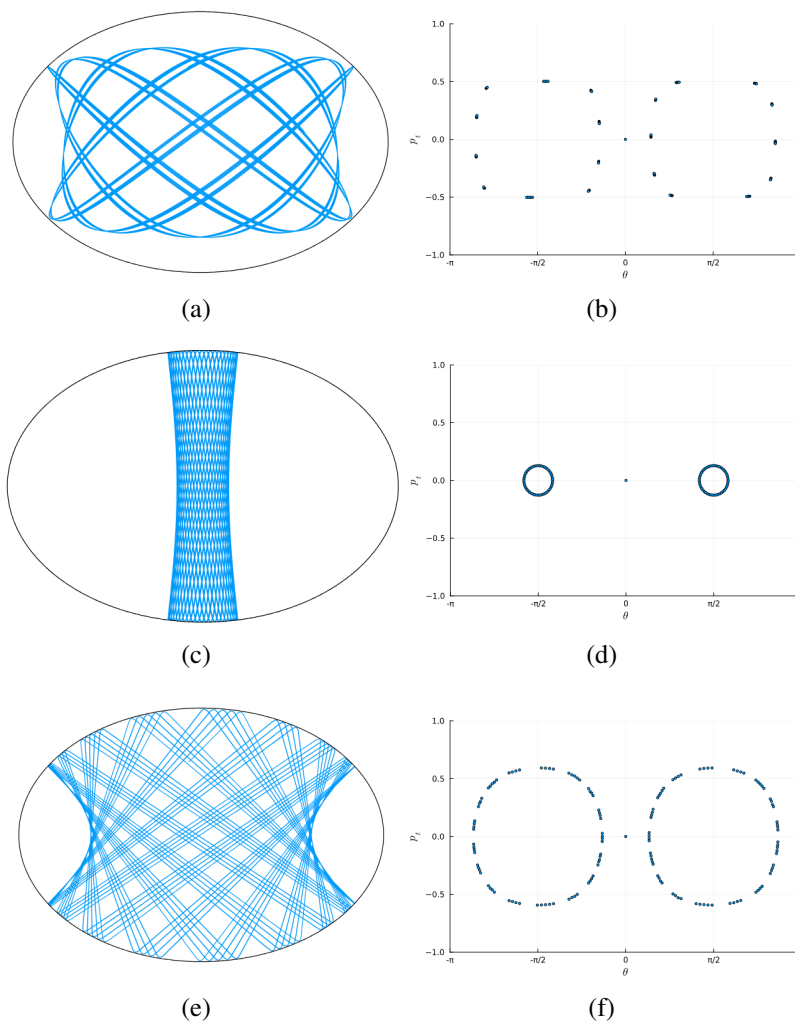


Figura 4.5: Ejemplos de billares elípticos suaves con sus mapas de Poincaré, con excentricidad $e = 0.72$ y energía $E = 0$. En (a) se muestra la trayectoria de una partícula en una mesa con dureza de $h = 1$, y (b) es su respectivo mapa. (c) es la trayectoria de la partícula en una mesa con dureza de $h = 3$, donde (d) es su respectivo mapa. En (e) la trayectoria tiene una dureza de $h = 20$ y (f) es su respectivo mapa. Las condiciones iniciales se muestran en la tabla 4.1

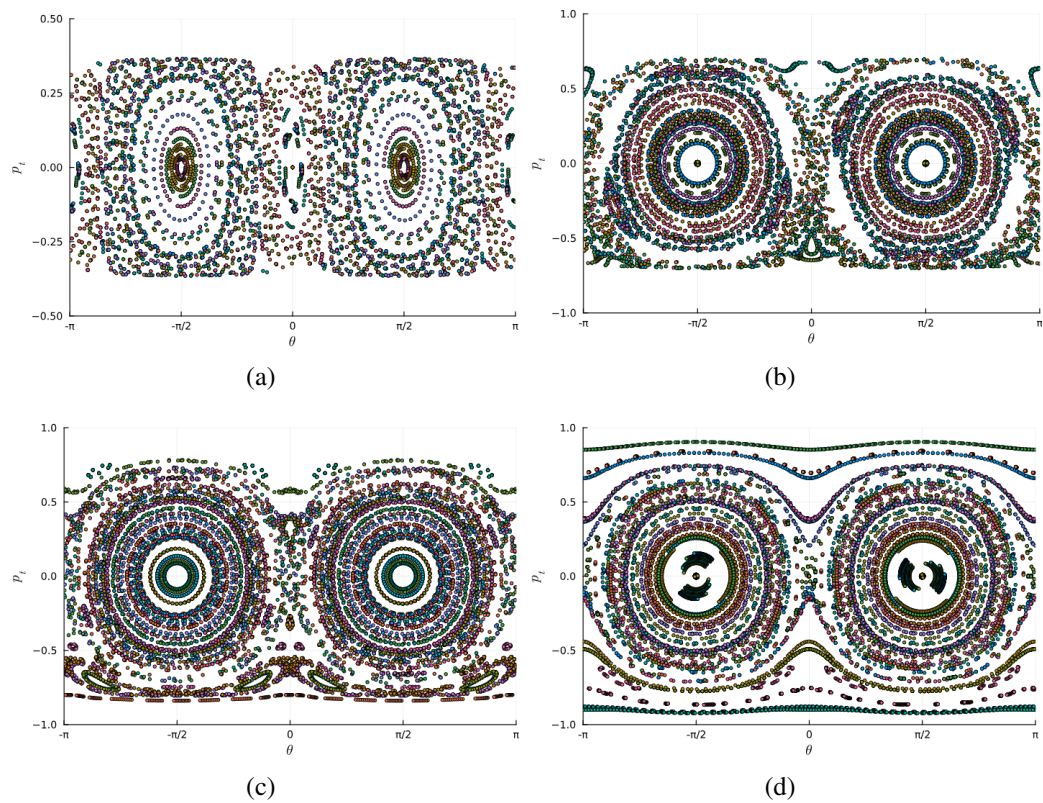


Figura 4.6: Mapas de Poincaré para diferentes condiciones iniciales y valores de dureza; donde la mesa de billar tiene una excentricidad $e = 0.72$. En (a) $h = 0.5$, en (b) $h = 2.5$, en (c) $h = 6$ y en (d) $h = 18$, en todos los casos la energía es $E = 0$.

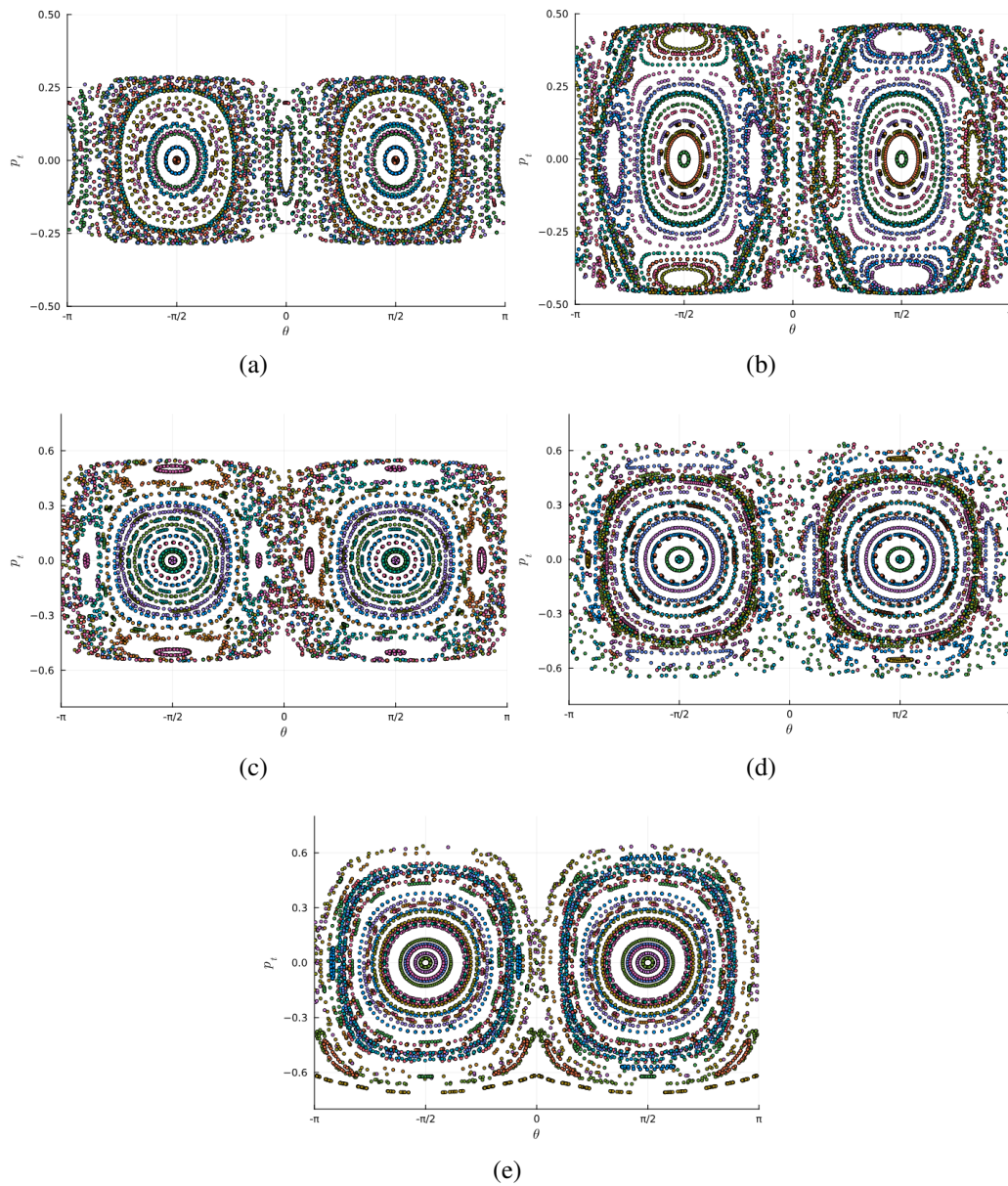


Figura 4.7: Mapas de Poincaré para diferentes condiciones iniciales y valores de dureza; donde la mesa de billar tiene una excentricidad $e = 0.84$. En (a) $h = 0.5$, en (b) $h = 1.5$, en (c) $h = 2.5$, en (d) $h = 6$ y (e) $h = 18$, en todos los casos la energía es $E = 0$.

Capítulo 5

Billar Triangular

El interés del billar triangular viene de su equivalencia con el movimiento de 3 partículas en un anillo, donde la forma de la frontera triangular está relacionada con las masas de las partículas [27]. Además, estos billares muestran propiedades de interés para la teoría ergódica [10], donde algunas se pueden ver a través de un mapa de Poincaré. El suavizar el billar triangular con un potencial, implica que las 3 partículas del anillo interactúan entre ellas. Por lo que resolver un billar triangular suave es equivalente a resolver la dinámica de 3 cuerpos. En esta sección se analiza la dinámica del billar triangular, tanto el de paredes duras como el de paredes suaves y comparar resultados de ambos casos, haciendo uso de lo visto en el capítulo 4.

5.1. Billar triangular duro

Para poder analizar el billar triangular, es necesario definir la frontera. Debido a las esquinas, es necesario definir la mesa de billar con una frontera por partes, esta es

$$\partial\mathcal{D}_{tri} = \{(x, y) : y = 0, y = m_1x, y = m_2x + y_1\}, \quad (5.1.1)$$

y la mesa de billar, \mathcal{D}_{tri} , serían todos los puntos contenidos por la frontera. Este modelo lo que contempla es a una partícula moviéndose dentro de la frontera, como partícula libre, que choca con ellas de manera especular, esto es, el ángulo con el que la partícula incide a la frontera es el mismo con el que se refleja. Con esto, la velocidad después de impactar, \vec{v}_f , en términos de la velocidad antes de impactar, \vec{v}_i , es

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i - 2(\vec{v}_i \cdot \hat{N})\hat{N}, \quad (5.1.2)$$

donde \hat{N} es el vector perpendicular a la frontera en el punto de colisión.

Ya que la frontera está definida por líneas rectas de la forma $f(x, y) = y - mx - b = 0$, un vector normal a la frontera es

$$\hat{N} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{-1}{\sqrt{m^2 + 1}}\langle -m, 1 \rangle. \quad (5.1.3)$$

Puede observarse que el vector es constante para cada línea, por lo que una misma velocidad incidente tendrá el mismo ángulo de reflexión en toda la línea.

La frontera $\partial\mathcal{D}_{tri}$ cuenta con 3 esquinas, puntos donde no es diferenciable. En un billar, la trayectoria de una partícula está definida para todo t , siempre y cuando las condiciones iniciales estén dentro de la mesa de billar, excepto en 2 ocasiones, cuando la partícula colisiona con una esquina; o cuando los tiempos de colisión $\{t_n\}$ tienen un punto de acumulación [5]. Todas las colisiones con la frontera, exceptuando las 3 esquinas, son regulares, esto es, la velocidad de la partícula no es tangente a la frontera.

La trayectoria de una partícula en una mesa de billar triangular se resolvió por medio de un código mostrado en el apéndice A. El código resuelve las ecuaciones canónicas de manera numérica, y cada punto arrojado es evaluado en una función que determina si la partícula continúa dentro de la mesa de billar. Una vez se detecte que la partícula tocó la frontera, otra función será la encargada de modificar la velocidad de acuerdo con 5.1.2, que en conjunto con su nueva posición, forman las nuevas condiciones iniciales con las que el programa resuelve de nuevo las ecuaciones canónicas. Este proceso se repite hasta que cumpla con el número de colisiones dadas por el usuario. En la figura 5.1 se muestran ejemplos con colisiones regulares.

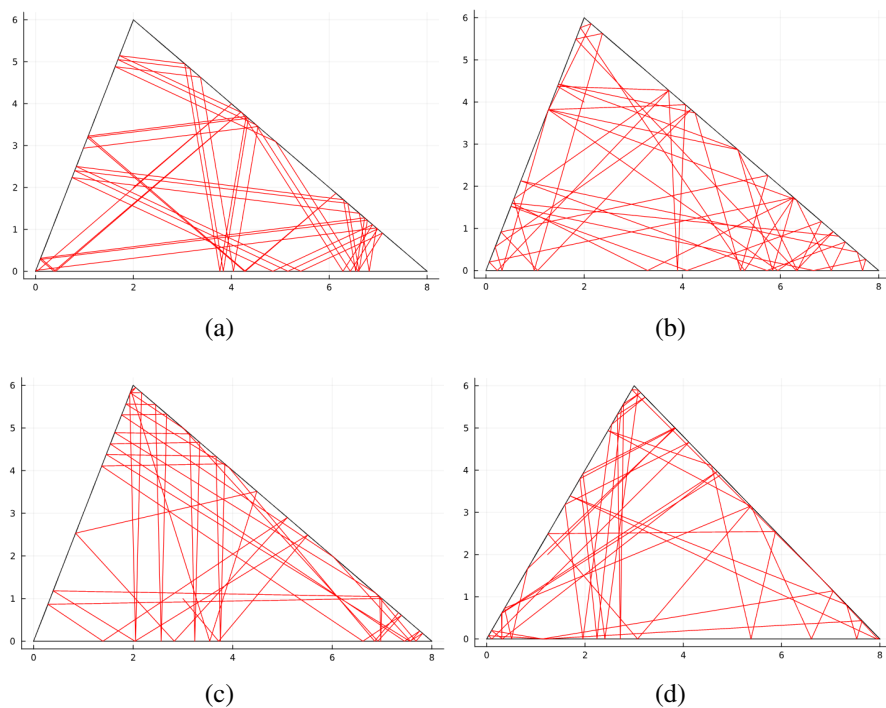


Figura 5.1: Billares triangulares para diferentes condiciones iniciales. La frontera de los 4 casos está definida por 3 ángulos: $\alpha = 1.249$, $\beta = 1.11$ y $\gamma = 0.7854$. Las condiciones iniciales se muestran en la tabla 5.1. En todos los casos se tienen 50 colisiones para una mejor visualización de las trayectorias.

A pesar de que en la figura 5.1(d) pareciese que la trayectoria toca una de las esquinas, la realidad es que esto no ocurre; una apreciación más de cerca puede comprobar esto. Ade-

	x	y	p_x	p_y
(a)	2.0	2.0	6.963692	6.930461
(b)	2.0	4.0	-6.72	4.6154
(c)	3.0	1.0	5.654514	-7.873487
(d)	1.2401643076923081	2.0	5.963692	6.930461

Tabla 5.1: Condiciones iniciales de los billares de 5.1

más, el programa no toma en cuenta más que colisiones regulares; las colisiones con las esquinas quedan descartadas por el programa porque en ellas la posición de la partícula no es diferenciable, y dado que solamente son posibles en 3 puntos exactos, la probabilidad de que una trayectoria pase por esos puntos es baja. De igual forma, no se toman en cuenta las colisiones completamente tangentes a la frontera, pues este tipo de colisiones son incapaces de generar nuevas condiciones iniciales para continuar con el proceso de la solución de las ecuaciones canónicas.

Es posible encontrar trayectorias periódicas, esto es, trayectorias que regresan al mismo punto después de una cantidad de colisiones con la frontera. Por lo que la sección de Poincaré se debe ver una cantidad fija de puntos una vez se complete se regrese al punto inicial. En la figura 5.2 puede observarse que a la onceava colisión la trayectoria es perpendicular a la frontera, por lo que la partícula regresa sobre la misma trayectoria; de hecho, la diferencia entre (b) y (c) es una línea recta horizontal. En la colisión 23 la trayectoria vuelve a ser perpendicular a la frontera, y de nuevo la partícula regresa sobre la misma trayectoria, razón por la que a la colisión 250, la trayectoria no se diferencia mucho de (b) y (c).

Como se mencionó anteriormente, el modelo del movimiento de 3 partículas en un anillo tiene una equivalencia con un billar triangular [11], en la figura 5.3 se muestran representaciones de ambos sistemas. Al calcular la energía total del sistema, tomando en cuenta que estas no interactúan entre ellas, se obtiene la energía cinética de 3 partículas, que se puede reescribir como la energía cinética de una única partícula con velocidad $\vec{W} = u_1\hat{e}_1 + u_2\hat{e}_2$. La mesa de billar cuenta con 3 lados, l_1 , l_2 y l_3 , con sus respectivas alturas h_1 , h_2 y h_3 , el vector \hat{e}_1 es paralelo a h_1 y \hat{e}_2 a l_1 . El vector \vec{W} puede rotarse por medio de una matriz, de modo que ahora tiene componentes paralelos a h_2 y l_2 . Como se sabe, la matriz de rotación depende de los ángulos, y se puede mostrar que estos dependen de las masas de las partículas. Los lados de la mesa de billar triangular, al igual que los ángulos, están definidos por los valores de las masas [27], de la forma

$$\tan \theta_1 = \sqrt{\frac{m_1 M}{m_2 m_3}}, \quad (5.1.4)$$

$$\tan \theta_2 = \sqrt{\frac{m_2 M}{m_1 m_3}}, \quad (5.1.5)$$

$$\tan \theta_3 = \sqrt{\frac{m_3 M}{m_1 m_2}}. \quad (5.1.6)$$

donde M es la masa total del sistema.

Se puede variar el valor de las masas para obtener diferentes ángulos. Por ejemplo, que

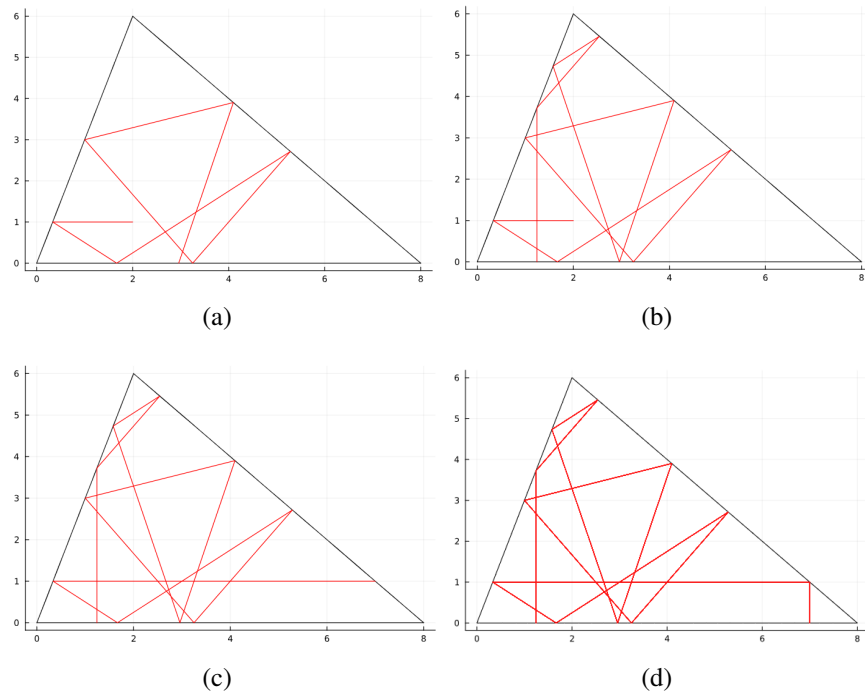


Figura 5.2: Billar triangular, donde la partícula tiene una trayectoria periódica. La frontera está definida por líneas rectas que se interceptan, con ángulos $\alpha = 1.249$, $\beta = 1.11$ y $\gamma = 0.7854$. En las cuatro imágenes, las condiciones iniciales son $(x, y, p_x, p_y) = (2.0, 1.0, -6.9636923076923072, 0.0)$, donde (a) son 7 colisiones, en (b) son 11, en (c) son 22 y en (d) son 250.

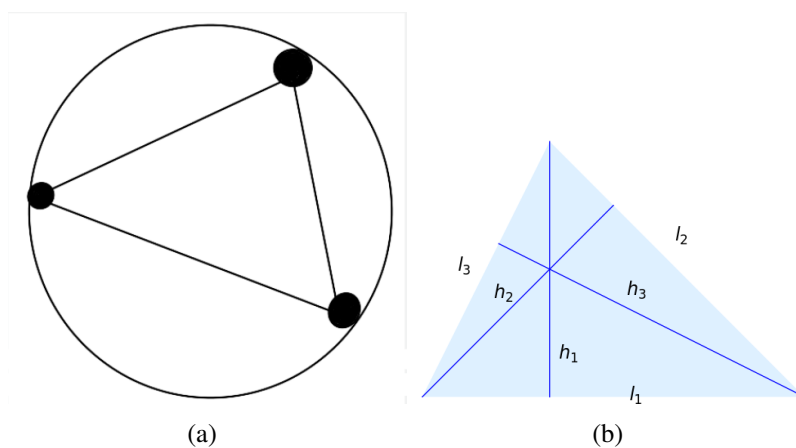


Figura 5.3: (a) Tres partículas en un anillo y (b) la mesa de billar a la que es equivalente.

	$x,$	y	p_x	p_y
(a)	3	3	-15	4
(b)	0.891500	3.4151548	15.148480	10.4891
(c)	2	1	3.148480	6.148480
(d)	0.818618	1	-6.148480	0.0

Tabla 5.2: Condiciones iniciales de los billares de 5.4

uno de los ángulos sea $\frac{\pi}{2}$, que podría ser θ_2 , por lo que

$$\tan \theta_2 = \tan \frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{m_2 M}{m_1 m_3}} \rightarrow \infty, \quad (5.1.7)$$

de modo que o $m_1 = 0$ o $m_3 = 0$, en cualquier caso, esto llevaría a que uno de los otros ángulos restantes sea cero y otro $\frac{\pi}{2}$. Entonces, este dejaría de ser un billar triangular y sería el movimiento de 2 partículas sobre una línea [5].

Podría parecer que es imposible construir un triángulo rectángulo porque cuando un ángulo es de $\frac{\pi}{2}$, uno de los 2 restantes es forzado a ser cero y otro a ser también $\frac{\pi}{2}$. Sin embargo, tomando en cuenta la relación de la masa con los ángulos, se tiene que

$$\cot \theta_2 \cot \theta_3 = \frac{m_1}{M}, \quad (5.1.8)$$

$$\cot \theta_1 \cot \theta_3 = \frac{m_2}{M}, \quad (5.1.9)$$

$$\cot \theta_1 \cot \theta_2 = \frac{m_3}{M}, \quad (5.1.10)$$

entonces, de nuevo, siendo $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, lleva a que o $m_1 = 0$ o $m_3 = 0$, en cualquier caso, se termina con que

$$\cot \theta_1 \cot \theta_3 = \frac{m_2}{M},$$

lo cual permite elegir arbitrariamente valores para θ_1 y θ_3 manteniendo el hecho de que $\theta_1 + \theta_3 = \frac{\pi}{2}$.

En caso de que suponga que $m_2 \rightarrow \infty$ se llega a la misma conclusión, que el movimiento de las tres partículas, ahora es el movimiento de 2 partículas en una línea. Esto porque al m_2 ser muy grande, necesitará una energía cinética grande para moverse, cosa que no pasa con m_1 y m_3 . Entonces estas dos serían las únicas que se moverían, pero sin poder completar el movimiento en el anillo debido a que m_2 se interpondría en el camino.

Si bien las trayectorias de las partículas en las mesas de billar ayudan a visualizar su movimiento, el mapa de Poincaré muestra en mejor medida el movimiento de la partícula. En la siguiente sección se muestran diferentes billares para triángulos con ángulos múltiplos racionales e irracionales de π .

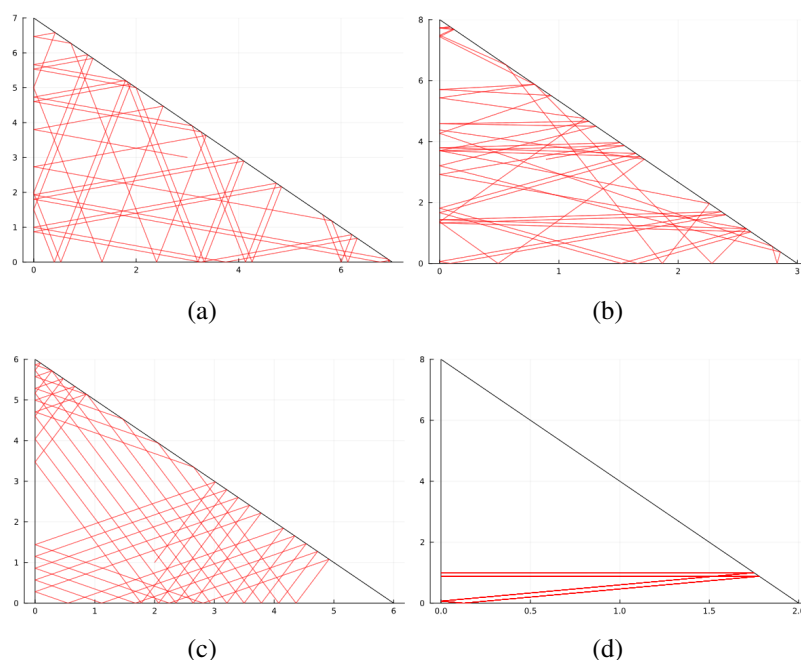


Figura 5.4: Ejemplos de billares cuya mesa es un triángulo rectángulo. Las condiciones iniciales para cada billar se muestran en la tabla 5.2. Todos los casos con 50 colisiones con la frontera.

5.2. Mapa de Poincaré

Para un mapa de Poincaré de un billar duro, se toma en cuenta la longitud de arco y el momento tangente a la frontera. Para el billar elíptico, las coordenadas usadas fueron el ángulo polar y el momento tangente del punto de colisión, pero para el ángulo polar es necesario establecer un punto de referencia para medirlo. En el caso de la longitud de arco, no es necesario un punto de referencia, por lo que se puede aplicar a diferentes triángulos.

La mesa de billar está formada por líneas rectas, por lo que la longitud de arco por cada pared de la frontera, es

$$s = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt = \int_a^x \sqrt{1 + m^2} dt = \sqrt{1 + m^2}(x - a). \quad (5.2.1)$$

El problema es que la longitud de arco no toma en cuenta la dirección de la recta, no sabe si esta crece o decrece. Para esto, hay que definir un sentido de las mediciones, que será en sentido antihorario, al igual que para la medición del momento tangente, tomando al origen como el punto de inicio para las mediciones.

Para calcular el momento tangente es necesario un vector tangente a la frontera. El vector que dibuja una línea recta es

$$\vec{r} = \langle x, y \rangle = \langle x, mx + b \rangle,$$

por lo que

$$\hat{T} = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} \langle 1, m \rangle \quad (5.2.2)$$

es un vector tangente a una recta. Como la frontera se forma por 3 rectas, es necesario usar 3 vectores tangentes.

En la figura 5.5 se muestran los mapas de Poincaré de distintos billares presentados en la sección anterior. Para un billar de paredes duras, como el circular o el elíptico, la forma del mapa es regular. Para la mesa de billar triangular rectangular, el mapa sí es regular, porque muestra líneas rectas, pero para el otro billar triangular las líneas desaparecen.

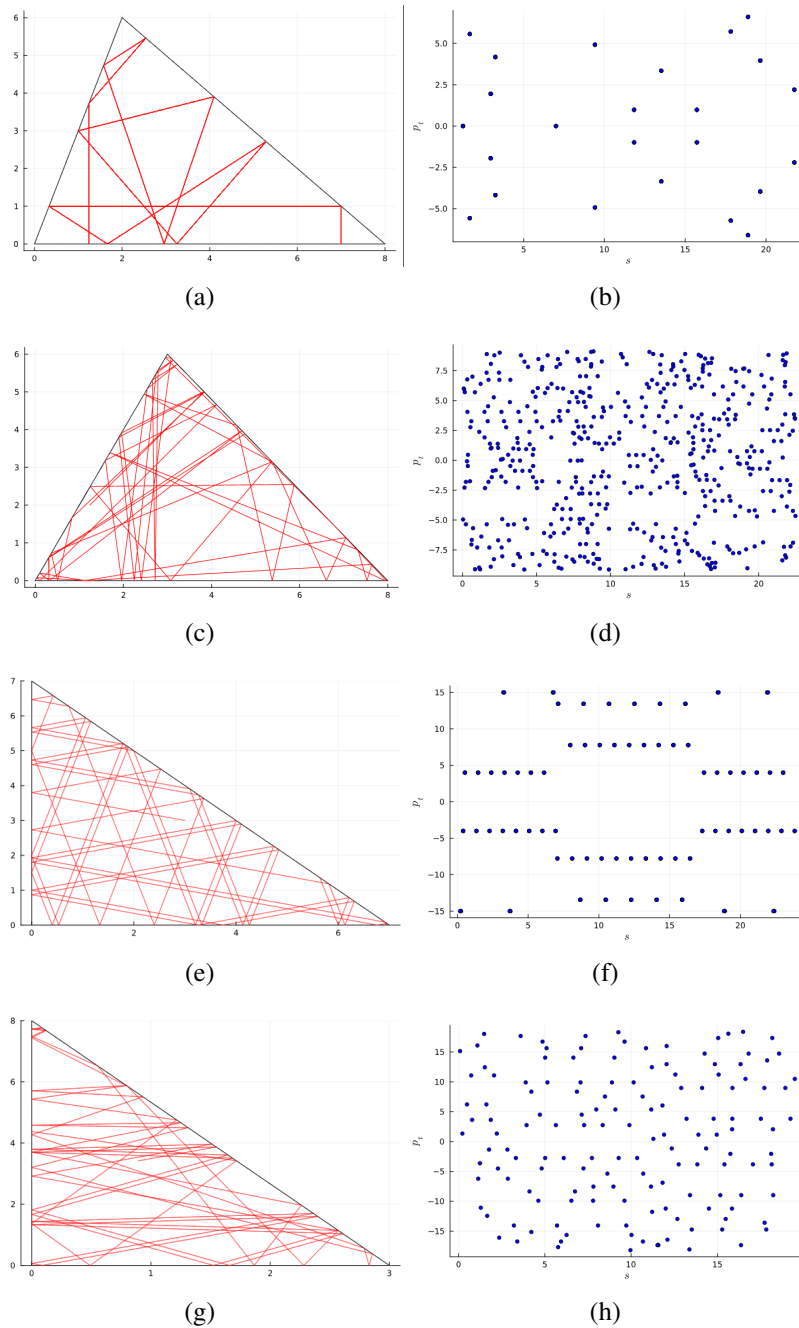


Figura 5.5: Billares triangulares con sus respectivos mapas de Poincaré, donde los mapas contemplan 500 colisiones con la frontera.

La importancia del billar triangular radica en su equivalencia con el movimiento de 3 masas, porque si es ergódico, entonces el sistema de 3 cuerpos sin interacción también lo debe ser, esto es, los promedios del espacio fase son los mismos que el promedio temporal [18]. Si bien se menciona como corolario que un sistema mecánico de dos masas puntuales elásticas sobre una línea es típicamente ergódico [10], en la figura 5.5 (f) y (h) muestran regularidad en el espacio fase, pero esto no es suficiente para determinar si el sistema es ergódico o no. En la referencia [28] se analiza la ergodicidad de billares triangulares rectangulares con ángulos múltiplos irracionales de π , concluyendo que estos son ergódicos, sin tener como foco central el mapa de Poincaré.

Las mesas de billar que son triángulos rectángulos irracionales no son los únicos polígonos que permiten la ergodicidad; es posible la existencia de billares poligonales ergódicos diferentes cuando el ángulo de sus esquinas son múltiplos irracionales de π [29]. Existen, también, mesas de billar triangulares elongadas tales que el billar es un sistema mezclado, y por lo tanto, es ergódico [30]. De igual manera, en [31] se muestra que un billar triangular donde todos los ángulos de la mesa de billar son irracionales, es un sistema mezclado. En el presente trabajo no se demostrarán las propiedades ergódicas de los billares triangulares. Sin embargo, se muestran los mapas de Poincaré para mesas de billar con ángulos irracionales.

En la figura 5.6 se muestran los billares y sus respectivos mapas de Poincaré para una mesa triangular con todos los ángulos múltiplos irracionales de π , y una mesa triangular rectangular con 2 ángulos múltiplos irracionales de π , donde ambos son ergódicos [32].

	x	y	p_x	p_y
(a)	3.240164	2.0	5.963692	6.930461
(b)	2.18618	1	-61.48480	3.0

Tabla 5.3: Condiciones iniciales de los billares mostrados en la figura 5.6

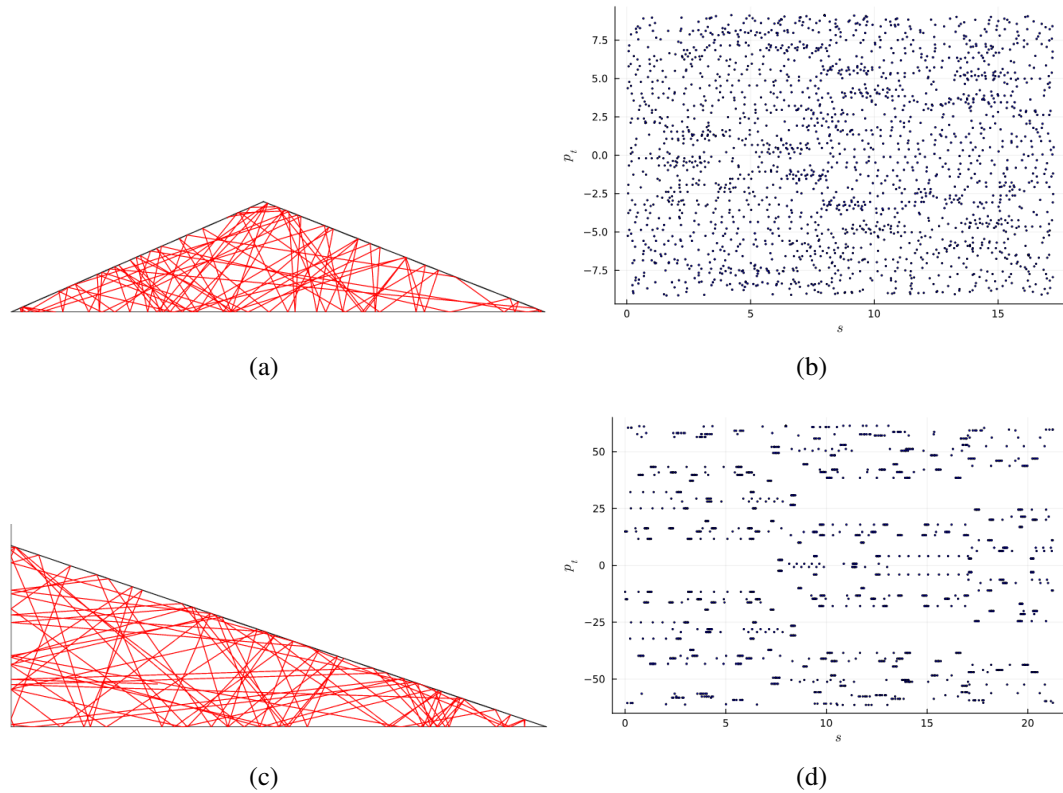


Figura 5.6: Billares triangulares, donde (a) tiene una mesa de billar con todos sus ángulos irracionales ($\alpha = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$, $\beta = \frac{\pi(4-\sqrt{2})}{16}$ y $\gamma = \frac{\pi(12-\sqrt{2})}{16}$), con 100 colisiones con la frontera. Mientras que (b) es su respectivo mapa de Poincaré, pero tomando en cuenta 10000 colisiones. Para (c), la mesa es un triángulo rectángulo con 2 ángulos irracionales ($\alpha = \frac{\pi(\sqrt{5}-1)}{8}$, $\beta = \frac{\pi(5-\sqrt{5})}{8}$ y $\gamma = \frac{\pi}{2}$), con 100 colisiones a la frontera. Mientras que (d) es su respectivo mapa de Poincaré con 10000 colisiones. Las condiciones iniciales se muestran en la table 5.3

5.3. Billar triangular suave

Al igual que el billar elíptico, el billar triangular de paredes duras puede suavizarse al agregar un potencial suave. Sin embargo, el significado de tal sistema va más allá de una partícula moviéndose dentro de una frontera. El billar triangular es equivalente al movimiento de 3 partículas no interactuantes en un anillo, de modo que la función hamiltoniana que describe el sistema es

$$H = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \delta(l_2 - l_1) + \delta(l_3 - l_2) + \delta(l_1 - l_3 + L), \quad (5.3.1)$$

donde l_i son las longitudes de arco de la partícula i y donde L es la circunferencia del anillo. Como se sabe [27], la energía cinética de las 3 partículas se puede reducir a la de una sola, tal que

$$H = T + \delta(l_2 - l_1) + \delta(l_3 - l_2) + \delta(l_1 - l_3 + L), \quad (5.3.2)$$

donde las funciones delta representan las colisiones entre partículas, pues no pueden ocupar el mismo espacio al mismo tiempo. En la equivalencia con el modelo de un billar triangular, una colisión entre partículas equivale a una colisión de una partícula con la frontera por el cambio en las velocidades.

En el caso del billar elíptico, suavizarlo implicaba agregar un potencial a la función hamiltoniana de la partícula. En el caso del billar triangular no es diferente, a la función hamiltoniana de una partícula en una frontera triangular $\partial\mathcal{D}_{tri}$ se le agrega un potencial que contempla la ecuación de la frontera. El problema es que la frontera está definida por 3 líneas rectas que son las paredes, por lo que debe haber 3 potenciales, uno por cada pared.

Los tres potenciales en H , que suavizan cada pared, tienen una interpretación en el sistema de 3 partículas y es que hay una interacción suave entre ellas, no únicamente las colisiones. La interacción entre ellas debe depender de los parámetros de dureza porque son los que causan la transición a un billar de paredes duras; esto es, los potenciales deben convertirse en deltas en la transición de billar suave a billar duro. Cada pared tiene su propio parámetro de dureza, por lo que

$$H = T + V_{12} \left(\frac{l_2 - l_1}{h_{12}} \right) + V_{23} \left(\frac{l_3 - l_2}{h_{23}} \right) + V_{13} \left(\frac{l_1 - l_3 + L}{h_{13}} \right), \quad (5.3.3)$$

Donde h_{ij} es el parámetro de la dureza para la pared del potencial. La forma de esta función hamiltoniana fue analizada en [33], donde se propone que

$$H = T + V_{12}(-y) + V_{23} \left(\frac{h_{12}}{h_{23}}(ay - bx) \right) + V_{13} \left(\frac{h_{12}}{h_{31}}(cy + bx) - \frac{L}{h_{31}} \right), \quad (5.3.4)$$

tal que

$$\gamma_{ij} = \frac{m_i}{m_j} \quad (5.3.5)$$

y

$$a = \frac{1}{1 + \gamma_{21}}, \quad (5.3.6)$$

$$b = a \sqrt{\frac{\gamma_{21} + \gamma_{31} + 1}{\gamma_{32}}}, \quad (5.3.7)$$

$$c = a\gamma_{12}. \quad (5.3.8)$$

De la ecuación 5.3.4 puede notarse que los parámetros de dureza no cambian los valores de los ángulos de la mesa de billar, pero sí afectan la dinámica de una partícula en esta; lo único que cambia los ángulos son las masas del sistema equivalente de tres partículas.

Una de las propuestas para potencial que se puede agregar a la función hamiltoniana es la función error, de modo que

$$H = T + \text{erf}(-y) + \text{erf} \left(\frac{h_{12}}{h_{23}}(ay - bx) \right) + \text{erf} \left(\frac{h_{12}}{h_{31}}(cy + bx) - \frac{L}{h_{31}} \right). \quad (5.3.9)$$

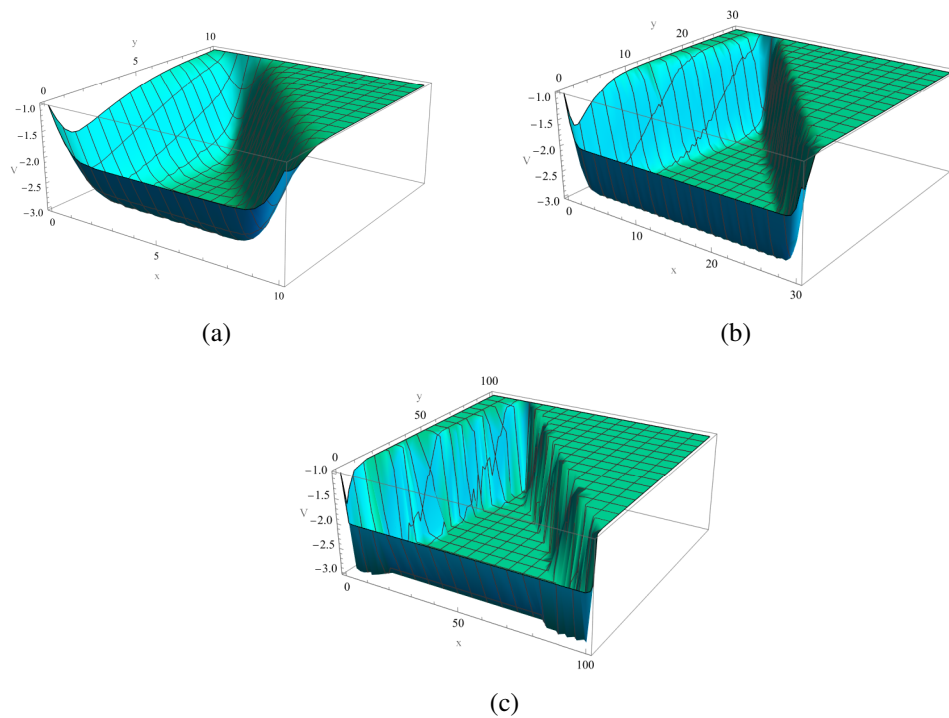


Figura 5.7: Potenciales para un billar triangular, con $\gamma_{21} = 5.0$, $\gamma_{31} = 1.0$ y $\gamma_{32} = 0.2$. Donde (a) tiene $L/h_{31} = 10$, (b) $L/h_{31} = 30$ y (c) $L/h_{31} = 100$.

En la figura 5.7 se muestra la forma del potencial con diferentes valores de la dureza. Es fácil notar que conforme va aumentando el valor de L/h_{31} , el billar tiende a ser uno de paredes duras.

El siguiente paso es obtener la trayectoria de la partícula en una mesa de billar a partir de las ecuaciones de movimiento. Usando las ecuaciones canónicas se tiene que

$$\dot{x} = p_x, \tag{5.3.10}$$

$$\dot{y} = p_y, \tag{5.3.11}$$

de esta forma también

$$\dot{p}_x = \frac{2bh_{12}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{h_{23}} \exp \left[-\frac{h_{12}^2}{h_{23}^2} (ay - bx)^2 \right] - \frac{1}{h_{31}} \exp \left[-\left(\frac{h_{12}}{h_{31}} (cy + bx) - \frac{L}{h_{31}} \right)^2 \right] \right] \tag{5.3.12}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_y = & -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-y^2) - \frac{2ah_{12}}{h_{23}\sqrt{\pi}} \exp \left[-\left(\frac{h_{12}}{h_{23}} (ay - bx) \right)^2 \right] \\ & - \frac{2ch_{12}}{h_{31}\sqrt{\pi}} \exp \left[-\left(\frac{h_{12}}{31} (cy + bx) - \frac{L}{h_{31}} \right)^2 \right]. \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

El problema es que no se pueden definir condiciones iniciales a partir de la energía del sistema de la misma manera que se hizo con el billar elíptico suave. Para definir las condiciones iniciales en un código, es necesario saber la forma de la equipotencial, para cada

valor de la energía hay una equipotencial. El problema radica en que la función error inversa no actúa sobre cada potencial, sino que actúa sobre la suma de potenciales, y esto no da las líneas que forman la frontera.

Existe una parametrización de un triángulo, que es de la forma

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3) = 0.1667, \quad (5.3.14)$$

tomada de la referencia [34], que se puede meter en una función error. Este potencial sería de la forma

$$V(x, y) = \operatorname{erf}\left(h\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3) - 0.1667\right)\right). \quad (5.3.15)$$

En la figura 5.8 se muestra este potencial para diferentes valores de la dureza h . De este potencial, las equipotenciales son triángulos, y con él es posible trabajar de una manera más sencilla con métodos numéricos convencionales. Un inconveniente es que se estaría trabajando con un triángulo específico.

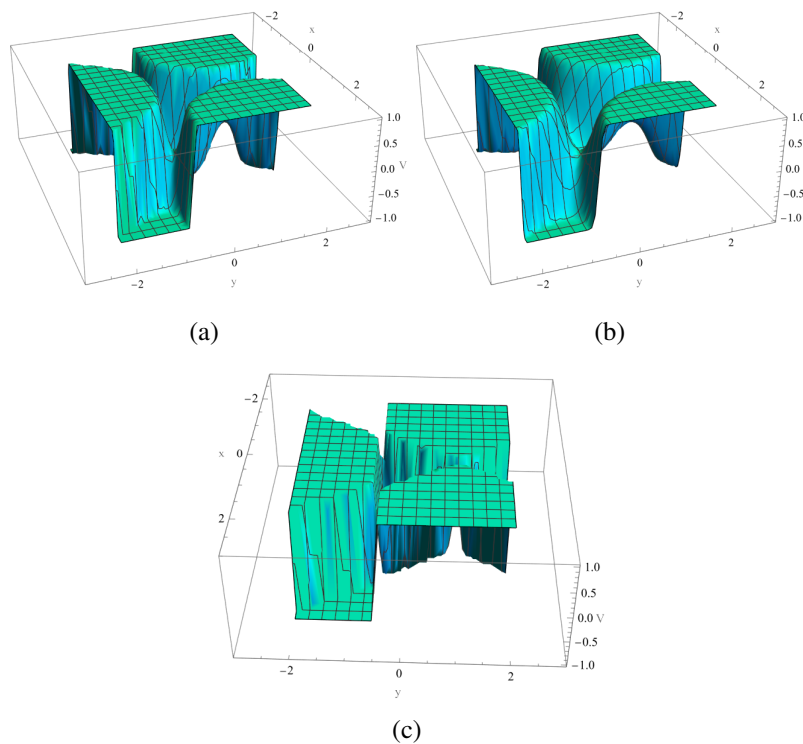


Figura 5.8: Potencial función error para diferentes durezas. Donde (a) tiene $h = 3.5$, (b) tiene $h = 10$ y (c) tiene $h = 100$.

Conclusiones

En este trabajo se pudo resolver las ecuaciones de movimiento de un billar elíptico suave, determinar la trayectoria de una partícula en la mesa de billar y sus respectivos mapas de Poincaré. Además, se pudo determinar la trayectoria para una partícula en una mesa de billar triangular, para diferentes valores de ángulos, y los mapas de Poincaré asociados a estas trayectorias. Y además se determinaron las ecuaciones de movimiento de un billar triangular suave.

Se concluye que, al observar los mapas de Poincaré para el billar elíptico suave, el movimiento caótico, por la sensibilidad en las condiciones iniciales, aparece en ciertas regiones, regiones que se modulan por medio del parámetro h , pues para valores específicos de este es que aparece y desaparece la regularidad, prevaleciendo el caos para valores pequeños de h , pues a valores grandes la regularidad en el espacio fase va apareciendo, confirmando los resultados mostrados en la referencia [12]. Además, se concluye que es posible la existencia de islas de estabilidad en el mapa que disminuyen el caos en este, pues ocupan área que debería corresponder a un movimiento caótico, confirmando las afirmaciones de la referencia [12]. También se puede observar que el movimiento caótico tiene una dependencia en la forma de la frontera, pues para ciertos valores de la excentricidad es que aparecen más islas en las secciones de Poincaré, reduciendo el movimiento caótico.

También se concluye que es posible perder la regularidad del espacio para el billar triangular duro; la aparición o pérdida de la regularidad depende de los ángulos. Es bien sabido que en billares duros la dinámica depende completamente de la geometría de la frontera; no es común que se pierda completamente la regularidad en el espacio fase por el cambio de esta. Los billares con ángulos múltiplos irracionales de π son aquellos con menor regularidad en su espacio fase, lo que concuerda con sus propiedades ergódicas mencionadas en la literatura consultada en este trabajo.

En el caso del billar triangular suave, que cada potencial sea en función de uno de los lados de la frontera de la mesa de billar, implica que, en el modelo de 3 partículas, hay una interacción por pares entre cada una de las partículas, lo que se asemeja a un problema de los 3 cuerpos clásico.

El trabajo realizado en este documento es una introducción para el estudio de un billar triangular suave con la parametrización mostrada en 5.8, y para el estudio de caos cuántico en polígonos triangulares con ángulos múltiplos irracionales de π [32].

Apéndice A

Códigos

```
[ ]: using DifferentialEquations
[ ]: using Plots
[ ]: using LinearAlgebra
[ ]: using LaTeXStrings

[ ]: function billareliptico(du,u,p,t)#ecuaciones de movimiento con p=(h,b)
    u=[x,y,px,py]
    du[1]=u[3]#dx/dt=py
    du[3]=(-4*p[1]*u[1]/sqrt()) * exp(-p[1]^2 * (u[1]^2 + u[2]^2/p[2]^2 - u
    u[1]^2)#dp/dt
    du[2]=u[4]#dy/dt=py
    du[4]=(-4*p[1]*u[2]/(p[2]^2 * sqrt())) * exp(-p[1]^2 * (u[1]^2 + u[2]^2/
    p[2]^2 - 1)^2)#dpy/dt
end

[ ]: function Vxy(x,y,p)#p=(h,b)
    potencial=erf(p[1] * (x^2 + y^2/p[2]^2 - 1))
    return potencial
end

[ ]: function printbillarelip(a,b)#Función para pintar la frontera del billar
    elíptico
    paso=range(0,stop=2 , length=1000)[2]
    coor=vcat(collect(paso:paso:2 -paso),paso)
    plot!(a.*cos.( coor),b.*sin.( coor),legend=false,aspect_ratio=
    equal,ticks=false,linewidth=:black,framestyle=:none)
end

[ ]: function E(u,V,p)#Energía del sistema con p=(h,b)
    energia=0.5*u[3] + 0.5*u[4] +Vxy(x,y,p)
    return energia
end
```

```
[ ]: function condiciones(y,E,p)#p=(h,b)
    b=p[2]
    h=p[1]
    a1=y^2 / b^2
    xm=sqrt(erfinv(E)/h -a1+1)
    x=rand(-xm:0.05:xm)
    pmax=sqrt(2*(E-Vxy(x,y,p)))
    px=rand(0.0:0.5:pmax)
    py=sqrt(2*(E-Vxy(x,y,p))- px^2)
    return [x,y,px,py]
end
```

```
[ ]: function colisiones(u,solt,p)
    solucion=reduce(vcat,[reshape(row,1,:) for row in u])#Acomoda la solución
    un en una matriz
    qx=solucion[:,1]
    qy=solucion[:,2]
    px=solucion[:,3]
    py=solucion[:,4]
    h=p[1]
    b=p[2]
    condicion, colision=[] for i=1:2]#arreglo vacío para guardar la solución
    colisiones=zeros(1,4)#matriz donde se guardan los puntos de colisión
    for i in 1:size(qx,1)
        magnitudn=sqrt(qx[i]^2 + (qy[i]/b)^2)
        n=[-qx[i], -qy[i]/b^2]/magnitudn
        p=[px[i],py[i]]
        condi=dot(p,n)
        append!(condicion,condi)
    end
    for k in 2:size(qx,1)
        if (condicion[k-1]*condicion[k]<0) && (condicion[k-1]<0)
            append!(colision,k)
        end
    end
    for l in 1:size(colision,1)
        colisiones=[colisiones; transpose(u[colision[l]])]
    end
    return colisiones
end
```

```
[ ]: function mapadepoincare(u,solt,p)
    choques=colisiones(u,solt,p)
    xc=choques[1:end,1]
    yc=choques[1:end,2]
    prc=choques[1:end,3]
    pyc=choques[1:end,4]
```

```

h=p[1]
b=p[2]
montan, angulo= [] for j=1:2]
for i in 1:size(xc,1)
    =0
    momento=[pxc[i],pyc[i]]
    t=[-yc[i],b* xc[i]]
    vectan=t
    pt=dot(momento,vectan)
    if xc[i]>0 && yc[i]>0
        += atan(yc[i]/xc[i])
    elseif xc[i]<0 && yc[i]>0
        += atan(yc[i]/xc[i])+ pi
    elseif xc[i]<0 && yc[i]<0
        += atan(yc[i]/xc[i])-pi
    elseif xc[i]>0 && yc[i]<0
        += atan(yc[i]/xc[i])
    end
    append!(montan,pt)
    append!(angulo, )

end
scatter!([angulo],[montan],ms=2,legend=false,xlabel=L"\theta",
ylabel=L"p_t",xticks=[- : /2: ;],[ "- ", "- /2", "0", " /2", " "])
ylims!(-1,1)
xlims!(-, )
end

```

```

[ ]: #Ejemplo de billar elíptico
h=2 ; b=0.6939740629158989
t=100
p=[h,b]
intervalo=(0.0,t)
e=0.0
CI=condiciones(0.4,e,p)
println(CI)
prob=ODEProblem(billareliptico,CI,intervalo,p)
sol=solve(prob,RK065(), dt=1e-5 + 1e-3*abs(Vxy(CI[1],CI[2],p)))
qx=[sol.u[i][1] for i in 1:length(sol.t)]
qy=[sol.u[i][2] for i in 1:length(sol.t)]
plot(qx,qy)
printbillarelip(1,0.6939740629158989)
#####
#En caso de querer el mapa de Poincaré, se toman como comentario las líneas
de plot y de printbillarelip
#y se quita el comentario a la línea de mapadepoincare
#mapadepoincare(sol.u,sol.t,p)

```

```
[ ]: #####
#####Código para un billar triangular#####
#####

[ ]: function part_lib!(du,u,p,t)#ecuaciones de movimiento que son un de partícula
    libre
    du[1]=u[3] #dx/dt=px
    du[2]=u[4] #dy/dt=py
    du[3]=0 #dpx/dt=0
    du[4]=0 #dpy/dt=0
end

[ ]: function printbillartri(A,B)#función que pinta la frontera tomando las esquinas
    b1=A[1]
    a1=A[2]
    m1=a1/b1
    a2=B[2]-A[2]
    b2=B[1]-A[1]
    m2=a2/b2
    b=A[2]-A[1]*m2
    f1(x)=m1*x
    f2(x)=b+m2*x
    f3(x)=0
    plot()
    plot(f1,0,A[1],lc=:black)
    plot!(f2,A[1],B[1],lc=:black)
    plot!(f3,0,B[1],lc=:black,legend=false,framestyle=:none)
    xlims!(0,B[1])
    ylims!(0,a1+5)
end

[ ]: function frontera1(x,y,A,B)#función que detecta si la partícula se encuentra
    dentro de la frontera
    b1=A[1]
    a1=A[2]
    m1=a1/b1
    a2=B[2]-A[2]
    b2=B[1]-A[1]
    m2=a2/b2
    b=A[2]-A[1]*m2
    y1=m1*x
    y2=m2*x+b
    if y>=0
        if 0<x && x<=A[1]
            y<=y1
        elseif A[1]<x && x<=B[1]
            y<=y2
        end
    end
end
```



```

        end
    elseif y<0
        y==1
    end
end
end

[ ]: function billares(CI,A,B) #Función que da la posición de colisión en un billar
    %triangular duro
    lapso=(0.0,1.0)
    prob=ODEProblem(part_lib!,CI,lapso)
    global sol=solve(prob,RK4(),saveat=0.0001) #resuelve las ecuaciones de
    %movimiento
    indice=0
    for i in 1:length(sol.t) #rutina que detecta cuándo la partícula salió de la
    %frontera
        if frontera1(sol.u[i][1],sol.u[i][2],A,B)==false
            indice=i-1
            break
        end
    end
    x=[sol.u[i][1] for i in 1:indice] #arreglos que dan la posición y momento de
    %la partícula dentro de la frontera
    y=[sol.u[i][2] for i in 1:indice]
    px=[sol.u[i][3] for i in 1:indice]
    py=[sol.u[i][4] for i in 1:indice]

    return x,y,px,py

end

[ ]: function especular!(u,A,B) #Función que me da la velocidad de reflexión en el
    %billar duro triangular
    m1=A[2]/A[1] #m1=(y2-y1)/(x2-x1) pero aquí y1=x1=0
    m2=A[2]/(A[1]-B[1]) #m2=(y3-y2)/(x3-x2) pero aquí y3=0
    n1=sqrt(m1^2 +1)
    n2=sqrt(m2^2+1)
    normal1=[-m1;1]/n1 #normal a la recta 1
    normal2=[-m2;1]/n2 #normal a la recta 2 se calcula sacando el gradiente de
    %y-mx=b
    normal3=[0;-1] #normal a la recta y=0
    vi=[u[3];u[4]] #velocidad inicial
    alpha1=2*dot(normal1,vi)
    alpha2=2*dot(normal2,vi)
    alpha3=2*dot(normal3,vi)
    if u[2]>0.01
        if u[1]<=A[1] && u[1]>0
            u[3]=-alpha1*normal1[1]

```

```

u[4]=-alpha1*normal1[2]
elseif A[1]<=u[1] && u[1]<B[1]
u[3]=-alpha2*normal2[1]
u[4]=-alpha2*normal2[2]
end
elseif u[2]<0.01
u[3]=-alpha3*normal3[1]
u[4]=-alpha3*normal3[2]
end
return u[3], u[4]
end

```

```

[ ]: function mapa2(u,A,B)#función que da el mapa de Poincaré
a=A[1]
b=A[2]
c=B[1]
m1=b/a#pendiente de una recta
m2=b/(a-c)#pendiente de una recta
l1=sqrt(a^2 + b^2)#longitud de arco de un lado de la frontera
l2=sqrt((c-a)^2 + b^2)#longitud de arco de un lado de la frontera
l3=c#longitud de arco de un lado de la frontera
p=[u[3],u[4]]#momento
vectang1=[1,m1]
norm1=norm(vectang1)
vectang2=[1,m2]
norm2=norm(vectang2)
if u[2]<0.01#s es la longitud de arco, ptan es el momento tangen a la
↳frontera
s=u[1]
ptan=dot([1,0],p)
elseif u[2]>0.01
if u[1]<a
l=sqrt(1 + m1^2) * u[1]
s=l1 - l + l2 + l3
ptan=-dot(p,vectang1)/norm1
elseif u[1]>a
l=sqrt(1 + m2^2) * (u[1] - a)
s=l2 - l + l3
ptan=-dot(p,vectang2)/norm2
end
end
scatter!([s],[ptan],mc=:blue,ms=1,legend=false,xlabel=L"s", ylabel=L"p_t")
end

```

```

[ ]: function evolucion(CI,A,B,N)#Función que obtiene todas las trayectorias de un
↳billar duro triangular

```

```

solver = RK4();
icolision = 0
qx , qy, px, py = billares(CI, A,B)#
u0 = [last(qx) , last(qy) , last(px) , last(py)]
println(u0)
icolision += 1
while icolision < N
    #mapa2(u0,A,B)
    especular!(u0, A,B)
    prob = ODEProblem(part_lib! , u0 , (0.0,1.0))
    sol = solve(prob, solver, saveat = 0.001)
    qx2 = [sol.u[i][1] for i in 1:length(sol.u)]
    qy2 = [sol.u[i][2] for i in 1:length(sol.u)]
    px2 = [sol.u[i][3] for i in 1:length(sol.u)]
    py2 = [sol.u[i][4] for i in 1:length(sol.u)]
    qx2 , qy2 , px2 , py2 = billares(u0,A,B)
    u0 = [last(qx2) , last(qy2) , last(px2) , last(py2)]
    append!(qx , qx2)
    append!(qy , qy2)
    append!(px , px2)
    append!(py , py2)
    qx2 , qy2 , px2 , py2 = billares(u0,A,B)
    append!(qx , qx2)
    append!(qy , qy2)
    append!(px , px2)
    append!(py , py2)
    u0 = [last(qx2) , last(qy2) , last(px2) , last(py2)]
    icolision += 1
end
#mapa2(u0,A,B)
plot!(qx,qy,lc=:red,legend=false)
#En caso de querer el mapa de poincaré se quita el comentario de la función
#mapa2 y se comenta la línea que grafica la trayectoria
end

```

```

[ ]: #####
#####Código para el billar triangular rectangular#####
#####

```

```

[ ]: function part_lib!(du,u,p,t)#ecuaciones de movimiento
    du[1]=u[3] #dx/dt=px
    du[2]=u[4] #dy/dt=py
    du[3]=0 #dpx/dt=0
    du[4]=0 #dpy/dt=0
end

```

```
[ ]: function printbilliard(A,B)#Función que pinta la frontera tomando los 3 puntos
    de la frontera.
    a=A[2]
    b=B[1]
    m=-a/b
    y(x)=a + m*x
    y1(x)=0
    plot(y,0,b,lc=:black,legend=false,framestyle=:none)
    ylims!(0,a)
    plot!(y1,0,b,lc=:black)
    vline!([0],lc=:black,framestyle=:none)
    xlims!(0,b)
    ylims!(0,b)
end

[ ]: function frontera(x,y,A,B)#función que detecta si la partícula está dentro de
    la frontera
    a=A[2]
    b=B[1]
    m=a/b
    y1=a - m*x
    if x>=0
        if y>=0
            y<=y1
        elseif y<0
            y==1
        end
    elseif x<0
        x==1
    end
end

[ ]: function billares(CI,A,B)#Función que da la posición de colisión de la
    partícula en la frontera
    lapso=(0.0,1.0)
    prob=ODEProblem(part_lib!,CI,lapso)
    global sol=solve(prob,RK4(),saveat=0.0001)#se resuelven las ecuaciones de
    movimiento
    indice=0
    for i in 1:length(sol.t)#rutina que detecta cuándo la partícula sale de la
    frontera
        if frontera(sol.u[i][1],sol.u[i][2],A,B)==false
            indice=i-1
            break
        end
    end
end
```

```

    x=[sol.u[i][1] for i in 1:indice]#arreglos que guardan la posición de la
    partícula dentro de la frontera
    y=[sol.u[i][2] for i in 1:indice]
    px=[sol.u[i][3] for i in 1:indice]
    py=[sol.u[i][4] for i in 1:indice]

    return x,y,px,py

end

```

```

[ ]: function especular!(u,A,B)#función que da la velocidad de reflexión
    m=(B[2]-A[2])/(B[1]-A[1])#pendiente de la hipotenusa
    n=m^2 + 1
    normal1=[-m;1]
    normal2=[-1;0]
    normal3=[0;-1]
    vi=[u[3];u[4]]#vector de velocidad
    alpha1=2*dot(normal1,vi)
    alpha2=2*dot(normal2,vi)
    alpha3=2*dot(normal3,vi)
    if u[2]<0.01
        u[3]-=alpha3*normal3[1]
        u[4]-=alpha3*normal3[2]
    elseif u[2]>0.01
        if u[1]<0.01
            u[3]-=alpha2*normal2[1]
            u[4]-=alpha2*normal2[2]
        elseif u[1]>0.01 && u[1]<B[1]
            u[3]-=alpha1*normal1[1]/n
            u[4]-=alpha1*normal1[2]/n
        end
    end
    end
    return u[3], u[4]
end

```

```

[ ]: function mapa2(u,A,B)#Función que da el mapa de Poincaré
    a=A[2]
    b=B[1]
    m=-a/b
    l1=a#longitud de un lado de la frontera
    l2=sqrt(a^2 + b^2)#longitud de un lado de la frontera
    l3=b#longitud de un lado de la frontera
    p=[u[3],u[4]]#vector de momento
    vectan1=[0,1]
    vectan2=[1,m]
    norm2=norm(vectan2)
    vectan3=[1,0]

```

```

    if u[2]<0.01#s es la longitud de arco del punto de colisión y montan es el
    ↪momento tangente a ese punto
        montan=dot(vectan3,p)
        s=u[1]
    elseif u[2]>0.01
        if u[1]<0.01
            montan=-dot(vectan1,p)
            s=l3 + l2 + l1 -u[2]
        elseif u[1]>0.01
            l=sqrt(1 + m^2) * (u[1])
            s=l3 + l2 - l
            montan=-dot(vectan2,p)/norm2
        end
    end
    scatter!([s],[montan],mc=:blue,ms=1,legend=false,xlabel=L"s", ylabel=L"p_t")
end

```

```

[]: function evolucion(CI,A,B,N)#Función que obtiene todas las trayectorias de un
    ↪billar trinagular rectangular
    solver = RK4();
    icolision = 0
    qx , qy , px , py = billares(CI, A,B)
    u0 = [last(qx) , last(qy) , last(px) , last(py)]
    println(u0)
    icolision += 1
    while icolision < N
        #mapa2(u0,A,B)
        especular!(u0, A,B)
        prob = ODEProblem(part_lib! , u0 , (0.0,1.0))
        sol = solve(prob, solver, saveat = 0.001)
        qx2 = [sol.u[i][1] for i in 1:length(sol.u)]
        qy2 = [sol.u[i][2] for i in 1:length(sol.u)]
        px2 = [sol.u[i][3] for i in 1:length(sol.u)]
        py2 = [sol.u[i][4] for i in 1:length(sol.u)]
        qx2 , qy2 , px2 , py2 = billares(u0,A,B)
        u0 = [last(qx2) , last(qy2) , last(px2) , last(py2)]
        append!(qx , qx2)
        append!(qy , qy2)
        append!(px , px2)
        append!(py , py2)
        qx2 , qy2 , px2 , py2 = billares(u0,A,B)
        append!(qx , qx2)
        append!(qy , qy2)
        append!(px , px2)
        append!(py , py2)
        u0 = [last(qx2) , last(qy2) , last(px2) , last(py2)]
        icolision += 1
    end

```

```
end
#mapa2(u0,A,B)
plot!(qx,qy,lc=:red,legend=:false)
#En caso de querer el mapa de poincaré se quita el comentario de la función
#mapa2 y se comenta la línea que grafica la trayectoria
end
```

[]:

Bibliografía

- [1] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical mechanics*. (American Association of Physics Teachers, (2002).
- [2] L. Landau and E. Lifshitz. *Mecánica*. Reverté, (1994).
- [3] J. B. Marion. *Classical dynamics of particles and systems*. (Academic Press, 2013).
- [4] S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. (CRC press, 2018).
- [5] N. Chernov and R. Markarian. *Chaotic billiards*. Number 127. (American Mathematical Soc., 2006).
- [6] Y. Sinai. On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics. 153(6):1261–1264, (1963).
- [7] L. A. Bunimovich. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. *Communications in Mathematical Physics*, 65:295–312, (1979).
- [8] R. Pathria. *Statistical mechanics*. (Elsevier, 2016).
- [9] R. Berkovitz, J. Frigg and F. Kronz. The ergodic hierarchy, randomness and hamiltonian chaos. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 37(4):661–691, 2006.
- [10] E. Gutkin. Billiards in polygons: Survey of recent results. *Journal of Statistical Physics*, 83:7–26, (1996).
- [11] A. A. González. *Modulación de caos en billares mediante un potencial suave en la frontera*. PhD thesis, Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, (2024).
- [12] T. Kroetz, H. A. Oliveira, J. S. E. Portela, and R. L. Viana. Dynamical properties of the soft-wall elliptical billiard. *Phys. Rev. E*, 94:022218, (2016).
- [13] A. Kaplan, F. Nir, A. Mikkil, and D Nir. Observation of islands of stability in soft wall atom-optics billiards. *Physical review letters*, 87(27):274101, (2001).
- [14] K. Nakamura. *Quantum chaos. A new paradigm of nonlinear dynamics*. (Cambridge, 1993).

- [15] M. Tabor. *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction*. (Wiley-Interscience, 1989).
- [16] D. Turaev and V. Rom-Kedar. Elliptic islands appearing in near-ergodic flows. *Nonlinearity*, 11:575–600, (1998).
- [17] J. M. Seoane and M. A. F. Sanjuán. New developments in classical chaotic scattering. *Reports on Progress in Physics*, 76(1):016001, (2012).
- [18] E. Ott. *Chaos in dynamical systems*. (Cambridge university press, 2002)g.
- [19] V. Rom-Kedar and D. Turaev. Big islands in dispersing billiard-like potentials. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 130(3):187–210, (1999).
- [20] D. Turaev and V. Rom-Kedar. Elliptic islands appearing in near-ergodic flows. *Nonlinearity*, 11(3):575–600, (1998).
- [21] D.G. Zill. *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera*. (Cengage Learning, 2018).
- [22] F. J. Rodríguez. *Cálculo y métodos numéricos. Teoría, algoritmos y problemas resueltos*. (UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS, 2003).
- [23] R.H Enns and g.C. McGuire. *Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers*. Springer, (2001).
- [24] A. Rapoport, V. Rom-Kedar, and D. Turaev. Approximating multi-dimensional hamiltonian flows by billiards. *Communications in Mathematical Physics*, 272(3):567–600, (2007).
- [25] SciML. Differentialequations.jl documentation. <https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/stable/>, 2022. Accedido el 19 de enero de 2025.
- [26] M. V. Berry. Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular 'billiard'. *European Journal of Physics*, 2(2):91, (1981).
- [27] S. L. Glashow and L. Mittag. Three rods on a ring and the triangular billiard. *Journal of statistical physics*, 87:937–941, (1997).
- [28] R. Artuso, G. Casati, and I. Guarneri. Numerical study on ergodic properties of triangular billiards. *Phys. Rev. E*, 55:6384–6390, (1997).
- [29] E. Gutkin. Billiards in polygons. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 19(3):311–333, (1986).
- [30] G. Casati and T. Prosen. Triangle map: A model of quantum chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4261–4264, (2000).
- [31] G. Casati and Toma. Prosen. Mixing property of triangular billiards. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4729–4732, (1999).

-
- [32] C. Lozej, G. Casati, and T. Prosen. Quantum chaos in triangular billiards. *Phys. Rev. Res.*, 4:013138, (2022).
- [33] H. A. Oliveira, G. A. Emidio, and M. W. Beims. Three unequal masses on a ring and soft triangular billiards. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 22(2):026111, (2012).
- [34] M. Henon and C. Heiles. The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments. *Astronomical Journal*, 69, (1964).