



**UNIVERSIDAD  
AUTÓNOMA  
METROPOLITANA**  
Unidad Iztapalapa

---

División de Ciencias Básicas e Ingeniería  
Licenciatura en Física  
Proyecto Terminal II: Investigación teórica

## **El programa bootstrap de la matriz $S$ en sistemas fuertemente acoplados II**

Realizado por: **Francisco Javier Luján Alarcón**

Matrícula: **2183011843**

Para obtener el grado de: **Licenciatura en Física**

Asesor: **Dr. Bastarrachea Magnani Miguel Angel**

Asesor: **Dr. Hernández Rosas Luis Alberto**

Coordinador: **Dr. Maceda Santamaría Marco Antonio**

---

30 de enero de 2025  
Iztapalapa, Ciudad de México



# Índice general

<b>1. El método Bootstrap</b>	<b>7</b>
1.1. Bootstrap matemático . . . . .	7
1.1.1. El Principio de Módulo Máximo (MMP) . . . . .	8
1.1.2. Ejemplos y soluciones numéricas con Mathematica . . . . .	11
1.2. El Bootstrap de la matriz S . . . . .	13
1.2.1. Preliminares . . . . .	13
1.2.2. Partícula libre . . . . .	15
1.2.3. Un estado ligado . . . . .	16
1.2.4. Resonancias y estados ligados . . . . .	18
1.2.5. Dos o más estados ligados . . . . .	19
1.3. Aplicación e interpretación . . . . .	21
<b>2. El potencial de Yukawa</b>	<b>23</b>
2.1. El método BAM . . . . .	25
2.2. Solución analítica . . . . .	26

## Resumen

Este proyecto tiene como finalidad mostrar cómo el método de *Bootstrap* resulta útil para estudiar potenciales de interacción entre partículas, como lo es el potencial de Yukawa, permitiendo así formular un marco general para interacciones de ese tipo, es decir, con una estructura algebraica semejante. Para lograrlo, comenzaremos por la explicación puramente matemática en la que se expondrá una serie de conceptos referentes al análisis en variable compleja para comprender la implementación del método de *Bootstrap*. Se presentarán también, ejemplos sencillos para ilustrar la aplicación de la teoría matemática previamente expuesta, así como alternativas numéricas en el lenguaje simbólico *Mathematica* para corroborar los resultados. Posteriormente se explicará como usar la herramienta matemática en un problema físico y se ilustrará con ejemplos para sistemas de tres tipos: con un solo estado ligado, con dos o más estados ligados y con resonancias. De igual forma presentaremos el potencial de Yukawa, una manera analítica de obtener sus estados ligados y lo emplearemos como ejemplo para la implementación del método de *Bootstrap*.

# Introducción

Dentro de la física cuántica se han desarrollado diversas teorías para estudiar los cuatro tipos de interacciones que rigen la forma en la que se comporta la materia y la energía en el universo: fuerte, débil, electromagnética y gravitacional. Gracias a estas interacciones es que las partículas se relacionan para dar lugar a todos los fenómenos que observamos en la naturaleza.

El modelo estándar (Standard Model o SM por sus siglas en inglés) es un conjunto de teorías cuánticas de campos que clasifica a las partículas elementales en dos grupos: fermiones y bosones. Los fermiones son las partículas que forman la materia visible a nivel fundamental mientras que los bosones son las partículas que actúan como mediadoras de las interacciones. Cada tipo de interacción es abordada por una teoría distinta pero todas se basan en estudiar las interacciones producidas por el intercambio de partículas portadoras. En el caso de la interacción electromagnética, el fotón; para la interacción nuclear fuerte, los gluones y para la interacción nuclear débil, los bosones  $W^\pm$  y  $Z$ . Los piones son otro tipo de partículas relevantes ya que actúan como mediadoras en algunos modelos efectivos para explicar fenómenos asociados a la interacción fuerte y a la vez, los quarks que los componen, interactúan de la misma manera. [1] Sin embargo, modelos como el que se abordará en este trabajo, que han aportado significativamente al entendimiento de estas interacciones, están limitados ya que no es posible hacer el análisis al nivel más fundamental. Esto es suficiente para motivarnos a pensar en los piones más como estados hadrónicos que como partículas.

Es la combinación de distintos tipos de partículas y de interacciones lo que da origen a la variedad de formas en las que se manifiesta la materia, como la vemos cotidianamente. La materia está formada por átomos, en cuyos núcleos encontramos protones y neutrones mientras que, *orbitando* los núcleos tenemos a los electrones. Mas del 99% de la masa del universo se debe a las partículas e interacciones que tienen lugar en los núcleos atómicos. Algunos parámetros con los que podemos clasificar cualquier tipo de interacción a nivel cuántico pueden ser estudiados mediante procesos de dispersión (*scattering*)<sup>1</sup>, entre ellos, por ejemplo, la sección transversal o el tiempo de vida. Para las interacciones débiles tenemos cantidades del orden de  $10^{-35}\text{m}^2$  y  $10^{-10}\text{s}$ , respectivamente, mientras que para las interacciones fuertes son del orden de  $10^{-29}\text{m}^2$  y  $10^{-24}\text{s}$ . [2]

El método de *Bootstrap* permite estudiar cualquier tipo de interacción debido a las ventajas que ofrece. Una de ellas es el hecho de que proporciona una alternativa

---

<sup>1</sup>A lo largo de este trabajo usaremos el término *scattering* aunque algunos autores lo traducen como *esparcimiento*.

a los métodos perturbativos, los que requieren un desarrollo en potencias utilizando parámetros típicamente pequeños. Otra de sus ventajas es que está basado en principios fundamentales, como la conservación de la probabilidad, simetrías de cruce y analiticidad, que resultan útiles para abordar problemas de manera general sin requerir información o parámetros específicos que dependan del tipo de sistema. Es un método con el que, debido a su naturaleza de remuestreo con reemplazo, podemos construir mejores intervalos de confianza y así, reducir incertidumbres de valores medidos, lo que contribuye a la tarea de reconstruir la interacción mediante la teoría matemática con la que se complementa.

Para estudiar sistemas cuánticos microscópicos hacemos uso de la ecuación de Schrödinger que describe la evolución temporal del estado del sistema. [3]. Para el presente trabajo se considera la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y sin considerar efectos relativistas.[3]

Se puede obtener información acerca de las propiedades e interacciones de partículas mediante los procesos de dispersión. La clave se halla en que conocer el estado final e inicial de un sistema permite reconstruir la interacción que tuvo lugar. [3][4]

El objeto matemático que se analizará es la matriz  $S$  (matriz de dispersión), que fue explorada en el trabajo previo.[5] Estudiar la matriz  $S$  como función del momento complejo  $k$  permite conocer sus polos y comportamientos singulares así como la relación que guardan con observables físicas como la energía de estados ligados, tiempos de vida de estados metaestables, etc. [6]

En el capítulo 1, se presentan las herramientas matemáticas necesarias para el análisis de funciones holomorfas en el plano complejo. Veremos que el Principio de Módulo Máximo nos permite establecer una relación entre los principios fundamentales que rigen al sistema y las restricciones matemáticas que se han de imponer a lo largo del análisis de la matriz  $S(k)$ . También se explicará cómo se puede modificar una matriz para volverla más fácil de trabajar pero que siga preservando características tales que le permitan satisfacer el Principio de Módulo Máximo.[7] Se abordan ejemplos para 3 tipos de sistema: con un estado ligado, con dos estados ligados y con resonancias. Se incluyen también los códigos realizados en *Mathematica* para proporcionar una solución numérica y contrastar con lo explicado teóricamente. El capítulo termina ofreciendo una perspectiva sobre la articulación entre las predicciones teóricas y los resultados experimentales, con el fin de reforzar la importancia y utilidad del método.[6]

En el capítulo 2, se discute el potencial de Yukawa. Se da brevemente el contexto histórico bajo el que surge para después plantear el problema independiente del tiempo para este potencial. Se comprobó que en un caso específico se pueden obtener los resultados correspondientes al potencial de Coulomb. Se expone un método para tratar de dar una solución analítica capaz de aproximarse de buena manera a la solución real. Al final del capítulo se presenta la manera de aplicar el método de *Bootstrap* al potencial de Yukawa.

# Capítulo 1

## El método Bootstrap

Con el fin de darle sentido al contenido de este capítulo repasaremos brevemente los fundamentos teóricos expuestos en la parte anterior de este trabajo.[5]. La matriz  $S(k)$  es un objeto que relaciona los estados inicial y final de un sistema cuántico en un proceso de dispersión. Se estudia en el plano complejo y posee características con implicaciones físicas de interés. Los polos de la matriz  $S$  se relacionan con estados ligados (si el polo es puramente imaginario y positivo) o con resonancias (si el polo es complejo con parte imaginaria negativa)<sup>1</sup>. Es posible conocer también la intensidad de acoplamiento de un estado ligado mediante el cálculo del residuo de  $S$  en el polo correspondiente o el tiempo de vida de un estado metaestable (resonancia). También existen singularidades relacionadas con los comportamientos asintóticos de la matriz  $S$ . Por ejemplo un potencial finito de rango  $a$  presenta un comportamiento asintótico  $S(k) \sim e^{-2ika}$  cuando  $k$  es demasiado grande, que significa que a altas energías el unico cambio medido es un desfase de longitud  $a$ . Las propiedades de conservación de la probabilidad ( $|S(k)| \leq 1$ ) y simetrías de cruce ( $S(k)^* = S(-k^*)$ ) se encargan de delimitar nuestra región de estudio, reduciéndola al semiplano superior complejo (Upper Half Plane, o UHP por sus siglas en inglés). Pasaremos entonces a exponer las herramientas matemáticas que se emplearan.

### 1.1. Bootstrap matemático

El método de Bootstrap fue propuesto por Bradley Efron en 1979. Consiste en delimitar los intervalos de confianza mediante el remuestreo con reemplazo de un grupo de datos, de manera que no se necesita conocer previamente la función de distribución, que en nuestro caso quiere decir que el método de *Bootstrap* no requiere conocer las interacciones previamente.[8][9] Mas bien se basa en principios generales independientes de las características del sistema. El Principio de Módulo Máximo asociará características matemáticas de funciones holomorfas con los principios fundamentales que se emplearán.

---

<sup>1</sup>Existen también los *polos espurios*, que aparecen para interacciones de tipo exponencial. Estos polos requieren un poco más de análisis para su correcta interpretación. En sistemas de este tipo, la condición  $\text{Im}(k) \leq 1/2a$  separa a los polos espurios, que se encuentran por arriba de este valor.

### 1.1.1. El Principio de Módulo Máximo (MMP)

En análisis complejo, el Principio de Módulo Máximo o MMP (por sus siglas en inglés) enuncia que una función holomorfa no tiene máximos en su dominio, sino que este valor se alcanza en su frontera. Recordemos que una función holomorfa es aquella que está bien definida dentro de una región o dominio. En el caso en el que tengamos una función con un punto problemático dentro de su dominio (meromorfa), podemos construir otra función (auxiliar) de manera que ésta última sea holomorfa y podamos aplicar el MMP. Para ello, es necesario explorar el comportamiento de este tipo de funciones bajo un conjunto de condiciones e interpretar los resultados.[7][10]

Comencemos pensando que  $z = z_*$  es un elemento de  $\mathbb{C}$  y digamos que es un candidato a ser un máximo. El valor de la función  $f(z)$  en  $z_*$  lo denotaremos como  $f_*$ . Entonces, podemos expandir esta función de la siguiente manera:

$$f(z) \simeq f_* - \alpha(z - z_*)^n + \dots, \quad (1.1)$$

donde se ha considerado  $n > 1$ . Calculamos ahora el módulo:

$$|f(z)| = |f_* - \alpha(z - z_*)^n|. \quad (1.2)$$

Reescribimos  $z$  como  $z = z_* + re^{i\theta}$  con lo cuál  $z_* = z - re^{i\theta}$ . Sustituyendo en 1.2 obtenemos:

$$|f(z)| = |f_* - \alpha(re^{i\theta})^n| = |f_* - \alpha r^n e^{in\theta}|. \quad (1.3)$$

De la ecuación 1.3 vemos que el valor del módulo depende de  $n$  debido a que es  $n$  la variable que se encarga de parametrizar el círculo alrededor de  $z_*$ , por lo tanto en  $n$  direcciones tendremos un valor máximo proveniente del término  $e^{in\theta}$  tras calcular el módulo. De igual manera tendremos un valor mínimo en las  $n$  direcciones restantes, concluyendo así que  $z_*$  es un punto silla (y no un máximo, como se esperaba), debido al crecimiento y decrecimiento respecto al ángulo  $\theta$ .

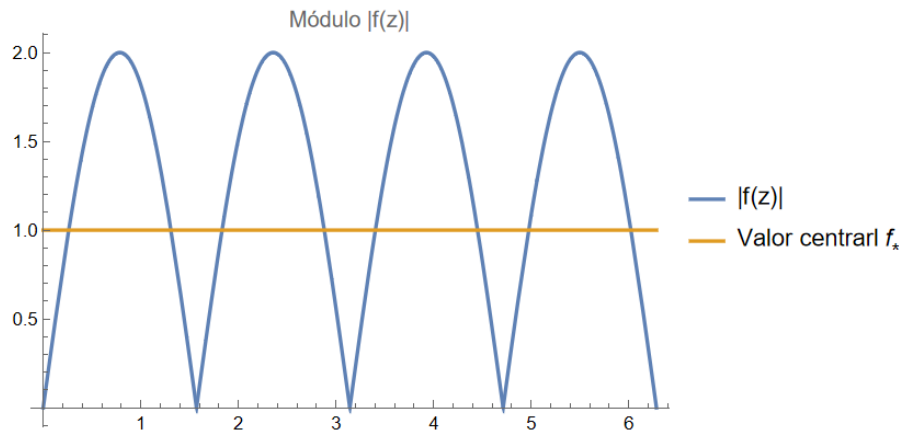


Figura 1.1: Gráfico de la expresión 1.3 respecto a  $\theta$ . Se tomó  $n = 4$ ,  $f_* = 1$  y  $\alpha = 1$

Analizándolo de otra manera, sabemos que para una función holomorfa:



$$f(z) = \oint \frac{dw}{2\pi i} \frac{f(w)}{w-z}. \quad (1.4)$$

Tomemos un círculo unitario centrado en  $w = z + re^{i\theta}$  y donde la variable  $\theta$  toma valores entre 0 y  $2\pi$ . Además, como  $z$  es fijo, tenemos que  $dw = ire^{i\theta}d\theta$ , por lo tanto se obtiene:

$$f(z) = \oint \frac{ire^{i\theta}d\theta}{2\pi i} \frac{f(z + re^{i\theta})}{rei\theta} = \frac{1}{2\pi} \oint f(z + re^{i\theta})d\theta. \quad (1.5)$$

Notemos que en la ecuación 1.5 estamos evaluando la función  $f$  en todos los puntos del círculo unitario centrado en  $z$ . Como el resultado está dividido entre  $2\pi$  y estamos evaluando integrales trigonométricas por medio de la exponencial, sabemos que se trata de una cantidad promedio. De esta manera concluimos que  $z$  no puede ser un máximo ya que  $f(z)$  se puede expresar como un promedio. Si  $z$  fuera un máximo entonces  $f(z)$  sería mayor que  $f(z_0)$  para cualquier punto en el círculo.

Incluso podemos analizarlo incluso desde el punto de vista de un sistema físico. Para ello, consideremos la siguiente función:

$$H(z) = \log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z). \quad (1.6)$$

Sabemos que la parte real de  $H(z)$  satisface la ecuación de Laplace, es decir,  $\nabla^2 \log |f(z)| = 0$ .

Imaginemos un horno bidimensional cuya temperatura en cualquier punto está dada por  $\log |f(z)|$ . Su valor máximo se alcanzaría en las paredes del horno. Supongamos que, mas bien, es en un punto interior del horno donde se alcanza la temperatura máxima. En este caso el calor de igual forma se difunde hacia la frontera del horno, lo cual nos da un ejemplo físico de cómo un sistema se comporta de acuerdo al MMP.

Una vez que hemos hecho esto podemos pasar a realizar el análisis de la aplicación del MMP a distintos problemas para extraer algunos resultados útiles

Comencemos considerando una función holomorfa  $f(z)$  dentro del círculo unitario y tal que  $|f(z)| \leq 1$ . Lo que interesa es conocer el valor máximo de  $|f(z)|$  en el origen.

Notemos que  $|f(0)| \leq 1$  donde la igualdad se cumple para  $f(z) = 1$  (función constante) o para cuando  $f(z)$  sea una fase.

Debido al MMP, si la función esta delimitada por la frontera del disco y no tiene ningún tipo de singularidades dado que es holomorfa, entonces su valor en el origen y en cualquier otro punto interior del disco es como máximo 1.

Nos quedaremos con la función que satisfaga  $f(z^*) = f(z)^*$ , concluyendo así que en este caso  $f(z) = 1$ .

Pasemos al caso de una función real meromorfa la cual es holomorfa dentro de un disco unitario salvo por un polo en el eje real, en  $z = 0$ . Nuevamente  $|f(z)| \leq 1$ . Vamos a calcular el máximo valor del residuo de este polo.

En principio, no podemos aplicar directamente el MMP dado que la función no es holomorfa debido al polo en  $z = 0$ . Construimos entonces una función auxiliar  $h(z) = zf(z)$  la cual es holomorfa ya que hemos removido la singularidad. Vemos que  $|z| = 1$  cuando  $z = e^{i\theta}$ , por lo tanto  $h(z)$  está correctamente acotada, es decir,

$|h(z)| \leq 1$ . En particular,  $h(0) \leq 1$ , pero  $h(0)$  es precisamente el residuo de  $f$ , con lo cual concluimos que  $\max \operatorname{res} f|_{z=0} = 1$ .

Si ahora la función  $f(z)$  es meromorfa con un polo en el eje real, ubicado en  $z = z_*$ . ¿Podemos calcular el valor máximo del residuo de  $f(z)$  de la misma manera?

Se tendría que remover la singularidad multiplicando  $f(z)$  por  $z - z_*$ , es decir,  $h(z) = (z - z_*)f(z)$ . El problema es que el término  $z - z_*$  no es una fase y por lo tanto no está acotado correctamente, a diferencia de la pregunta anterior. Consideremos entonces el factor  $(z - z_*)/(1 - zz_*)$ . Al evaluarlo en  $z = z_*$  tenemos que:

$$\frac{z - z_*}{1 - zz_*} = 0, \quad (1.7)$$

de modo que este factor remueve correctamente la singularidad. Sin embargo hay que observarlo con más detalle. Veamos qué sucede con el denominador ya que nos interesa que el factor propuesto no introduzca mas irregularidades. Notamos que:

$$1 - zz_* = 0 \longrightarrow z = \frac{1}{z_*}. \quad (1.8)$$

Como el polo está dentro del disco, tenemos que  $|z_*| \leq 1$ , lo cual indica que el punto  $z = 1/z_*$  (punto donde el factor se indetermina) está en realidad fuera del círculo unitario de modo que la posible indeterminación no representa ningún problema en este caso.

Ahora verifiquemos que el factor sea una fase. Necesitamos comprobar que:

$$\left| \frac{z - z_*}{1 - zz_*} \right| = 1. \quad (1.9)$$

Usando propiedades del valor absoluto, la ecuación 1.9 se reescribe como:

$$|z - z_*| = |1 - zz_*|. \quad (1.10)$$

Trabajamos primero el lado izquierdo. Calculamos el cuadrado del módulo y obtenemos:

$$|z - z_*|^2 = 1 - z\bar{z}_* - \bar{z}z_* + |z_*|^2, \quad (1.11)$$

mientras que para el término en el lado derecho de 1.10 tenemos:

$$|1 - zz_*|^2 = 1 - zz_* - \bar{z}\bar{z}_* + |z_*|^2. \quad (1.12)$$

El producto de  $z_*$  por  $z$  ó  $\bar{z}$  no modifica la magnitud del mismo, por lo que las expresiones 1.11 y 1.12 son equivalentes. De esta manera hemos probado que el factor propuesto cubre los requerimientos para poder emplearlo al construir la siguiente función auxiliar:

$$h(z) = \frac{z - z_*}{1 - zz_*} f(z). \quad (1.13)$$

En los párrafos anteriores se probó que la singularidad se remueve correctamente y que  $h(z)$  está acotada correctamente de acuerdo a  $h(z) \leq 1$ , lo que nos permite emplear el MMP.

Ahora pasemos a encontrar una expresión que nos proporcione información acerca del residuo. El residuo de  $f(z)$  se relaciona con la cancelación de sus polos debida al factor  $z - z_*$ , que se anula cuando  $z = z_*$ .

Desarrollamos el factor  $(z - z_*)/(1 - zz_*)$  en serie de Taylor:

$$\frac{z - z_*}{1 - zz_*} \simeq \frac{1}{1 - z_*^2}(z - z_*) + \mathcal{O}((z - z_*)^2). \quad (1.14)$$

Ahora, dado que  $f(z)$  es meromorfa, con un posible polo en  $z = z_*$ , podemos expresarla de manera aproximada como:

$$f(z) \sim \frac{A}{z - z_*}, \quad (1.15)$$

donde  $A = \text{res} f(z)|_{z=z_*}$ .

Podemos usar 1.15 para reescribir  $h(z)$ , cerca de  $z_*$ , como:

$$h(z) = \frac{z - z_*}{z - zz_*} \frac{A}{z - z_*} = \frac{A}{1 - zz_*}. \quad (1.16)$$

Como  $h(z)$  es holomorfa, necesitamos que se cumpla que:

$$\text{res} f(z)|_{z=z_*} \leq 1 - z_*^2. \quad (1.17)$$

### 1.1.2. Ejemplos y soluciones numéricas con Mathematica

Para ilustrar mejor lo explicado en este capítulo, finalizaremos con algunos ejemplos breves de cómo aplicar el MMP que son una reproducción de lo presentado en [6][10].

Consideremos una función  $f$  real holomorfa definida dentro del círculo unitario  $\mathbb{D}$  y acotada por la frontera del disco  $\partial\mathbb{D}$  de acuerdo a lo que se indica en cada uno de los ejemplos.

**Ejemplo 1.** Sea  $|f(z)| \leq 1$  en  $\partial\mathbb{D}$ . Si  $f(1/2) = 0$ , mostrar que:

$$-4/5 \leq f(-1/2) \leq 4/5. \quad (1.18)$$

**Solución.** Usamos la desigualdad de Schwarz-Pick[7]:

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - f(z_1)f(z_2)} \right| = \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1z_2|}, \quad (1.19)$$

para cualquier  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ . Sean  $z_1 = -1/2$  y  $z_2 = 1/2 \rightarrow f(z_2) = 0$ . Entonces la ecuación 1.19 se reduce a:

$$\left| \frac{f(-1/2)}{1} \right| \leq \frac{-1/2 - 1/2}{1 - (-1/2)(1/2)} = \frac{1}{5/4}, \quad (1.20)$$

y finalmente:

$$|f(-1/2)| \leq 4/5, \quad (1.21)$$

probando así, por las propiedades del valor absoluto, la ecuación 1.18.

**Ejemplo 2.** Sea  $|f(z)| \leq |2 + z|$  en  $\partial D$ . Mostrar que:

$$-5/2 \leq f(1/2) \leq 5/2. \quad (1.22)$$

**Solución.** Usaremos la condición dada en el enunciado para construir la función auxiliar:

$$g(z) = \frac{f(z)}{2 + z}, \quad (1.23)$$

la cual satisface que  $|g(z)| \leq 1$ . Luego, como  $f(z)$  es holomorfa, entonces también  $g(z)$  lo es, ya que  $2 + z \neq 0$ . Podemos evaluar en  $z = 1/2$  y nos queda:

$$g(1/2) = \left| \frac{f(1/2)}{2 + 1/2} \right| = \frac{|f(1/2)|}{|2 + 1/2|} \leq 1. \quad (1.24)$$

Obtenemos entonces:

$$\frac{|f(1/2)|}{|5/2|} \leq 1 \longrightarrow |f(1/2)| \leq 5/2, \quad (1.25)$$

probando así la expresión 1.22.

A continuación se muestran los códigos, en *Mathematica*, que se pueden implementar para resolver estos ejemplos de manera numérica.

**Ejemplo 1.** En este caso, el código es el siguiente:

```
M = 40; G = 80;
f[z_] = Sum[c[n] z^n, {n, 0, M}];
variables = {#, 0} & /@ (c /@ Range[0, M])
boundness = Table[Abs[f[Exp[I n Pi/G]]] <= 1, {n, 0, G}];
constraint = f[1/2] == 0
FindMaximum[{f[-1/2], boundness \[And] constraint}, variables]
FindMinimum[{f[-1/2], boundness \[And] constraint}, variables]
```

Lo cual nos da como resultado:

$$-0,8 \leq f(z) \leq 0,8. \quad (1.26)$$

**Ejemplo 2.** Para este caso el código es:

```
M = 40; G = 80;
f[z_] = Sum[c[n] z^n, {n, 0, M}];
variables = {#, 0} & /@ (c /@ Range[0, M])
boundness =
  Table[Abs[f[Exp[I n Pi/G]]] <= Abs[2 + Exp[I n Pi/G]], {n,
    0, G}];
FindMaximum[{f[1/2], boundness}, variables]
FindMinimum[{f[1/2], boundness}, variables]
```

El resultado coincide con lo que se obtuvo anteriormente, verificando que:

$$-2,5 \leq f(z) \leq 2,5. \quad (1.27)$$

## 1.2. El Bootstrap de la matriz $S$

En esta sección abordaremos de manera más concreta la metodología del método de *Bootstrap* aplicado a la matriz  $S$  basándonos en las propiedades que hemos estudiado anteriormente sobre este objeto. Denotaremos como  $\mathcal{R}$  al dominio de la matriz  $S$  y como  $\partial\mathcal{R}$  a su frontera. Debido a las propiedades de simetría que la matriz  $S$  posee, el dominio en el que vamos a trabajar es el semiplano superior complejo, al que llamaremos *UHP* de manera que la frontera en este caso es el eje real.

### 1.2.1. Preliminares

Antes de entrar en materia al *Bootstrap*, presentaremos brevemente los elementos, en general, mas importantes con los que trabajaremos.

Recordemos que podemos medir el acoplamiento de un estado ligado mediante el residuo de la matriz  $S$  [10][6]. La expresión para realizarlo es la siguiente:

$$g^2 \equiv \frac{1}{i} \text{res} S(k)|_{k=i\kappa}. \quad (1.28)$$

También recordemos que se probó con anterioridad que estos residuos son positivos, lo cual tiene sentido físico si ya hemos dicho que cuantifican la intensidad del acoplamiento.

Si  $S(k)$  es una función holomorfa en  $\mathcal{R}$ , entonces el valor máximo de su valor absoluto debe alcanzarse en la frontera  $\partial\mathcal{R}$  debido al Principio de Módulo Máximo (MMP). Cuando tenemos polos dentro de  $\mathcal{R}$  tenemos que  $S(k)$  es una función meromorfa, lo cual sucede de una manera mas habitual. Observemos las siguientes figuras en las que se esquematiza las propiedades relevantes para los tres tipos de interacciones previamente estudiadas.

La figura 1.2 muestra el caso de potencial ultra local, el cual no presenta ninguna singularidad esencial. Los polos asociados a estados ligados están ubicados en el eje imaginario mientras que los asociados a las resonancias se ubican en el semiplano inferior, lo que permite interpretarlos como ceros en el semiplano superior. El eje real, al ser la frontera, es la manera en la que se impondrá la condición de unitariedad.

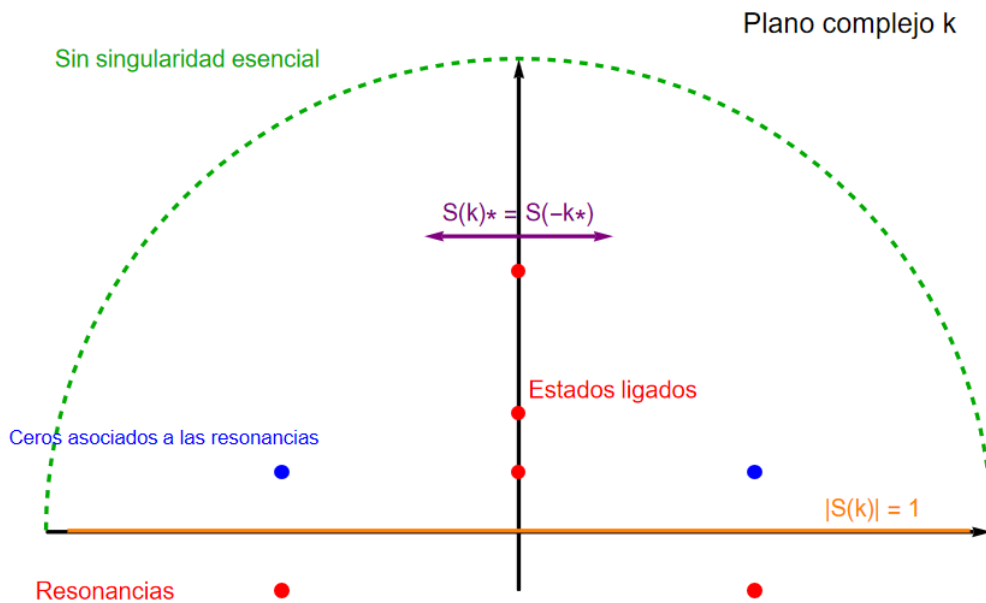


Figura 1.2: Potencial ultra local.

La figura 1.3 ilustra el caso del potencial de rango finito. Muestra las mismas características que el caso ultra local, a excepción de que en este caso tenemos una singularidad esencial en  $\infty$ , la cual es deseable remover para poder estudiar el problema,

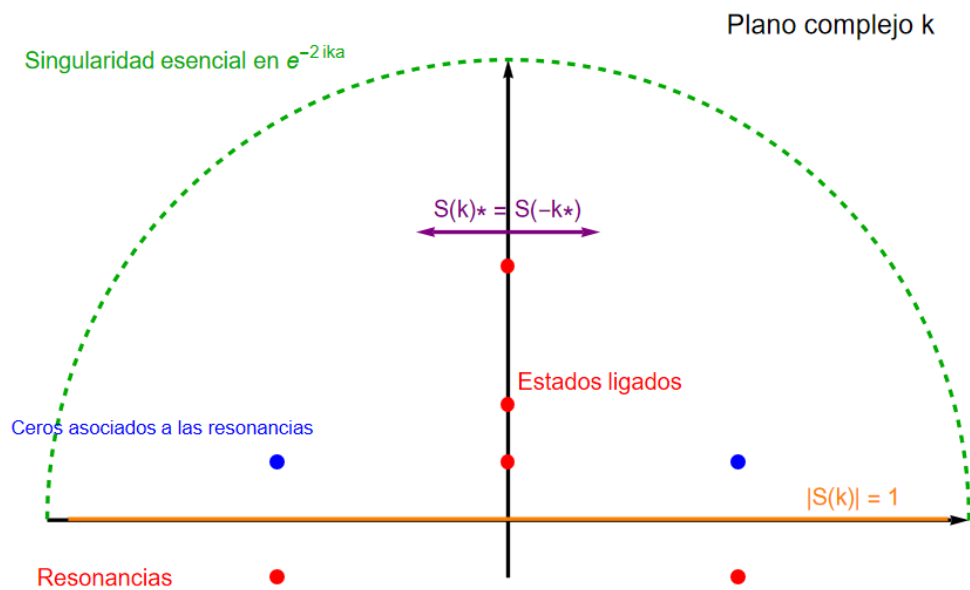


Figura 1.3: Potencial finito.

En la figura 1.4 se muestra el potencial exponencial. Al igual que el potencial finito, tiene una singularidad esencial en el infinito y también cuenta con polos en el eje imaginario positivo (estados ligados). Presenta también una cota a partir de la

cual se vuelve mas complicado distinguir entre polos espurios, que aparecen debido a que el potencial no es finito (pese a tener un rango efectivo finito), y polos asociados a estados ligados.

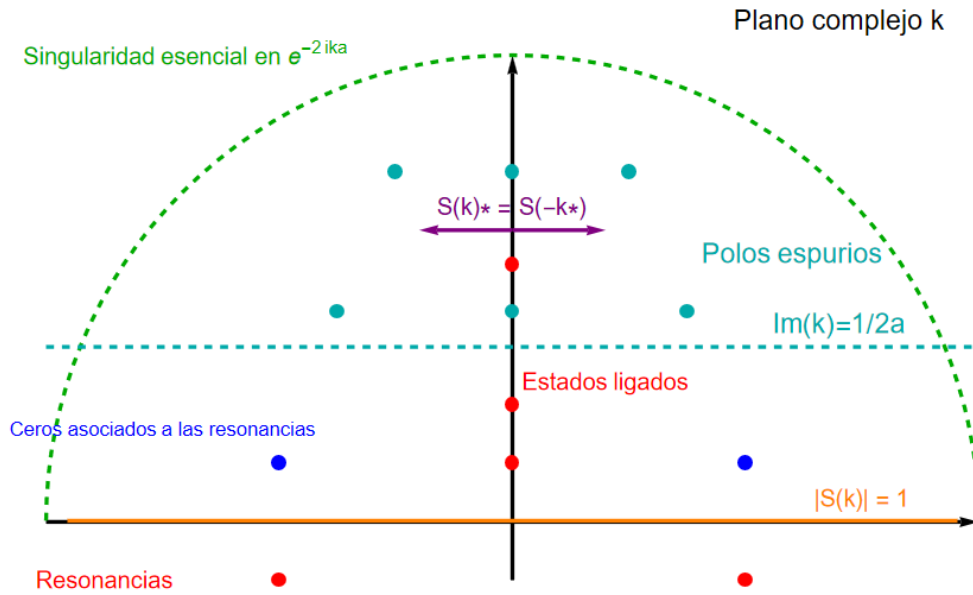


Figura 1.4: Potencial exponencial.

Para implementar el método de *Bootstrap* de la matriz  $S$  usaremos la propiedad de conservación de la probabilidad (unitariedad) y el hecho de que los residuos de alguna matriz  $S$ , asociada a un potencial atractivo, tienen valores positivos. En la siguiente sección detallaremos brevemente algunos ejemplos.

### 1.2.2. Partícula libre

Consideremos una teoría física sin estados ligados. Queremos saber cual es el máximo valor que puede tomar  $\alpha = S(it)$  para cualquier  $t > 0$ .

Como se trata de una teoría sin estados ligados, esto quiere decir que no existe ningún polo. Por lo tanto, en este caso,  $S(k)$  es una función holomorfa en todo el UHP. También sabemos que al ser holomorfa obedece al MMP. Se cumple entonces que  $S(k) \leq 1$ , cumpliéndose la igualdad en la frontera  $\partial\mathcal{R}$ , es decir, en el eje real. Por lo tanto podemos concluir que el valor máximo que se alcanza, para cualquier  $t > 0$ , es justamente el que toma en la frontera:

$$\max S(it) = 1. \tag{1.29}$$

Recordemos que la matriz  $S$  mapea los estados iniciales en estados finales, de modo que el hecho de que  $S(k) = 1$  significa que los estados inicial y final son idénticos, o bien, que la partícula no está sufriendo dispersión alguna. Concluimos entonces que se trata de una partícula libre.

### 1.2.3. Un estado ligado

Ahora consideremos una teoría con un solo estado ligado cuyo polo se localiza en  $k = i\kappa$ . Este estado tiene energía de enlace  $\varepsilon = \kappa^2$ . Queremos encontrar el rango de valores permitidos para  $g^2$  de acuerdo a la ecuación 1.28.

En este caso tenemos que  $S(k)$  es una función meromorfa, por lo que no podemos aplicar el MMP de manera inmediata sin haber removido el polo.

Vamos a definir entonces la función auxiliar:

$$f(k) \equiv S(k) \frac{(k + i\kappa)}{(k - i\kappa)} = \frac{(k - i\kappa)}{(k + i\kappa)} S(k). \quad (1.30)$$

Notemos que  $f(k)$  es holomorfa en el UHP, ya que en esa región,  $k + i\kappa$  es siempre distinto de cero. Además el factor con el que se ha construido la función auxiliar es tal que  $|f(k)| \leq 1$ .

Tenemos entonces que el residuo es:

$$\text{res} f(i\kappa) = -\frac{1}{2i\kappa}. \quad (1.31)$$

Finalmente, usando 1.28 se obtiene:

$$1 \geq f(i\kappa) = \frac{g^2}{2\kappa} \implies 0 \leq g^2 \leq 2\kappa. \quad (1.32)$$

Este resultado indica que ninguna interacción tipo ultra local puede tener un acoplamiento mayor a  $2\kappa$ . De hecho, si saturamos ese límite y tomamos  $g^2 = 2\kappa$  resulta lo siguiente:

$$f(k) = \frac{2\kappa}{2\kappa} = 1 \implies 1 = \frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} S(k) \implies S(k) = \frac{k + i\kappa}{k - i\kappa}. \quad (1.33)$$

La ecuación obtenida para  $S(k)$  en 1.33 tiene un solo polo, por lo que concluimos que se trata de una interacción tipo delta de Dirac. Esto indica que este es el tipo de interacciones más fuertes.

Implementemos el *Bootstrap* en este ejemplo para abordarlo de manera distinta. Consideremos el mapeo dado por:

$$z = \frac{k - ik_0}{k + ik_0}, \quad (1.34)$$

donde  $k_0 > 0$ . Notemos que si  $k$  tiene parte imaginaria igual a cero, entonces el módulo del numerador y denominador son iguales y por lo tanto  $|z| = 1$ . Esto indica que el eje real está siendo mapeado al contorno de un círculo unitario. En el polo  $ik_0$  tenemos  $z(k_0) = 0$ , que mapea la ubicación del polo al centro del círculo. Otros puntos a tener en cuenta son:  $z(0) = -1$ ,  $z(\infty) = 1$ ,  $z(k_0) = -i$ ,  $z(-k_0) = i$ .

Notemos también que, de 1.34 se cumple:

$$z(-k^*) = \frac{-k^* - ik_0}{-k^* + ik_0} = \frac{k^* + ik_0}{k^* - ik_0} = z(k)^*. \quad (1.35)$$



Tomemos la propiedad de simetría  $S(k)^* = S(-k^*)$  pero en vez de  $k$ , pondremos a la función  $z(k)$ . Entonces tenemos:

$$S(z(k))^* = S(z(-k^*)), \quad (1.36)$$

pero dado el resultado de 1.35 nos queda que:

$$S(z(k))^* = S(z(k)^*) \implies S(z)^* = S(z^*). \quad (1.37)$$

Queremos ahora calcular el residuo de  $S(k)$ , según la definición 1.28. Para ello debemos utilizar el Jacobiano apropiado que relaciona  $z$  con  $k$ , debido a que se ha utilizado 1.34 como mapeo entre la región física de nuestro problema (UHP) y la región con la que empleamos el MMP (círculo unitario). Entonces tenemos:

$$\text{res}S(k) = \text{res}S(z) \frac{dk}{dz}, \quad (1.38)$$

por lo tanto:

$$g^2 = \frac{1}{i} \text{res}S(z) \frac{dk}{dz}. \quad (1.39)$$

De la ecuación 1.34 tenemos:

$$k = ik_0 \frac{1+z}{1-z} \implies \frac{dk}{dz} = \frac{(k+ik_0)^2}{2ik_0}, \quad (1.40)$$

y entonces:

$$g^2 = -\frac{(k+ik_0)^2}{2k_0} \text{res}S(z). \quad (1.41)$$

Como sabemos que  $k = i\kappa$  es un polo de  $S(k)$  entonces tenemos:

$$g^2 = -\frac{(i\kappa+ik_0)^2}{2k_0} \text{res}S(z) = \frac{(\kappa+k_0)^2}{2k_0} \text{res}S(z), \quad (1.42)$$

y en particular, si  $k_0 = \kappa$ :

$$g^2 = 2\kappa \text{res}S(z). \quad (1.43)$$

El polo está en  $z = 0$ , así que podemos expresar  $S(z)$  como una serie:

$$S(z) = \frac{a^2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (1.44)$$

que debe ser convergente, lo que implica que  $c_n \rightarrow 0$  a medida que  $n \rightarrow \infty$ . Además, los coeficientes deben ser reales debido a la propiedad dada en 1.37. De esta manera lo que resta es encontrar el valor de  $a^2$ .

El código con el que realizaremos esta tarea se muestra a continuación:

```
M = 40; G = 80;
f[z_] := a^2/z + Sum[c[n] z^n, {n, 0, M}];
variables = (c /@ Range[0, M]) ~Join~ {a};
boundness = Table[Abs[f[Exp[I n Pi/G]]] <= 1, {n, 0, G}];
FindMaximum[{a^2, boundness}, variables]
```

Se ha tomado un valor finito de  $M = 40$  para truncar la suma en 1.44 y se ha hecho una discretización del círculo unitario en  $G = 80$  puntos para fijar la restricción de  $|S(z)| \leq 1$ . Con lo anterior, se calculan los coeficientes  $c_n, a$  y el programa nos devuelve el valor máximo y nos imprime la lista de coeficientes y sus valores.

Se obtiene que:

$$0 \leq \text{res}S(z)|_{z=0} \leq 0,999993. \quad (1.45)$$

El límite superior es aproximadamente igual a 1. Multiplicamos todo por  $2\kappa$  y ocupamos 1.43 notar que:

$$0 \leq g^2 \leq 2\kappa, \quad (1.46)$$

que coincide con lo obtenido en 1.32.

### 1.2.4. Resonancias y estados ligados

Consideremos ahora una teoría ultra local sin singularidades esenciales pero con resonancias en  $k = \pm A + iB$  y un polo simple en  $k = \kappa$ . Nuevamente tendremos una función meromorfa y necesitaremos construir un factor para volverla holomorfa y poder proceder con nuestro método. Definimos entonces:

$$f(k) = S(k) \frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} \cdot \frac{k - (A - iB)}{k - (A + iB)} \cdot \frac{k - (-A - iB)}{k - (-A + iB)}. \quad (1.47)$$

Tras haber hecho esto, garantizamos que  $|f(i\kappa)| \leq 1$  y entonces obtenemos:

$$\frac{g^2}{2\kappa} \cdot \frac{i\kappa - (A - iB)}{i\kappa - (A + iB)} \cdot \frac{i\kappa - (-A - iB)}{i\kappa - (-A + iB)} \leq 1. \quad (1.48)$$

Se encuentra que el acoplamiento en este tipo de interacción está dado por:

$$0 \leq g^2 \leq 2\kappa \frac{A^2 + (B - \kappa)^2}{A^2 + (B + \kappa)^2}. \quad (1.49)$$

Si tomamos  $A = 1, B = 1/2, \kappa = 1/2$  tendríamos:

$$0 \leq g^2 \leq \frac{1}{2}. \quad (1.50)$$

Para obtener una solución numérica, implementamos un código similar al de la sección anterior.

```
M = 40; G = 80;
f[z_] := a^2/z + Sum[c[n] z^n, {n, 0, M}];
variables = (c /@ Range[0, M]) ~Join~ {a};
boundness = Table[Abs[f[Exp[I n Pi/G]]] <= 1, {n, 0, G}];
boundness = AppendTo[boundness, f[1/2] == 0];
FindMaximum[{a^2, boundness}, variables]
```

El resultado que se obtiene es:

$$0 \leq \text{res}S(z) \lesssim 0,5. \quad (1.51)$$

Con los valores usados en este ejemplo, tenemos que  $2\kappa = 1$  y por lo tanto, según 1.43:

$$0 \leq g^2 \lesssim 0,5, \quad (1.52)$$

y así es como hemos comprobado que la solución numérica implementada resuelve correctamente el problema, según lo obtenido en 1.50.

### 1.2.5. Dos o más estados ligados

Vamos a considerar una teoría con dos estados ligados, cuyos polos y acoplamientos serán  $k = i\kappa, g^2$  y  $k = i\kappa', g'^2$  respectivamente. Además asumiremos que  $\kappa' > \kappa$ . Vamos a definir a función holomorfa, con la que trabajaremos, similarmente a las secciones pasadas:

$$f(k) = \frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} \cdot \frac{k - i\kappa'}{k + i\kappa'} S(k). \quad (1.53)$$

Nuevamente se cumple que  $|f(k)| \leq 1$  y en particular  $f(i\kappa) \leq 1$  y por lo tanto:

$$g^2 \leq 2\kappa \frac{\kappa + \kappa'}{\kappa - \kappa'}. \quad (1.54)$$

Insertamos un signo negativo para preservar la positividad de  $g^2$  y entonces:

$$g^2 \leq 2\kappa \frac{\kappa' + \kappa}{\kappa' - \kappa}. \quad (1.55)$$

Saturando el límite superior de este acoplamiento, es decir, aplicando la condición  $f(i\kappa) = 1$  tenemos que:

$$S(k)_{\max(g^2)} = -\frac{k + i\kappa}{k - i\kappa} \cdot \frac{k + i\kappa'}{k - i\kappa'}. \quad (1.56)$$

Realizamos el mismo procedimiento pero para el otro estado ligado y obtenemos:

$$g'^2 \leq 2\kappa' \frac{\kappa' + \kappa}{\kappa' - \kappa}. \quad (1.57)$$

La matriz para este caso es:

$$S(k)_{\max(g'^2)} = \frac{k + i\kappa}{k - i\kappa} \cdot \frac{k + i\kappa'}{k - i\kappa'}. \quad (1.58)$$

Sin embargo, las matrices dadas por 1.56 y 1.58 no preservan el hecho de que ambos residuos, en  $i\kappa$  y  $i\kappa'$ , sean positivos. Mantienen uno positivo y uno negativo

y ambos polos son estados ligados, por lo que ambos residuos deben ser positivos<sup>2</sup>. Vamos a imponer una restricción para los residuos mediante la siguiente expresión:

$$S(k) = \frac{k + i\kappa}{k - i\kappa} \cdot \frac{k - iA}{k + iA} \cdot \frac{k + i\kappa'}{k - i\kappa'}, \quad (1.59)$$

donde  $\kappa < A < \kappa'$ . De esta forma hemos introducido un cero entre los polos. Notemos ahora que el factor que contiene a  $A$ , afecta el valor de los residuos.

Para  $A \rightarrow \kappa'$ :

$$S(k)_{\max(g^2)} = \frac{k + i\kappa}{k - i\kappa} \implies \max(g^2) = 2\kappa, \quad (1.60)$$

mientras que para  $A \rightarrow \kappa$ :

$$S(k)_{\max(g'^2)} = \frac{k + i\kappa'}{k - i\kappa'} \implies \max(g'^2) = 2\kappa'. \quad (1.61)$$

Notemos que el *ansatz* que ocupamos para esta parte, nos conduce a que mientras maximizamos el valor de uno de los residuos, acercándonos a su respectivo polo, el otro residuo se minimiza. Por lo tanto al estar en cualquiera de ambos polos, el sistema se comportará como si tuviese un solo estado ligado.

Numéricamente podemos resolver el problema planteando el código para la siguiente función  $S(z)$ :

$$S(z) = \frac{a^2}{z} + \frac{b^2}{z - \frac{\kappa' - \kappa}{\kappa' + \kappa}} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (1.62)$$

en donde hemos tomado  $k_0 = \kappa$  como el polo correspondiente a  $S(z)$  en  $z = 0$ . Tomamos también  $\kappa' = 3\kappa$  y nuestro código queda de la siguiente manera:

```
M = 20; G = 50;
S[z_] = a^2/z + b^2/(z - .5) + Sum[c[n] z^n, {n, 0, M}];
variables1 = (c /@ Range[0, M]) ~ Join ~ {a, b};
unitarity = Table[Abs[S[Exp[I n Pi/G]]] <= 1, {n, 0, G}];
FindMaximum[{b^2, unitarity}, variables1]
FindMaximum[{a^2, unitarity}, variables1]
```

Las últimas dos líneas obtienen el máximo de  $a^2$  y  $b^2$ , los cuales ya hemos dicho que deben ser tales que cuando uno sea máximo, el otro se vaya minimizando. Los resultados dados por cada línea, son:

$$a^2 \sim 1,1955 \times 10^{-20}, b^2 \sim 0,74995, \quad (1.63)$$

$$a^2 \sim 0,999995, b^2 \sim 3,2273 \times 10^{-29}. \quad (1.64)$$

---

<sup>2</sup>Un residuo negativo indicaría un apantallamiento, debido a que corresponde a un cambio en el signo del potencial. Por ejemplo si estamos tratando con un potencial atractivo y obtenemos un residuo negativo indicaría una interacción repulsiva, lo cuál nos da indicios de que se debe revisar si se cometió algún error en el procedimiento.

### 1.3. Aplicación e interpretación

En esta sección explicaremos la utilidad del método de *Bootstrap*. Como ya sabemos, se emplea para estudiar sistemas fuertemente interactuantes que no podemos estudiar mediante métodos perturbativos puesto que las constantes introducidas en los métodos perturbativos no serían pequeñas, como es el caso de la constante de acoplamiento en la interacción electromagnética debido a un potencial de Coulomb. El método Bootstrap nos proporciona una manera de relacionar datos obtenidos experimentalmente con propuestas de modelos de potenciales. Partiendo del punto de vista de un físico teórico el algoritmo para entender el Bootstrap es de la siguiente forma:

- Partir de la ecuación de Schrödinger. Considerar un potencial de rango efectivo finito (puede ser ultra local, finito o exponencial con cierto parametro de alcance efectivo)
- Obtener la solución analítica y expresarla como:

$$\psi(x) = e^{ikx} + S(k) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r}, \quad (1.65)$$

donde el primer término corresponde a la onda incidente y el segundo término a una onda dispersada. La matriz  $S(k)$  depende del problema que estemos tratando.

- Analizar la matriz  $S$  en forma de polos e identificar si corresponden a estados ligados, resonancias o si son polos espurios.
- Con lo obtenido de la matriz  $S$ , construir el espectro correspondiente.

Entender este procedimiento es clave para interpretar correctamente la información que se puede obtener de la matriz  $S$ . A partir de los polos podemos encontrar las energías de los estados ligados. Por otro lado, cuando tenemos polos asociados a resonancias, podemos calcular los valores de energía de estados resonantes, así como sus tiempos de vida.

Ahora explicaremos cómo se puede analizar un conjunto de datos para recorrer el camino en sentido inverso, es decir, partiendo de la obtención de datos experimentales hasta llegar a proponer un modelo acertado que sea congruente con los datos proporcionados. A grandes rasgos, los pasos a seguir son los siguientes:

- Obtener los datos mediante algún experimento e identificar qué tipo de sistema podemos estar tratando, es decir, el intervalo de valor de energía (por ejemplo, energías negativas son asociadas a estados ligados mientras que energías positivas están relacionadas a estados de dispersión).
- Proponer algún modelo con pocos parámetros para garantizar que tengamos buen nivel de confiabilidad, ya que mientras más parámetros introduzcamos, menos podemos concluir de lo que se obtenga.

- Posteriormente viene la parte operativa. Consiste en obtener las medias de los datos experimentales. Entiéndase que se trata de un solo valor medio para cada grupo de datos. Es decir, si el problema en cuestión parece tener dos estados ligados entonces deberíamos obtener dos valores medios distintos. La manera en la que se van a refinar estos valores es mediante un remuestro con reemplazo. Esto quiere decir que si tenemos una muestra de  $N$  datos podemos tomar una muestra de  $n = N$  datos pero con reemplazo, por lo que un dato puede quedar fuera de la muestra mientras que otro puede tomarse de manera repetida. Esto se traduce en la obtención de un valor medio más confiable.[8][9]
- Después se procede a identificar a qué tipo de elemento corresponde, es decir, cómo lo vamos a relacionar con la matriz  $S$  y, consecuentemente, podremos hacer correcciones al modelo propuesto mediante el ajuste de los parámetros escogidos.
- Finalmente se prueba el modelo propuesto para comprobar que conduce a los valores obtenidos mediante la experimentación.

# Capítulo 2

## El potencial de Yukawa

El potencial de Yukawa, también llamado potencial de Coulomb apantallado, fue propuesto por Hideki Yukawa, alrededor de 1930. Surge debido a la propuesta de Hideki Yukawa de considerar a los piones como los mediadores de la interacción entre protones y neutrones en el núcleo atómico, la cual es del nuclear fuerte. Un pión es una partícula subatómica portadora de la interacción nuclear fuerte.[11] El pión es el más ligero de todos los mesones y los hay de tres tipos:  $\pi^0, \pi^+, \pi^-$ . Los piones cargados son inestables, teniendo tiempos de vida del orden de  $\tau \cong 26,033 \times 10^{-9}$ s y decaen en un muón + un neutrino muónico. Los piones neutros, que son aún más inestables, tienen tiempos de vida alrededor de  $\tau \cong 8,5 \times 10^{-17}$ s. y decaen en dos fotones. La manera en la que los piones transportan la interacción fuerte es similar a cómo las interacciones electromagnéticas surgen del intercambio de fotones. El potencial de Yukawa tiene la siguiente forma:

$$V(r) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-\frac{mc}{\hbar}r}}{r}, \quad (2.1)$$

donde  $g$  es la constante de acoplamiento,  $4\pi$  es un factor geométrico,  $m$  es la masa del pión intercambiado,  $c$  es la constante de velocidad de la luz en el vacío y  $\hbar$  la constante de Planck reducida.

Para simplificar la escritura, de aquí en adelante haremos la siguiente redefinición de constantes:

$$V_0 = \frac{g^2}{4\pi}, \mu = \frac{mc}{\hbar}. \quad (2.2)$$

Entonces la ecuación 2.1 queda reescrita como:

$$V(r) = -\frac{V_0}{r} e^{-\mu r}. \quad (2.3)$$

Notemos que si tomamos la ecuación 2.3 en el caso en el que  $\mu = 0$  se recupera la expresión correspondiente al potencial de Coulomb  $V = -V_0/r$ .

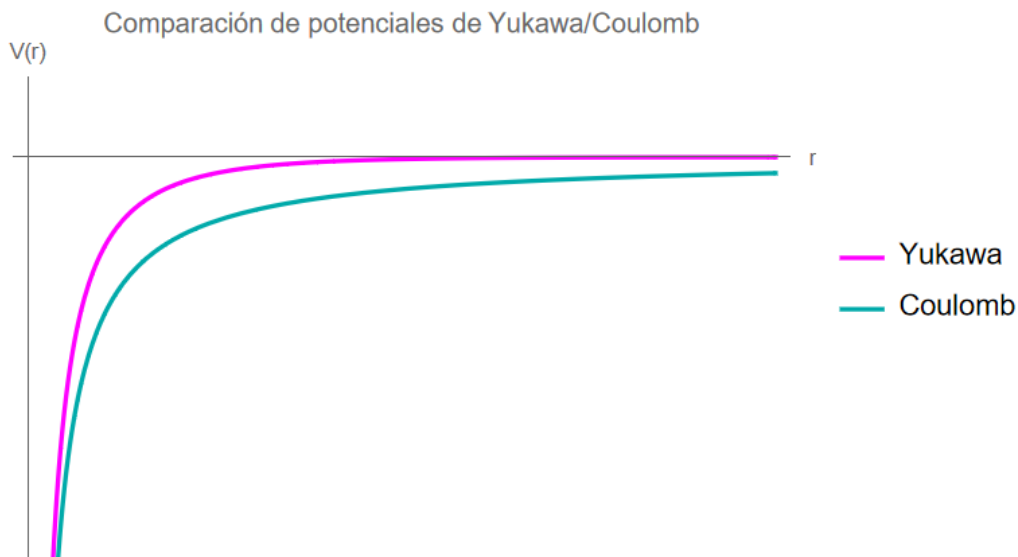


Figura 2.1: Gráfica para  $V_0 = 2, \mu = 1,1$ .

La figura 2.1 exhibe cómo el potencial de Yukawa decae más rápidamente debido al término de apantallamiento. También podemos observar su comportamiento en función del parámetro del alcance  $\mu$  en la figura 2.2. Existe un valor a partir de cuál el término de apantallamiento domina rápidamente al término proporcional a  $1/r$ .

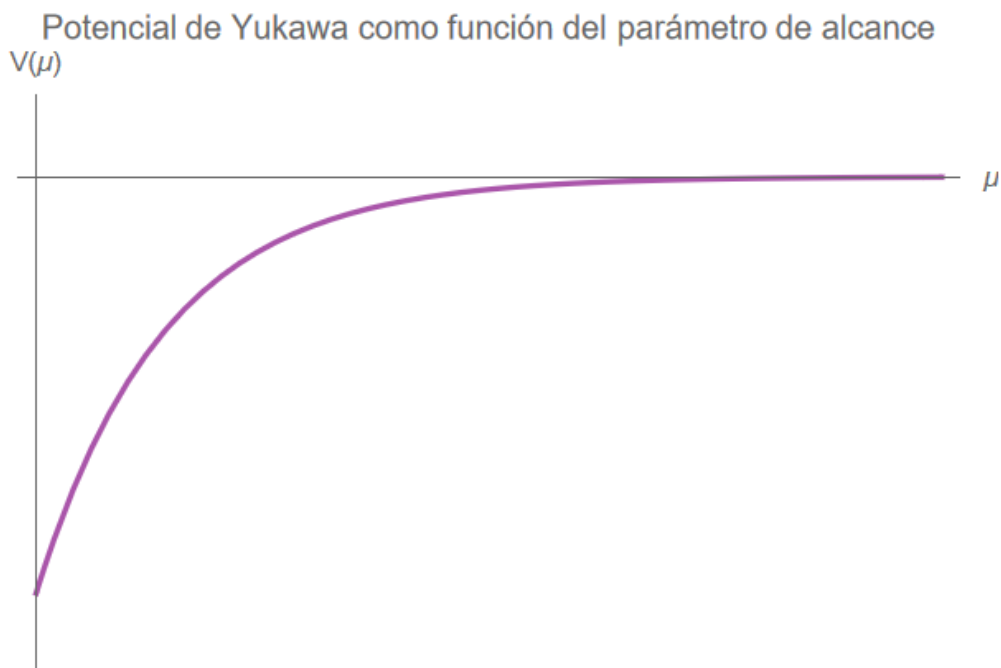


Figura 2.2: Gráfica con  $V_0 = 2$ .

Para un sistema cuyo momento angular sea distinto de cero, aparece el potencial centrífugo  $V_c = \hbar^2 l(l+1)/2mr^2$ . Debido a esto, se considera el sistema bajo la acción de un potencial efectivo  $V_{ef} = V_v + V_{yukawa}$ .



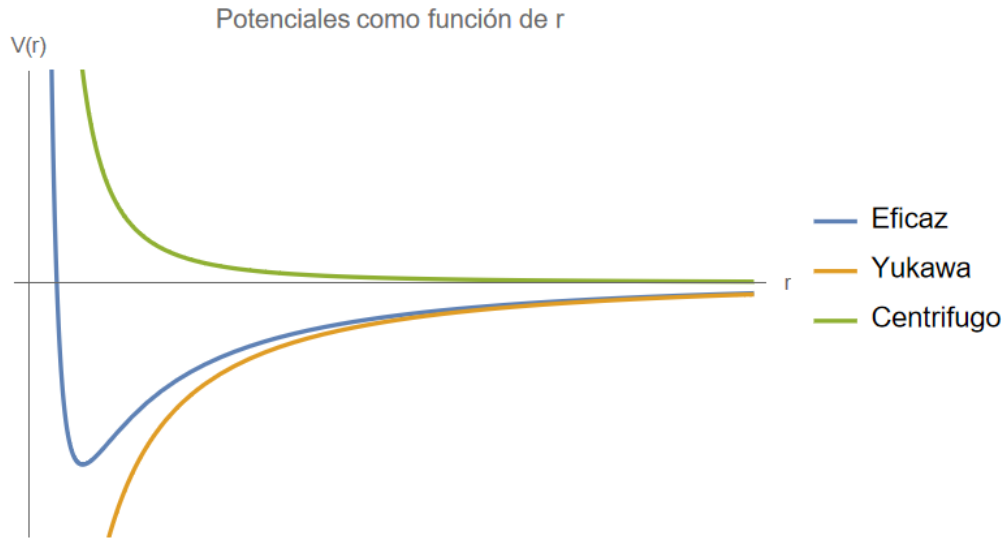


Figura 2.3: Gráfica para  $V_0 = 2, \mu = 1, l = 1, \hbar = 1, m = 15$ .

En la figura 2.3 se muestra el comportamiento mencionado y notamos también la aparición de estados ligados. El mínimo de potencial se encuentra igualando la derivada del potencial eficaz a cero y resolviendo para hallar  $r$ . Debido a que no es posible resolver dicha derivada explícitamente se buscó una solución numérica mediante *Mathematica*, obteniendo un valor de  $r = 5,9084$  cuyas dimensiones son de longitud y se han empleado las mismas constantes que para la gráfica en 2.2.

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, en este caso, nos queda como:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{V_0}{r} e^{-\mu r} \right) \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (2.4)$$

Dado que estamos tratando con un potencial central, sabemos que existe simetría esférica y por lo tanto podemos usar el método de separación de variables. Proponemos entonces que  $\psi(\mathbf{r}) = R_{n,l}(r)Y_{l,m}(\theta, \phi)$ . Nuestra constante de separación será  $l(l+1)$ , lo que nos conduce a poder expresar la ecuación radial de esta manera:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{V_0}{r} e^{-\mu r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u(r) = 0. \quad (2.5)$$

Encontrar una solución analítica para este problema presenta complicaciones y típicamente se resuelve de manera numérica pero en esta ocasión daremos la solución analítica obtenida a partir del método del Ansatz de Bethe, también llamado BAM, por sus siglas en inglés (Bethe Ansatz Method). Antes de continuar resolviendo el problema, se dará una breve descripción de este método.

## 2.1. El método BAM

El método BAM, por sus siglas en inglés (Bethe Ansatz Method) fue desarrollado por Hans Bethe, en 1931, para encontrar las funciones de onda de problemas unidi-

mensionales. Consiste en encontrar una solución polinomial a una ecuación diferencial que tenga la siguiente forma[12]:

$$\left( P(z) \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d}{dz} Q(z) + W(z) \right) S(z) = 0, \quad (2.6)$$

donde  $P(z)$ ,  $Q(z)$  y  $W(z)$  son polinomios de 4°, 3° y 2° orden, respectivamente, y con coeficientes constantes. Podemos expresarlos como:

$$P(z) = \sum_{k=0}^4 a_k z^k, Q(z) = \sum_{k=0}^3 b_k z^k, W(z) = \sum_{k=0}^2 c_k z^k. \quad (2.7)$$

Se quiere hallar el polinomio  $S(z)$  de orden  $n$  dado por:

$$S(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i). \quad (2.8)$$

Las  $z_i$  son las raíces reales y distintas de  $S(z)$  y quedan determinadas por un conjunto de  $n$  ecuaciones algebraicas:

$$c_2 = -n(n-1)a_4 - nb_3, \quad (2.9)$$

$$c_1 = -(2(n-1)a_4 + b_3) \sum_{i=1}^n z_i - n(n-1)a_3 - nb_2, \quad (2.10)$$

$$c_0 = -(2(n-1)a_4 + b_3) \sum_{i=1}^n z_i^2 - 2a_4 \sum_{i<j}^n z_i z_j - (2(n-1)a_3 + b_2) \sum_{i=1}^n z_i^2 - n(n-1)a_2 - nb_1. \quad (2.11)$$

Estas raíces satisfacen las ecuaciones del Ansatz de Bethe:

$$\sum_{j \neq i}^n \frac{2}{z_i - z_j} + \frac{b_3 z_i^3 + b_2 z_i^2 + b_1 z_i + b_0}{a_4 z_i^4 + a_3 z_i^3 + a_2 z_i^2 + a_1 z_i + a_0} = 0, \quad (2.12)$$

donde  $i = 1, 2, 3, \dots$

Las ecuaciones 2.9 a 2.12 dan los polinomios  $W(z)$  de manera que  $S(z)$  es la solución a la ecuación 2.6.

## 2.2. Solución analítica

Continuemos con la solución del problema. Retomemos la ecuación 2.5 y usemos la siguiente aproximación:

$$\frac{1}{r^2} \approx 4\mu^2 \frac{e^{-2\mu r}}{(1 - e^{2\mu r})^2} \implies \frac{1}{r} \approx 2\mu \frac{e^{-\mu r}}{(1 - e^{2\mu r})}, \quad (2.13)$$

con la cuál, el potencial de Yukawa queda reescrito de manera aproximada como:

$$V(r) \approx -2\mu V_0 \frac{e^{-2\mu r}}{1 - e^{-2\mu r}}. \quad (2.14)$$

Esta aproximación es válida siempre que  $\mu$  no sea muy grande. Usaremos también el siguiente cambio de variable (y las derivadas respecto a  $r$  en términos de la nueva variable):

$$x = e^{-2\mu r} dx^2, \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dr} = -2\mu x \frac{d}{dx}, \quad (2.16)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} = 4\mu^2 x \frac{d}{dx} + 4\mu^2 x^2 \frac{d^2}{dx^2}. \quad (2.17)$$

Con lo anterior, la ecuación 2.5 queda como:

$$\left[ 4\mu^2 x \frac{d}{dx} + 4\mu^2 x^2 \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E + 2\mu V_0 \frac{x}{1-x}) - 4\mu^2 l(l+1) \frac{x}{(1-x)^2} \right] u(r) = 0. \quad (2.18)$$

Dividimos 2.18 entre  $4\mu^2 x^2$  y redefinimos  $\varepsilon = -\frac{2mE}{\hbar^2}$  para obtener:

$$\left[ -\frac{\varepsilon}{4\mu^2} \frac{1}{x^2} + \frac{mV_0}{\mu\hbar^2} \frac{1}{x(1-x)} - \frac{l(l+1)}{x(1-x)^2} \right] u(r) + \frac{1}{x} \frac{du(x)}{dx} + \frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0. \quad (2.19)$$

Ahora debemos tratar de reescribir la ecuación 2.19 para que tenga la forma de 2.6. Vamos a asumir que  $u(x)$  tiene la siguiente forma:

$$u(x) = x^{\sqrt{\varepsilon}/2\mu} (1-x)^{l+1} Y(x). \quad (2.20)$$

Sustituimos 2.20 en 2.19 y además introducimos la redefinición de constantes  $A = \sqrt{\varepsilon}/2\mu$  y  $B = mV_0/\mu\hbar^2$ . Obtenemos:

$$\left[ -\frac{A^2}{x^2} + \frac{B}{x(1-x)} - \frac{l(l+1)}{x(1-x)^2} \right] x^A (1-x)^{l+1} Y(x) \dots \\ \dots + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x^A (1-x)^{l+1} Y(x)) + \frac{d^2}{dx^2} (x^A (1-x)^{l+1} Y(x)) = 0. \quad (2.21)$$

Después de hacer el álgebra necesaria para desarrollar las derivadas de los productos y simplificar, llegamos a la siguiente ecuación:

$$[(B - (2A + 1)(l + 1) - l(l + 1))(1 - x) + (B - (2A + 1)(l + 1) - l(l + 1))x] Y(x) \dots \\ \dots + [(2A + 1)(1 - x) - 2(l + 1)] Y'(x) + x(1 - x) Y''(x) = 0. \quad (2.22)$$

Esta ecuación ya tiene la forma requerida y por lo tanto tiene una solución polinomial dada por:

$$Y(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) \quad (2.23)$$

y con  $Y(x) = 1$  para  $n = 0$ . Las  $x_i$  satisfacen las ecuaciones 2.9 a 2.12 y entonces se encuentra que:

$$a_4 = a_3 = a_0 = 0, a_2 = -1, a_1 = 1, \quad (2.24)$$

$$b_3 = b_2 = 0, b_1 = -2(l+1) - 2\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\mu} + \frac{1}{2}\right), b_0 = 2\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\mu} + \frac{1}{2}\right), \quad (2.25)$$

$$c_2 = c_1 = 0, c_0 = \frac{mV_0}{\hbar^2\mu} - 2\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\mu} + \frac{1}{2}\right)(l+1) - l(l+1). \quad (2.26)$$

Comparamos las expresiones obtenidas con las ecuaciones 2.9 a 2.11 y haciendo el álgebra necesaria podemos encontrar el espectro energético. La expresión es:

$$E_{n,l} = -\frac{\hbar^2\mu^2}{2m} \left( \frac{\frac{mV_0}{\hbar^2\mu} - (n+l+1)^2}{n+l+1} \right)^2. \quad (2.27)$$

Si tomamos el potencial de Yukawa en el límite cuando  $\mu \rightarrow 0$ , la exponencial tiende a 1 y recuperamos el potencial de Coulomb  $V = -V_0/r$ . Reescribamos la ecuación 2.27 como:

$$E_{n,l} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\mu\left(\frac{mV_0}{\hbar^2\mu} - (n+l+1)^2\right)}{n+l+1} \right)^2$$

$$E_{n,l} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\left(\frac{mV_0}{\hbar^2} - \mu(n+l+1)^2\right)}{n+l+1} \right)^2. \quad (2.28)$$

Tomamos el límite cuando  $\mu \rightarrow 0$  y obtenemos:

$$E_{n,l} = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2} \frac{1}{(n+l+1)^2}. \quad (2.29)$$

Podemos notar que también obtenemos el espectro energético para el potencial de Coulomb al tomar el mismo límite. Lo único restante por hacer sería redefinir  $n' = n + l + 1$  para poder reescribir 2.29 como:

$$E_{n,l} = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2} \frac{1}{n'^2}. \quad (2.30)$$

De la ecuación 2.27 y recordando que  $E_n = \hbar^2 k_n^2 / 2m$ , podemos deducir que los polos se encuentran en:

$$k_n = \mu \left( \frac{\frac{mV_0}{\mu\hbar^2} - (n+l+1)^2}{n+l+1} \right) i. \quad (2.31)$$

Notemos que naturalmente queda impuesta la condición:

$$n + l + 1 < \sqrt{mV_0/\mu\hbar^2}, \quad (2.32)$$

que garantiza que los polos se encuentren en el eje imaginario positivo.

El comportamiento de estos polos para distintos valores de  $n$  se puede visualizar en la figura 2.4. A medida que  $\mu$  incrementa vemos que la parte imaginaria de los polos disminuye lo cual tiene sentido físico. Pensemos en una carga positiva rodeada de algunas cargas negativas. En este caso el parámetro  $\mu$  se asocia con la distancia a la que se encuentran las cargas negativas de aquella carga positiva que están cubriendo. Si esta distancia es muy grande entonces una partícula externa pasa cerca de esa capa de cargas negativas sin poder percibir a la carga positiva que se encuentra en el centro.

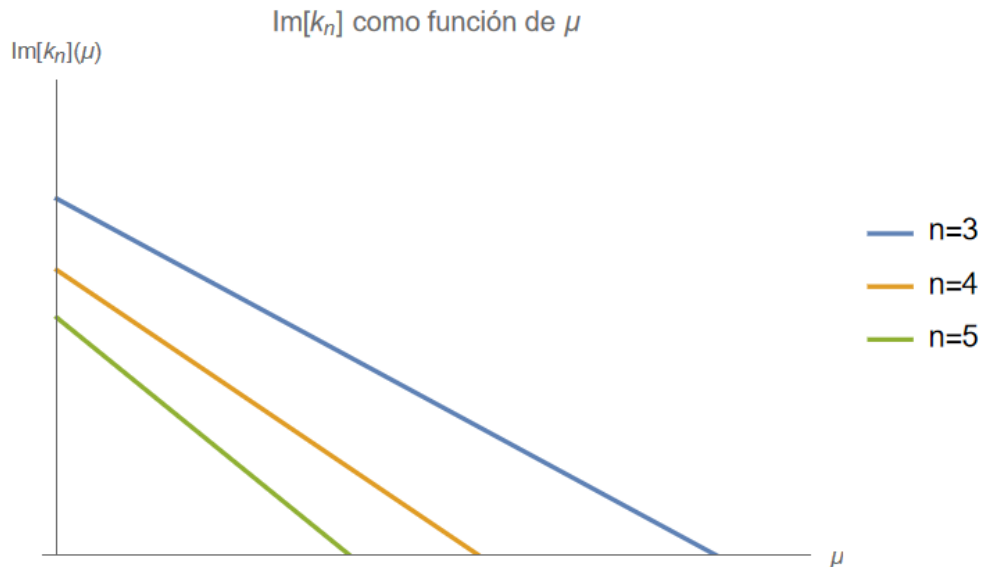


Figura 2.4: Se ha tomado  $l = 0$  para estos casos.

Aunque no se realizó el procedimiento para encontrar explícitamente la matriz  $S$ , conocemos la expresión para sus polos y eso es suficiente para ilustrar el método explicado en el capítulo anterior en este problema.

El potencial de Yukawa se puede considerar de rango finito debido al comportamiento exponencial, que decae rápidamente. En la primera parte de este trabajo se vio que la matriz  $S$  para sistemas de este tipo, tiene el siguiente comportamiento asintótico:

$$S(k) \simeq e^{-2ika} \frac{-U_0}{(2k)^2}, \quad (2.33)$$

donde  $a$ , es el parámetro que determina el alcance del potencial, que en nuestro problema sería  $\mu$ .

Considerando la ubicación de los polos y el comportamiento asintótico de la matriz, podemos construir una función auxiliar como se explicó en el capítulo anterior:

$$f(k) = \prod_{n=1} \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} \frac{S(k)}{e^{-2ik\mu}}. \quad (2.34)$$

Ya vimos que los factores introducidos en 2.34 se comportan como una fase, así como también el término  $e^{-2ik\mu}$  por lo que la función propuesta está correctamente acotada, es decir, cumple  $|f(k)| \leq 1$ .

En este caso, la cota para el acoplamiento de uno de los polos es:

$$\frac{g^2}{2\kappa_n e^{2\kappa_n\mu}} \leq 1 \implies 0 \leq g^2 \leq 2\kappa_n e^{2\kappa_n\mu}. \quad (2.35)$$

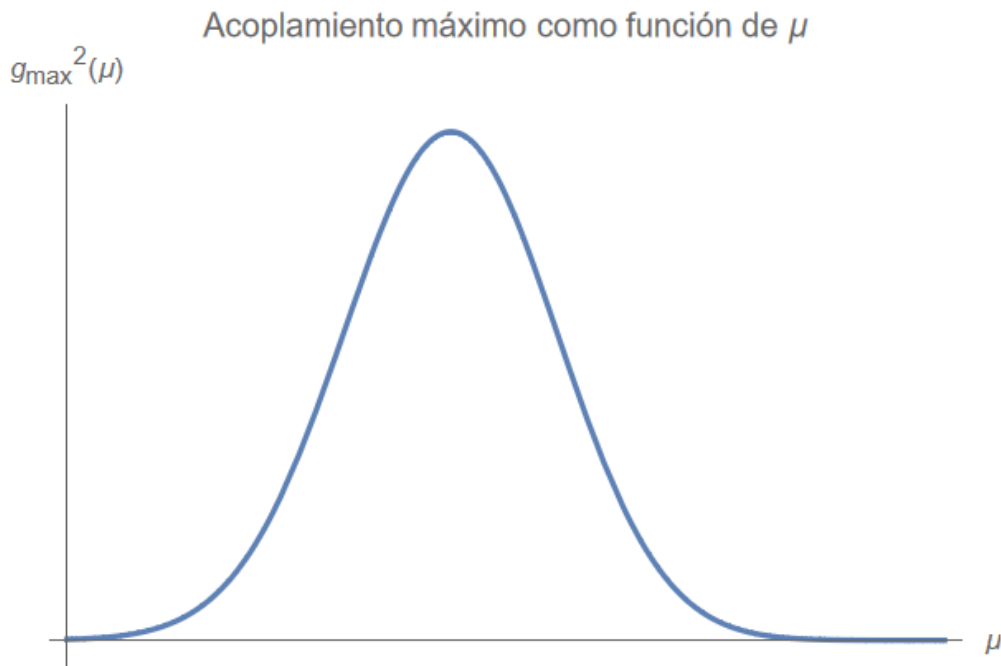


Figura 2.5: Caso para  $n = 3$ .

Recordemos que  $\mu$  es el parámetro del alcance del potencial de Yukawa. Si este parámetro es demasiado pequeño es posible considerarlo como un potencial ultra local. Notemos que si tomamos el límite cuando  $\mu \rightarrow 0$  en la ecuación 2.35 se recupera el resultado dado en 1.32. A pesar de que conocemos la cota superior para el acoplamiento en sistemas de este tipo, conocer el valor exacto para cada polo requiere contar con la matriz  $S$  de forma explícita.

# Conclusiones

El método *Bootstrap* es una alternativa versátil para estudiar sistemas cuyas características generales se puedan relacionar con las restricciones que rigen el Principio de Módulo Máximo. El MMP es efectivo al emplearlo junto con el método de *Bootstrap* ya que es una herramienta matemática que permite establecer relaciones entre el círculo unitario en el plano complejo y regiones de interés específicas dependiendo del problema en cuestión. En este caso, el semiplano superior (UHP) se identificó como la región relevante para analizar la matriz de dispersión  $S(k)$ , y su conexión con el círculo unitario permitió imponer cotas superiores a los acoplamientos de estados ligados.

Este enfoque permitió interpretar los polos de  $S(k)$  en términos de estados ligados y resonancias metaestables, resaltando la potencia del análisis complejo en sistemas físicos. Sin embargo, al abordar el potencial de Yukawa, los resultados numéricos no fueron concluyentes debido a desafíos en la resolución de la ecuación de Schrödinger radial y la obtención explícita de  $S(k)$ . A pesar de estas dificultades, el trabajo demostró la capacidad de combinar herramientas teóricas como el Principio de Módulo Máximo y el método Bootstrap para abordar problemas relacionados con interacciones fuertes.

En conclusión, este proyecto no solo avanzó en la comprensión teórica de estos métodos, sino que también sienta las bases para futuras investigaciones que busquen superar las limitaciones numéricas encontradas y extender este marco a otros problemas como pueden ser en el área de plasma (Potencial de Debye-Hückel), en estado sólido (Potencial de Thomas Fermi.) o en modelos de interacciones entre cuasipartículas. La combinación del análisis complejo y herramientas numéricas promete abrir nuevas perspectivas para el estudio de interacciones fundamentales y sus restricciones.





# Bibliografía

- [1] Mark Thomson. *Modern Particle Physics*. Cambridge University Press, 2013.
- [2] Andrew. Jackura. “Studies in multiparticle scattering theory”. Tesis de mtría. Indiana University, 2019.
- [3] David Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2018.
- [4] J.J. Sakurai. *Modern quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2011.
- [5] Francisco J. Luján A. “El programa Bootstrap de la matriz S en sistemas fuertemente acoplados”. Proyecto Terminal I, UAM Iztapalapa.
- [6] Marcos Hernández. “The S-Matrix Bootstrap bounds on coupling”. Tesis de mtría. Universidad de Colima, 2023.
- [7] Elías Stein y Rami Shakarchi. *Complex Analysis*. Princeton University Press, 2003.
- [8] Emilio Hernández-Abreu y Mario Martínez-Pérez. “El método Bootstrap en la estimación de incertidumbres.” En: *Boletín Científico Técnico INIMET* (2012).
- [9] Antonio Solanas y Vicenta Sierra. “Bootstrap: fundamentos en introducción a sus aplicaciones”. En: *Anuario de Psicología* (1992).
- [10] Pedro Vieira. “(Slow and unidimensional) S-matriz Bootstrap”. En: *Journeys into Theoretical Physics School* (2022).
- [11] Antonio Ferrer. *Física nuclear y de partículas*. Publicacions de la Universitat de València, 2006.
- [12] Mohammadi Sabet. “Solution of radial Schrödinger equation with Yukawa potential using Bethe Ansatz Methos”. En: *Acta Physica Polonica A* (2021).