



**UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
METROPOLITANA**
Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Licenciatura en Física

Proyecto Terminal I: Investigación teórica

**ACOPLAMIENTO DISIPATIVO EN
EXCITONES-POLARITONES**

REALIZADO POR: **Diego Armando Mendoza Cruz**

MATRÍCULA: **2203008559.**

PARA OBTENER EL GRADO DE: **Licenciatura en Física**

ASESOR: **DR. MIGUEL ANGEL BASTARRACHEA MAGNANI**

COORDINADOR: **DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARÍA**

7 DE MAYO DE 2025

IZTAPALAPA, CIUDAD DE MÉXICO

Índice

1. Introducción	3
1.1. Excitones-polaritones	3
2. Polaritones en acoplamiento coherente	5
2.1. Masa efectiva	10
3. Disipación en excitones-polaritones	13
3.1. Caso 1	14
3.1.1. Masa efectiva, caso 1	17
3.2. Caso 2	20
3.2.1. Masa efectiva, caso 2	24
3.3. Caso 3	30
3.3.1. Masa efectiva, caso 3	35
4. Interpretación clásica del acoplamiento	40
4.1. Caso 1	45
4.2. Caso 2	49
4.3. Caso 3	52
5. Conclusiones	57

Resumen

Los excitones-polaritones son estados de cuasipartículas que resultan del acoplamiento fuerte entre luz y materia, dando lugar a estados cuánticos híbridos que heredan las características de ambas partes, como la ligera masa efectiva de su parte fotónica y las interacciones coulombianas repulsivas de su parte excitónica. Tales características pueden ser aprovechadas para la creación de estados macroscópicos como condensados, superfluidos o los llamados fluidos cuánticos de luz. De modo que un mejor entendimiento de los excitones-polaritones es deseable para el desarrollo de los ya mencionados estados macroscópicos y nuevas tecnologías. Debido a la configuración del sistema, los excitones-polaritones son un sistema que puede interactuar con sus alrededores por medio de términos disipativos, en este trabajo se estudia cómo la disipación, principalmente en el acoplamiento, modifica las propiedades del sistema. Además, para una mejor comprensión fenomenológica del sistema, estudiaremos el caso de dos osciladores clásicos acoplados, con diferentes fuentes de disipación.

Palabras clave: Acoplamiento coherente, acoplamiento disipativo, masa efectiva negativa, atracción de niveles, repulsión de niveles, puntos excepcionales.

1. Introducción

Normalmente, el paradigma de un buen experimento en física, es aquel en el que se pueda aislar al sistema de interés lo mayor posible de todas las fuentes de ruido que puedan alterarlo, y por lo tanto, supondrían un obstáculo en el descubrimiento de las propiedades intrínsecas del sistema en cuestión. Este proceder ha llevado a la idealización de sistemas completamente aislados, es decir, siempre apuntar a eliminar todo rastro de variables externas que modifiquen nuestro sistema y supongan una dificultad a la hora de descubrir la verdadera naturaleza del mismo. Sin embargo, esta imagen contrasta con el estudio de sistemas cuánticos, donde las interacciones con su entorno forman parte fundamental de las propiedades que exhiben [1, 2].

La posibilidad de que existan interacciones efectivas entre fotones lo suficientemente frecuentes para generar efectos colectivos, es una idea que atrajo la atención de los físicos durante los últimos años. Para lograr esto, una de las configuraciones que más ha sido estudiada es aquella donde luz y materia están acoplados fuertemente, lo que quiere decir que la energía de interacción es mayor que la pérdida de energía en el sistema [3, 4]. Este acoplamiento da lugar a una cuasipartícula llamada polaritón [5, 6]. Esto se obtiene a través de microcavidades ópticas, las cuales son resonadores ópticos que se encuentran en el orden de la longitud de onda de la luz, dentro se encuentra una capa delgada de un semiconductor [5]. Al confinar a la luz dentro de la cavidad por se aumentan las posibilidades de lograr el acoplamiento luz-materia. Un esquema de una microcavidad se presenta en la Figura 1(a).

En este trabajo, se estudiará un sistema de excitones-polaritones con términos disipativos, tanto en el sistema no interactuante como en el acoplamiento. Como mencionamos, el estudio de un sistema cuántico que interactúa con sus alrededores ya posee un interés en sí mismo. Además, el acoplamiento disipativo supone aplicaciones interesantes como controlar la dirección de propagación mediante ingeniería en la disipación [7] o conectar osciladores separados mediante interacciones disipativas no locales [8]. Esto se ha caracterizado en sistemas cuánticos como magnones [8] y más recientemente en polaritones [9].

1.1. Excitones-polaritones

Los semiconductores son materiales que pueden ser caracterizados mediante el modelo de bandas. En este modelo existen dos bandas de energía permitidas, la de valencia y la de conducción. Dichas bandas están separadas por una zona no permitida determinada por una brecha o *gap* de energía. Con este modelo, los semiconductores son aquellos materiales cuya banda de valencia está casi llena y la de conducción vacía [6]. Se les llama semiconductores debido a que bajo ciertas condiciones pueden comportarse como aislantes o conductores, por ejemplo: la temperatura a la que se encuentren, el campo eléctrico o magnético al que estén sometidos [10].

Para que un electrón en la banda de valencia pase a la de conducción, se le debe dar una energía igual o mayor a la brecha, como se ilustra en la Figura 1(b), lo cual puede lograrse mediante un haz de luz que excite a los electrones. Cuando esto pasa, el electrón excitado

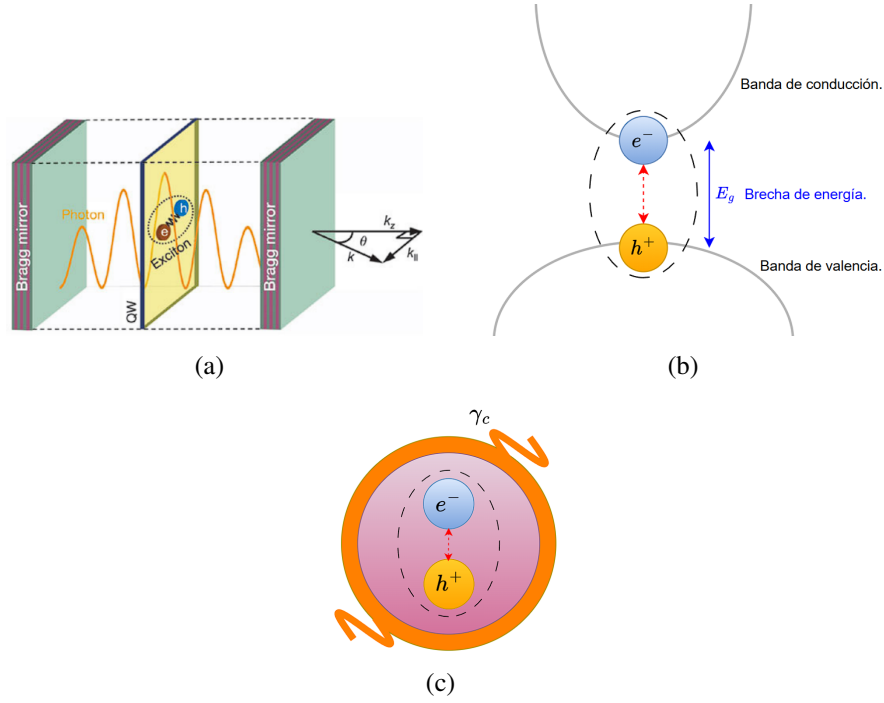


Figura 1: (a) Esquema de una microcavidad tomado de la Ref. [5]. Esquemas del modelo de bandas que describe la creación de los excitones y la interacción luz-materia en los excitones-polaritones, (b) y (c), respectivamente.

deja tras de sí un hueco con carga neta positiva formando un par ligado electrón-hueco, dando lugar a lo que se conoce como excitón [11, 12].

La interacción entre el electrón en la banda de conducción y el hueco en la de valencia, es de tipo coulombiana, por lo tanto el excitón puede verse como una partícula tipo átomo de hidrógeno. Con esto en cuenta, podemos escribir el Hamiltoniano del excitón como:

$$\hat{H}_{eh} = \frac{\mathbf{p}_e^2}{2m_e} + \frac{\mathbf{p}_h^2}{2m_h} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon |\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h|}$$

Donde \mathbf{p}_e y \mathbf{p}_h son los momentos del electrón y el hueco, respectivamente. Por tratarse de un sistema análogo al átomo de hidrógeno, lo resolvemos de manera usual, definimos la coordenada del centro de masa \mathbf{R} y la coordenada relativa \mathbf{r} . Con esto construimos un Hamiltoniano que es separable ante estas dos coordenadas:

$$\hat{H}_{eh} = \hat{H}_1(\mathbf{P}, \mathbf{R}) + \hat{H}_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{4\pi|\mathbf{r}|}$$

Con $M = m_e + m_h$ y μ la masa reducida. Dada esta forma del hamiltoniano, los niveles de energía son:

$$E_n = E_g + \frac{\mathbf{P}^2}{2M} - \frac{R_x}{n^2}$$

Donde $R_x = e^2/(2\epsilon a_{0,x})$, $a_{0,x}$ es el radio de Bohr y ϵ es la permitividad eléctrica del material, por lo que es un modelo mesoscópico. En efecto, los niveles de energía son

iguales a los del átomo de hidrógeno, sin embargo, al tomar un excitón en el estado base y considerando que el momento del centro de masa es cero, la energía puede aproximarse a:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^x = \varepsilon_0^x + \varepsilon_{\mathbf{k}}^e + \varepsilon_{\mathbf{k}}^h = \varepsilon_0 + \frac{\mathbf{k}^2}{2m_x} \quad (1.1)$$

donde m_x es la masa del excitón. También se ha usado $\hbar = 1$.

Cuando el electrón de la banda de valencia pasa a la de conducción, por lo general, en el contexto de los semiconductores, el electrón caerá de nueva cuenta al estado de mínima energía, absorbiendo un fotón. Dentro de una cavidad como la de la figura 1(a), el acoplamiento fuerte entre luz y materia da lugar al excitón-polaritón [6], un pequeño esquema descriptivo se muestra en la Figura 1(c). Dentro de la cavidad, la energía del fotón confinado está dada por [13]:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^c = \frac{\hbar c}{n_c} \sqrt{k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2} \quad (1.2)$$

Donde \hbar es la constante de Planck, c es la velocidad de la luz, $k_{\perp} = 2\pi n_c / \lambda_c$ es el número de onda en la dirección de confinamiento, n_c es el índice de refracción del medio dentro de la cavidad, λ_c la longitud de onda del modo confinado y $k_{\parallel} = n_c 2\pi / \lambda_c \tan \sin^{-1}(\sin \theta / n_c) \approx 2\pi \theta / \lambda_c$ es el número de onda en la dirección paralela a los espejos con θ el ángulo de incidencia, tal como se ve en la Figura 1(a). Si asumimos $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$ podemos hacer un desarrollo en serie:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^c \approx \varepsilon_0^c + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_c} \quad (1.3)$$

donde $\varepsilon_0^c = \varepsilon^c(k_{\parallel} = 0) = \hbar c k_{\perp} / n_c$ es la energía a momento cero, además el fotón adquiere una masa efectiva por estar confinado, ésta es $m_c = n_c^2 \varepsilon^c(k_{\parallel} = 0) / c^2$. Por lo tanto, si trabajamos en unidades naturales, y además hacemos $k_{\parallel} = \mathbf{k}$, tendremos que la energía de un fotón confinado en la microcavidad, en términos de la masa efectiva que adquiere, es:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^c = \varepsilon_0^c + \frac{\mathbf{k}^2}{2m_c} \quad (1.4)$$

2. Polaritones en acoplamiento coherente

Habiendo presentado qué es un polaritón, podemos escribir el hamiltoniano que describe el acoplamiento coherente entre luz y materia dentro de la cavidad como:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \begin{bmatrix} \hat{x}_{\mathbf{k}}^{\dagger} & \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{k}}^x & \Omega \\ \Omega & \varepsilon_{\mathbf{k}}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{\mathbf{k}} \\ \hat{c}_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

El cual podemos desarrollar para identificar cada término:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} [\varepsilon_{\mathbf{k}}^x \hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{k}}^c \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} + \Omega(\hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} + \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}})] \quad (2.2)$$

Donde $\varepsilon_{\mathbf{k}}^x$ y $\varepsilon_{\mathbf{k}}^c$ representan la energía de un excitón y un fotón con momento \mathbf{k} , respectivamente, de acuerdo a las ecuaciones 1.1 y 1.4. Además, $\hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger$, $\hat{x}_{\mathbf{k}}$, $\hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger$ y $\hat{c}_{\mathbf{k}}$ son los operadores de creación y aniquilación de la parte excitónica y fotónica, en ese orden. Con estos operadores obtenemos el operador número para la parte excitónica $\hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}} = \hat{n}_{\mathbf{k}}$ el cual representa el número de excitones en el estado $\nu_{\mathbf{k}}$ con momento \mathbf{k} , de igual forma para la parte fotónica tenemos que $\hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}}$ es el número de fotones con momento \mathbf{k} ; por lo tanto, el número total de excitones y fotones de nuestro sistema es $\sum_{\mathbf{k}} \hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}}$ y $\sum_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}}$, respectivamente.

Con estas definiciones y de acuerdo a la segunda cuantización [14, 15], los primeros dos términos de la ecuación 2.2 corresponden a la energía de la parte excitónica y fotónica. Por otro lado, Ω nos da la frecuencia de acoplamiento entre el fotón y el excitón, que en este caso es real. El término cruzado $\hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}}$ nos dice que se añade un excitón pero se extrae un fotón, mientras que el término $\hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}}$ quita un excitón y añade un fotón. En resumen, el tercer término de 2.2 representa el acoplamiento entre luz y materia [12].

El hamiltoniano de la ecuación 2.1 puede ser diagonalizado mediante la siguiente transformación:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{\mathbf{k}} \\ \hat{c}_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\mathbf{k}} & S_{\mathbf{k}} \\ -S_{\mathbf{k}} & C_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{L}_{\mathbf{k}} \\ \hat{U}_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

La cual nos define los operadores que crean a los polaritones inferiores (*lower polariton*) y los superiores (*upper polariton*), $\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger$ y $\hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger$ respectivamente. Donde $C_{\mathbf{k}}$ y $S_{\mathbf{k}}$, se conocen como los coeficientes de Hopfield [11], los cuales nos dan la fracción de luz y materia que existe en nuestro sistema. Los coeficientes están normalizados debido a que si queremos la fracción de luz y materia, y además no hay ninguna disipación, la suma de ambos debe dar uno.

$$C_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2}} \right) \quad \text{y} \quad S_{\mathbf{k}}^2 = 1 - C_{\mathbf{k}}^2 \quad (2.4)$$

Por lo que nos gustaría escribir nuestro hamiltoniano en términos de los operadores $\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger$ y $\hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger$ y las eigenenergías de cada operador. Partimos de la transformación 2.3 para encontrar las siguientes igualdades entre operadores:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\mathbf{k}} &= C_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}} + S_{\mathbf{k}} \hat{U}_{\mathbf{k}} \\ \hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger &= C_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger + S_{\mathbf{k}} \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \\ \hat{c}_{\mathbf{k}} &= -S_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}} + C_{\mathbf{k}} \hat{U}_{\mathbf{k}} \\ \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger &= -S_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger + C_{\mathbf{k}} \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \end{aligned}$$

Sustituimos esto en el Hamiltoniano de 2.2 para cada término, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathbf{k}}^x \hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}} &= \varepsilon_{\mathbf{k}}^x \left(C_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger + S_{\mathbf{k}} \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \right) \left(C_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}} + S_{\mathbf{k}} \hat{U}_{\mathbf{k}} \right) \\ &= \varepsilon_{\mathbf{k}}^x \left(C_{\mathbf{k}}^2 \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} + S_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} \left(\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} + \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} \right) + S_{\mathbf{k}}^2 \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} \right)\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathbf{k}}^c \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} &= \varepsilon_{\mathbf{k}}^c \left(-S_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger + C_{\mathbf{k}} \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \right) \left(-S_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}} + C_{\mathbf{k}} \hat{U}_{\mathbf{k}} \right) \\ &= \varepsilon_{\mathbf{k}}^c \left(S_{\mathbf{k}}^2 \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} + C_{\mathbf{k}}^2 \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} - S_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} \left(\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} + \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} \right) \right)\end{aligned}\quad (2.6)$$

Ahora seguimos con los términos cruzados del hamiltoniano:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} &= \left(C_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger + S_{\mathbf{k}} \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \right) \left(-S_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}} + C_{\mathbf{k}} \hat{U}_{\mathbf{k}} \right) \\ &= C_{\mathbf{k}}^2 \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} - S_{\mathbf{k}}^2 \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} + C_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{k}} \left(\hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} - \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} \right)\end{aligned}\quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}\hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}} &= \left(-S_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger + C_{\mathbf{k}} \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \right) \left(C_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}} + S_{\mathbf{k}} \hat{U}_{\mathbf{k}} \right) \\ &= C_{\mathbf{k}}^2 \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} - S_{\mathbf{k}}^2 \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} + S_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} \left(\hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} - \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} \right)\end{aligned}\quad (2.8)$$

Como ya tenemos todos los términos que aparecen en nuestro Hamiltoniano puestos como función de los nuevos operadores, reescribimos la expresión recordando la definición de $S_{\mathbf{k}}$ en términos de $C_{\mathbf{k}}$ y agrupando términos semejantes obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{\mathbf{k}}^x \hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{k}}^c \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} + \Omega (\hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} + \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}}) = \\ &\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} \left(\varepsilon_{\mathbf{k}}^x C_{\mathbf{k}}^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^c (1 - C_{\mathbf{k}}^2) - 2\Omega C_{\mathbf{k}} \sqrt{1 - C_{\mathbf{k}}^2} \right) + \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} \left(\varepsilon_{\mathbf{k}}^x (1 - C_{\mathbf{k}}^2) + \varepsilon_{\mathbf{k}}^c C_{\mathbf{k}}^2 + 2\Omega C_{\mathbf{k}} \sqrt{1 - C_{\mathbf{k}}^2} \right) \\ &+ (\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} + \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}}) \left((\varepsilon_{\mathbf{k}}^x - \varepsilon_{\mathbf{k}}^c) C_{\mathbf{k}} \sqrt{1 - C_{\mathbf{k}}^2} + \Omega (2C_{\mathbf{k}}^2 - 1) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{\mathbf{k}}^x \hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{k}}^c \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} + \Omega (\hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} + \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}}) = \\ &\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} \left(\varepsilon_{\mathbf{k}}^x C_{\mathbf{k}}^2 - \varepsilon_{\mathbf{k}}^c C_{\mathbf{k}}^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^c - 2\Omega C_{\mathbf{k}} \sqrt{1 - C_{\mathbf{k}}^2} \right) + \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} \left(\varepsilon_{\mathbf{k}}^c C_{\mathbf{k}}^2 - \varepsilon_{\mathbf{k}}^x C_{\mathbf{k}}^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^x + 2\Omega C_{\mathbf{k}} \sqrt{1 - C_{\mathbf{k}}^2} \right) \\ &+ (\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} + \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}}) \left(C_{\mathbf{k}} \sqrt{1 - C_{\mathbf{k}}^2} (\varepsilon_{\mathbf{k}}^x - \varepsilon_{\mathbf{k}}^c) + \Omega (2C_{\mathbf{k}}^2 - 1) \right) = \\ &\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} \left(-\delta_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}}^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^c - 2\Omega C_{\mathbf{k}} \sqrt{1 - C_{\mathbf{k}}^2} \right) + \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} \left(\delta_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}}^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^x + 2\Omega C_{\mathbf{k}} \sqrt{1 - C_{\mathbf{k}}^2} \right) \\ &+ (\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} + \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}}) \left(C_{\mathbf{k}} \sqrt{1 - C_{\mathbf{k}}^2} \delta_{\mathbf{k}} + \Omega (2C_{\mathbf{k}}^2 - 1) \right)\end{aligned}$$

Dada la última expresión, sustituimos explícitamente a los coeficientes de Hopfield. Después de simplificar un poco llegamos a la expresión deseada:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^x \hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{k}}^c \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} + \Omega(\hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} + \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}}) = \\ \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{\mathbf{k}}^c + \varepsilon_{\mathbf{k}}^x - \sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2} \right) + \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{\mathbf{k}}^c + \varepsilon_{\mathbf{k}}^x + \sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2} \right)$$

Dentro de los paréntesis encontramos a los eigenvalores que diagonalizan al Hamiltoniano con los correspondientes operadores para los polaritones superiores $\hat{U}_{\mathbf{k}}$ e inferiores $\hat{L}_{\mathbf{k}}$:

$$\varepsilon^{UP,LP} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\mathbf{k}} + 2\varepsilon_{\mathbf{k}}^x \pm \sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2} \right) \quad (2.9)$$

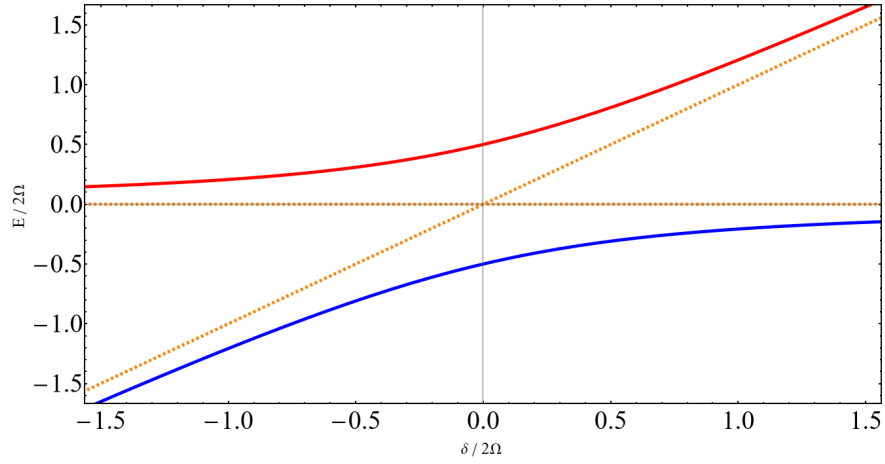
Donde $\delta_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}}^c - \varepsilon_{\mathbf{k}}^x$ es la desintonización, para $k = 0$ tenemos que: $\delta = \varepsilon_0^c - \varepsilon_0^x$ donde se toma, por conveniencia $\varepsilon_0^x = 0$. De tal forma que podemos reescribir el Hamiltoniano en forma diagonal:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \begin{bmatrix} \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger & \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{LP} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\mathbf{k}}^{UP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{L}_{\mathbf{k}} \\ \hat{U}_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{LP} + \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{UP} \quad (2.10)$$

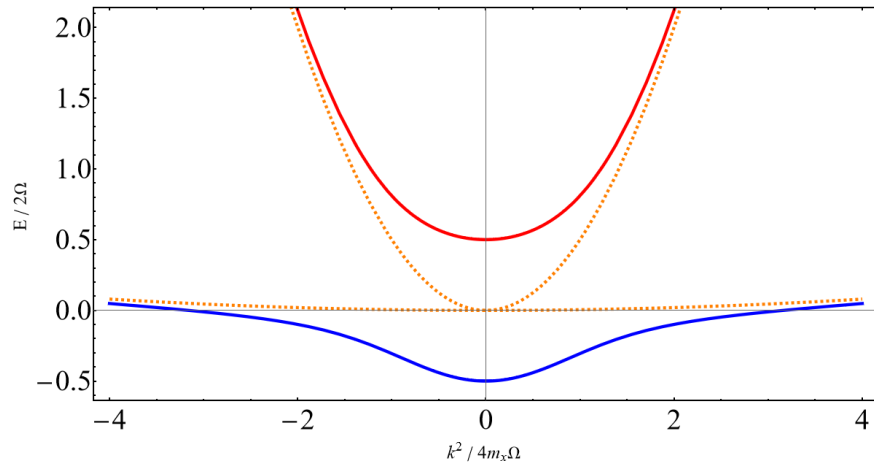
El espectro de energía de los polaritones se muestra en la Figura 2, donde la gráfica como función de la desintonización 2(a) nos proporciona información acerca de qué parte de la energía domina, si la material o la fotónica; por ejemplo, para los polaritones inferiores conforme δ crece vemos que la energía se aproxima asintóticamente a la de la parte material, y cuando δ es negativo la energía tiende a aproximarse a la parte fotónica. Lo importante es notar que en ésta gráfica la energía de los polaritones siempre se aproxima asintóticamente a la de la parte fotónica y excitónica, nunca cruza estas cotas, exhibiendo una clara repulsión de niveles entre ambos modos, propio del acoplamiento coherente [3, 4, 16]. Del mismo modo, en la Figura 2(b) vemos que la dispersión de los polaritones con respecto al momento también se aproxima de manera asintótica a las energías de los excitones y fotones por sí solos, además, el aspecto de la relación de dispersión es casi parabólico, de modo que para el caso coherente no encontramos una dispersión que sea evidentemente anómala [17].

De manera similar, en la gráfica de la energía con respecto al momento, vemos una repulsión de niveles, es importante notar que en esta gráfica estamos haciendo a la desintonización cero, es decir, cuando la diferencia de la energía a momento cero entre la parte fotónica y excitónica es cero. Por lo tanto, lo que se ve en este caso es en el momento de máxima interacción luz-materia.

En la figura 3 podemos ver cómo se comportan los coeficientes de Hopfield vemos que cuando $\delta > 0$ la parte fotónica domina frente a la material y cuando $\delta < 0$ todo lo contrario. Esto en concordancia a lo que observamos en la gráfica de la energía en función de la desintonización, ya que dependiendo del intervalo donde se encuentre el valor de δ la energía se aproxima más a la parte material o fotónica, según sea el caso. Más adelante esto cobrará relevancia en las masas efectivas y en el caso disipativo.



(a) Energía como función de la desintonización.



(b) Energía como función del momento.

Figura 2: Espectro de energía de los excitones-polaritones. En rojo los polaritones superiores y en azul los polaritones inferiores, además, se muestra en naranja la energía de los excitones y fotones por separado. Donde se ha tomado la masa efectiva del fotón como $m_c = 10^{-4}m_x$.

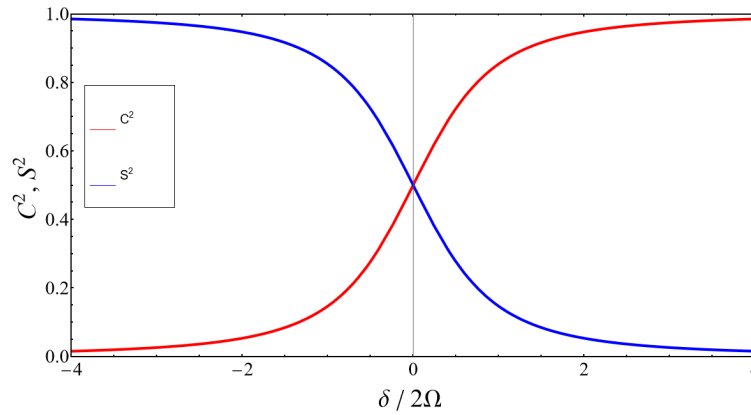


Figura 3: Coeficientes de Hopfield en función de la desintonización.

2.1. Masa efectiva

En el caso puramente clásico, la primera definición de masa la encontramos en la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, de modo que la idea de una masa dependiente de las interacciones con sus alrededores no parece tan evidente. En física del estado sólido la idea de masa efectiva fue introducida para estudiar el movimiento de electrones dentro de potenciales periódicos en redes cristalinas [10]. En consecuencia, el concepto de masa efectiva nos proporciona una manera de entender el comportamiento de cuasipartículas que interactúan con sus alrededores de manera significativa. Recordemos que la *relación de dispersión* es la energía del sistema en función del momento. La masa efectiva estará relacionada con la curvatura de la relación de dispersión, por lo tanto, en aquellos sistemas donde aparezca una relación de dispersión anómala (no parabólica) la masa efectiva dependerá de los parámetros relevantes del sistema [18].

Como dijimos, la masa efectiva está relacionada con la relación de dispersión de nuestro sistema [18, 19, 9]. De manera general, podemos hacer un desarrollo en serie de Taylor de la siguiente forma:

$$E_{\mathbf{k}} \approx E_0 + \frac{k_0(k - k_0)}{m_1(k_0)} + \frac{(k - k_0)^2}{2m_2(k_0)} + \dots \quad (2.11)$$

De donde obtenemos los siguientes resultados para los parámetros de m_1 y m_2 :

$$m_1 = k \left(\frac{\partial E}{\partial k} \right)^{-1} \quad \text{y} \quad m_2 \equiv m^* = \left(\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \right)^{-1} \quad (2.12)$$

Donde m_1 es la *masa inercial* del paquete de ondas con velocidad de grupo $v_g = \partial_k E(k)$, entonces podemos pensar a m_1 como la masa asociada al movimiento clásico del sistema. Por otro lado, m_2 describe la aceleración del paquete de ondas en presencia de una fuerza externa, también se le asocia con el esparcimiento del paquete y por eso también se le llama la *masa de difusión* [18, 9]. Puestos de manera explícita, es evidente que los parámetros de masa estarán relacionados con la curvatura de la relación de dispersión; en

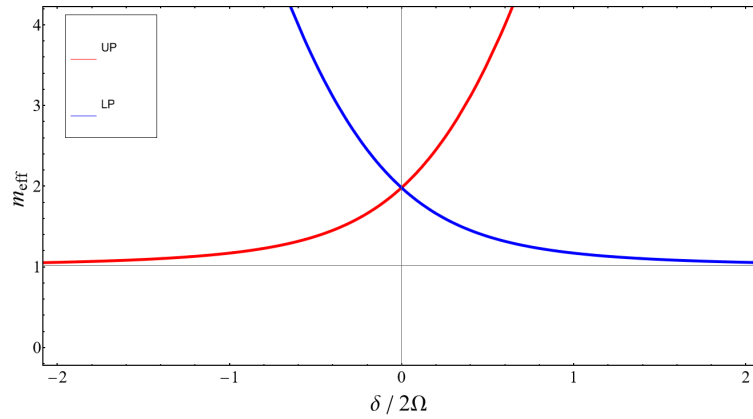


Figura 4: Masa efectiva difusa para los polaritones superiores e inferiores como función de la desintonización.

particular, para una relación de dispersión parabólica la primer derivada se hace cero y por lo tanto $m_1 = 0$.

En nuestro caso, nos interesa saber el comportamiento de la masa efectiva para los polaritones superiores e inferiores, para obtener la masa efectiva debemos evaluar a momento cero, de este modo el único parámetro relevante será m^* y estará en términos de la desintonización. Esto debido a que queremos observar el comportamiento de la masa dependiendo de si la parte dominante es fotónica o material, también qué es lo que pasa en el punto de máxima hibridación.

Usando la expresión 2.9 y la definición de $\delta_{\mathbf{k}}$ calculamos la primera y segunda derivada:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial k} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{k}{m_c} + \frac{k}{m_x} \right) \pm \left[(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2)^{-1/2} \delta_{\mathbf{k}} \left(\frac{k}{m_c} - \frac{k}{m_x} \right) \right] \right\}$$

Con esto, podemos calcular la segunda derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_x} \right) \mp \frac{1}{2} (\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2)^{-3/2} \delta_{\mathbf{k}}^2 \left(\frac{k}{m_c} - \frac{k}{m_x} \right)^2 \pm \\ &\frac{1}{2} (\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2)^{-1/2} \left(\frac{k}{m_c} - \frac{k}{m_x} \right)^2 \pm \frac{1}{2} (\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2)^{-1/2} \delta_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{m_c} - \frac{1}{m_x} \right) \end{aligned}$$

Ya que lo que nos interesa ver es cómo se comporta la masa efectiva de los polaritones en función de qué parte está dominando, la material o fotónica, debemos hacer $k \rightarrow 0$ para que la masa quede en función de la desintonización de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k^2} \right|_{k=0} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_x} \right) \pm \frac{\delta (1/m_c - 1/m_x)}{\sqrt{\delta^2 + 4\Omega^2}} \right\} = \\ &\frac{1}{m_c} \left[\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\Omega^2}} \right) \right] + \frac{1}{m_x} \left[\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\Omega^2}} \right) \right] \end{aligned}$$

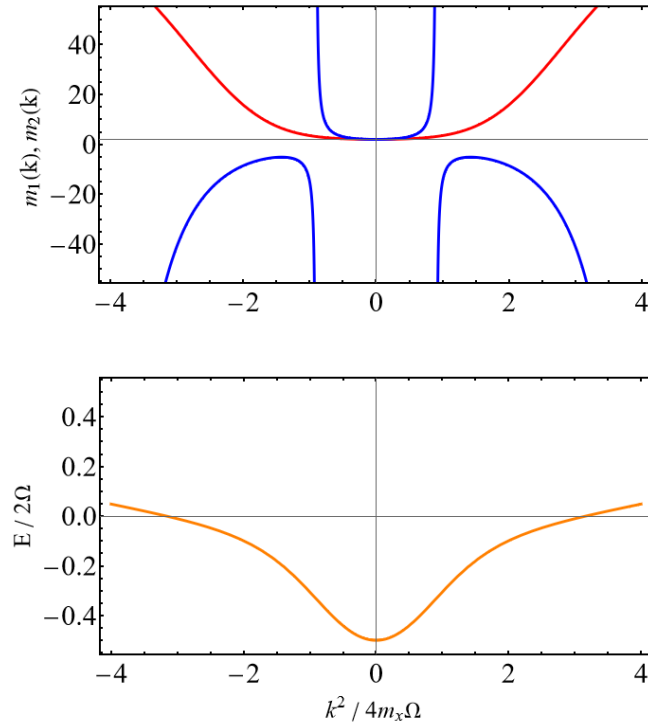


Figura 5: Gráfica de la primera y segunda derivada de la relación de dispersión. Equivalentes a las expresiones para m_1 y m_2 .

De ésta expresión identificamos a los coeficientes de Hopfield, por lo que la masa de los polaritones abajo y arriba quede expresada como:

$$\frac{1}{m_{UP}^*} = \frac{C^2}{m_c} + \frac{S^2}{m_x} \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{m_{LP}^*} = \frac{S^2}{m_c} + \frac{C^2}{m_x} \quad (2.14)$$

La gráfica de la masa efectiva de los polaritones se muestra en la Figura 4. Vemos que en el punto de máxima hibridación ($\delta = 0$) las masas de los polaritones arriba y abajo coinciden, esto es evidente desde el hecho de que en este punto los coeficientes de Hopfield valen lo mismo (dado que la fracción de luz es igual a la material), por lo tanto, el valor de las masas en este punto es simplemente el valor de la masa reducida: $m^* = 2m_x m_c / (m_x + m_c)$. El comportamiento de ambas masas se corresponde con los valores de los coeficientes de Hopfield en cada intervalo, recordando que estamos tomando el valor inverso.

También podemos estudiar el caso de los parámetros de masa para la energía de los polaritones en función del momento, usando las derivadas que ya calculamos y la definición de los parámetros graficamos las masas para la rama de los polaritones inferiores, dado que ésta es la que tiene una curvatura anómala mucho más notoria que la de los polaritones superiores.

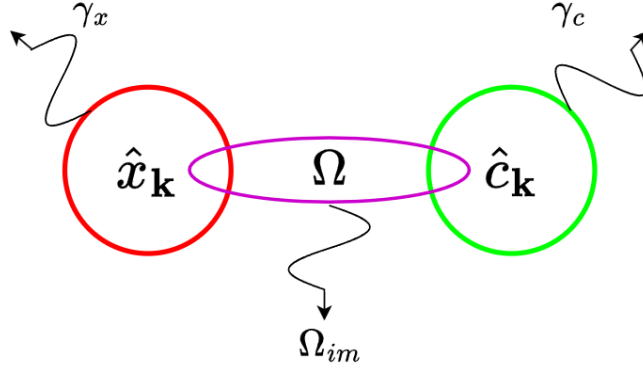


Figura 6: Esquema de la disipación en el sistema excitón-polaritón. Aquí se muestra la exposición a un baño propio para cada parte del sistema, caracterizado por los parámetros γ_x y γ_c , para la parte excitónica y fotónica, respectivamente. Además, el baño conjunto lo determina el parámetro Ω_{im} .

En la Figura 5 vemos que la primera derivada, asociada a m_1 es siempre positiva, de modo que para el caso coherente no hay valores negativos para la primera derivada, y por lo tanto para el parámetro de masa m_1 [9]. Sin embargo para la segunda derivada, asociada a m_2 , aparecen valores negativos a partir del cambio de curvatura en la relación de dispersión, donde la segunda derivada diverge en los puntos de inflexión.

3. Disipación en excitones-polaritones

En la sección anterior, vimos cómo se comporta el sistema con un acoplamiento coherente; esa característica es propia de un sistema acoplado ideal, dado que no existen pérdidas de energía éste será un sistema conservativo. A continuación, exploraremos el caso de un sistema excitón-polaritón sujeto a disipaciones tanto en las partes excitónica y fotónica así como en el acoplamiento mismo. Esto quiere decir que cada parte del sistema, excitones y fotones, está inmerso en un baño propio, dando como resultado una pérdida de energía para cada parte del sistema, como consecuencia de las imperfecciones de la cavidad, por ejemplo, la disipación de la parte fotónica es debido a las imperfecciones de los espejos [9]. Además, existe un baño conjunto para ambos sistemas debido al acoplamiento entre éstos, lo cual genera una pérdida extra [4, 9]. Lo cual puede ilustrarse en el esquema de la figura 6. Lo que nos interesa es cómo se modifica el sistema dependiendo de qué disipaciones estén presentes, por lo tanto, trabajaremos tres casos:

1. Sólo la disipación en el acoplamiento está presente.
2. Sólo hay disipación en el sistema no interactuante, el acoplamiento es coherente.
3. La disipación está presente en ambas partes del sistema, es decir, el caso 1 y 2 al mismo tiempo.

3.1. Caso 1

Para incluir el acoplamiento disipativo, modificamos el hamiltoniano de la siguiente forma:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \begin{bmatrix} \hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger & \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{k}}^x & \Omega_R - i\Omega_{im} \\ \Omega_R - i\Omega_{im} & \varepsilon_{\mathbf{k}}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{\mathbf{k}} \\ \hat{c}_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Donde el término imaginario fuera de la diagonal corresponde a la disipación solamente en el acoplamiento del sistema excitón-polaritón [20, 9]. Dicho esto, nos interesa ver cómo la inclusión de este término disipativo afecta a las variables de interés en el sistema.

Del mismo modo que en el caso coherente, proponemos una transformación del mismo tipo, con la diferencia de que los coeficientes de Hopfield para este caso se verán modificados (tan solo por el hecho de que Ω es complejo, pero una constante a fin de cuentas):

$$\tilde{C}_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2}} \right) \quad \text{y} \quad \tilde{S}_{\mathbf{k}}^2 = 1 - \tilde{C}_{\mathbf{k}}^2 \quad (3.2)$$

Al igual que en el caso coherente, podemos diagonalizar el Hamiltoniano mediante la transformación y los coeficientes. Obteniendo así los eigenvalores de la energía. Con la diferencia de que ahora tendremos valores complejos debido al término disipativo. Con esto, las energías quedan de la siguiente forma:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{UP,LP} - i\gamma_{\mathbf{k}}^{UP,LP} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\mathbf{k}} + 2\varepsilon_{\mathbf{k}}^x \pm \sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2} \right) \quad (3.3)$$

Donde $\gamma_{\mathbf{k}}$ representa la parte imaginaria de los valores de la energía.

Para encontrar explícitamente la parte imaginaria y real [21], recordemos que para un número complejo $z = a + ib$:

$$\sqrt{a + ib} = \left(\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + i \frac{b}{|b|} \sqrt{\frac{|z| - a}{2}} \right) \quad (3.4)$$

Hacemos el cálculo explícito para nuestro caso, de manera general:

$$\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2} = \sqrt{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R^2 - \Omega_{im}^2)) - i(8\Omega_R\Omega_{im})} \quad (3.5)$$

Por lo tanto:

$$Re\left(\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R^2 - \Omega_{im}^2))^2 + (8\Omega_R\Omega_{im})^2} + \delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R^2 - \Omega_{im}^2)}{2}}$$

$$Im\left(\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2}\right) = -\sqrt{\frac{\sqrt{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R^2 - \Omega_{im}^2))^2 + (8\Omega_R\Omega_{im})^2} - (\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R^2 - \Omega_{im}^2))}{2}}$$

Entonces ya podemos escribir la parte real e imaginaria de la energía:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{UP,LP} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\mathbf{k}} + 2\varepsilon_{\mathbf{k}}^x \pm \sqrt{\frac{\sqrt{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R^2 - \Omega_{im}^2))^2 + (8\Omega_R\Omega_{im})^2} + \delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R^2 - \Omega_{im}^2)}{2}} \right)$$

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{UP,LP} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R^2 - \Omega_{im}^2))^2 + (8\Omega_R\Omega_{im})^2} - (\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R^2 - \Omega_{im}^2))}{2}}$$

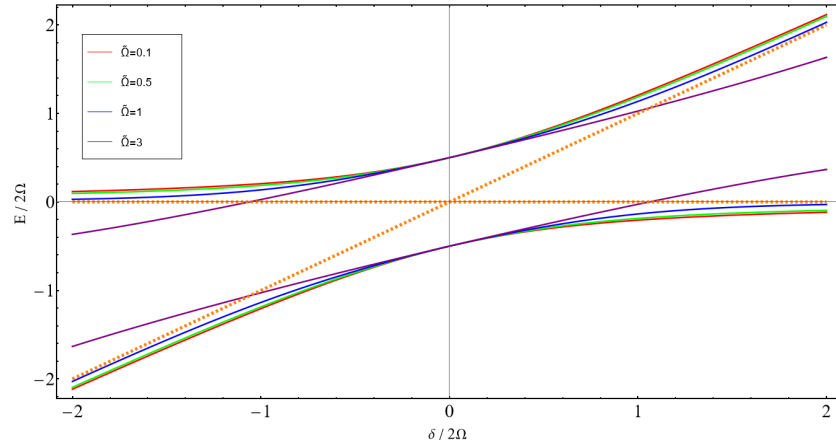
Como en el caso anterior, primero analicemos la situación para momento cero con la normalización correcta; de modo que la expresión toma la siguiente forma:

$$\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{UP,LP}}{2\Omega_R} = \frac{1}{2} \left(\tilde{\delta} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{(\tilde{\delta}^2 + (1 - \tilde{\Omega}^2))^2 + (2\tilde{\Omega})^2} + \tilde{\delta}^2 + (1 - \tilde{\Omega}^2)}{2}} \right) \quad (3.6)$$

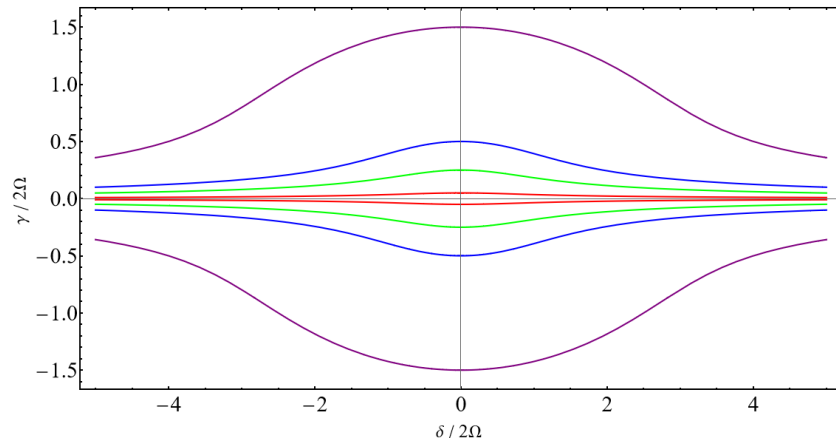
$$\frac{\gamma_{\mathbf{k}}^{UP,LP}}{2\Omega_R} = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(\tilde{\delta}^2 + (1 - \tilde{\Omega}^2))^2 + (2\tilde{\Omega})^2} - (\tilde{\delta}^2 + (1 - \tilde{\Omega}^2))}{2}} \quad (3.7)$$

Donde $\tilde{\Omega} = \Omega_{im}/\Omega_R$ y $\tilde{\delta} = \delta/2\Omega_R$. La gráfica de la parte real e imaginaria, ecuaciones 3.6 y 3.7, se muestran en la Figura 7 para diferentes valores de $\tilde{\Omega}$, especialmente para la 7(a) podemos ver las diferencias en comparación al caso coherente. En particular, vemos que a valores más grandes de $\tilde{\Omega}$ hay una mayor atracción de niveles caracterizada por la tendencia a formar un cuello de botella entre ambos modos, esto confirmado también por la parte imaginaria, ya que esa separación entre las ramas es característica de la atracción de niveles [3, 4, 22, 23]. Sin embargo, el gap de mantiene constante independientemente de los valores de $\tilde{\Omega}$, creando esas rectas de máximo acercamiento entre niveles donde la separación es constante. Otra cosa que debemos notar, es que a mayores valores de $\tilde{\Omega}$ las curvas de energías pueden cruzar la curva de la parte fotónica y excitónica. Por ejemplo, tomando la rama de los polaritones abajo con $\tilde{\Omega} = 3$, cuando $\tilde{\delta} > 0$ y la parte excitónica comienza a dominar, vemos que la curva rebasa el límite de la energía de los excitones, lo cual físicamente no tiene sentido tener tanta disipación en el acoplamiento, ya que no estaría dentro de los límites del acoplamiento fuerte [3].

Retomando las expresiones para la parte real e imaginaria de la energía, podemos ahora graficarlas en función del momento usando las definiciones de la desintonización. Las



(a)



(b)

Figura 7: Espectro de energía de los excitones-polaritones para diferentes valores de $\tilde{\Omega}$ como función de la desintonización. **(a)** Parte real y **(b)** la parte imaginaria. Las líneas punteadas corresponden a la energía de los sistemas no interactuantes.

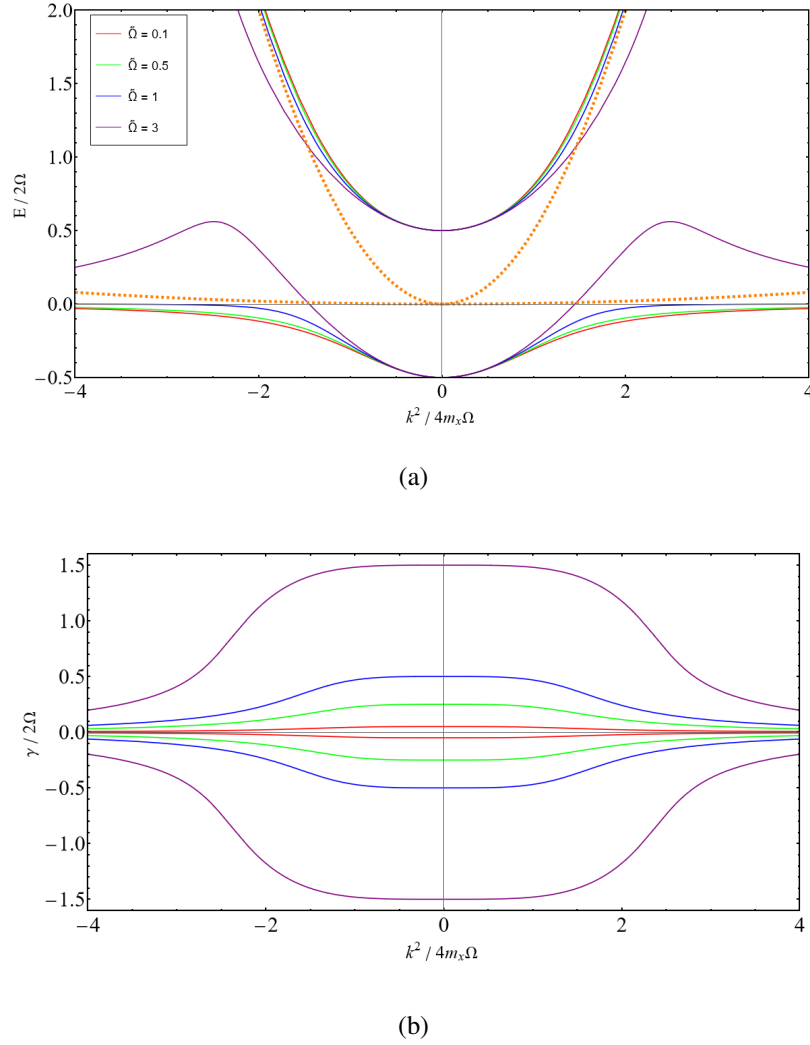


Figura 8: Espectro de energía de los excitones-polaritones para diferentes valores de $\tilde{\Omega}$ como función del momento. **(a)** Parte real y **(b)** la parte imaginaria. Las líneas punteadas corresponden a la energía de los sistemas no interactuantes.

gráficas se muestran en la Figura 8. En la primera vemos la parte real exhibiendo, de nuevo, una atracción de niveles entre los dos modos, y al igual que en el caso en función de la desintonización, el gap se mantiene constante para diferentes valores del acoplamiento disipativo. También, la relación de dispersión exhibe claramente un comportamiento anómalo, los puntos de inflexión son ahora mucho más pronunciados que en el caso coherente [17], lo que dará lugar a valores diferentes en los parámetros de masa.

3.1.1. Masa efectiva, caso 1

Dicho lo anterior para el caso coherente, esperamos que el acoplamiento disipativo afecte a la dinámica de los polaritones, dichos efectos se verán manifestados en los parámetros de masa. Además, ya vimos que la relación de dispersión en este caso presenta un comportamiento anómalo, por lo tanto, esperamos un resultado diferente para las masas [9].

Retomando las expresiones para los parámetros de masa, calculamos de nuevo las derivadas, que tendrán prácticamente la misma forma, con la diferencia de que la constante de acoplamiento es compleja, debido a la inclusión de la disipación.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon}{\partial k} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{k}{m_c} + \frac{k}{m_x} \right) \pm \left[\left(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2 \right)^{-1/2} \delta_{\mathbf{k}} \left(\frac{k}{m_c} - \frac{k}{m_x} \right) \right] \right\} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_x} \right) \mp \frac{1}{2} \left(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2 \right)^{-3/2} \delta_{\mathbf{k}}^2 \left(\frac{k}{m_c} - \frac{k}{m_x} \right)^2 \\ &\pm \frac{1}{2} \left(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2 \right)^{-1/2} \left(\frac{k}{m_c} - \frac{k}{m_x} \right)^2 \pm \frac{1}{2} \left(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2 \right)^{-1/2} \delta_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{m_c} - \frac{1}{m_x} \right).\end{aligned}$$

Hacemos al momento cero para dejar a la masa en términos de la desintonización. Lo que nos queda es similar al caso coherente:

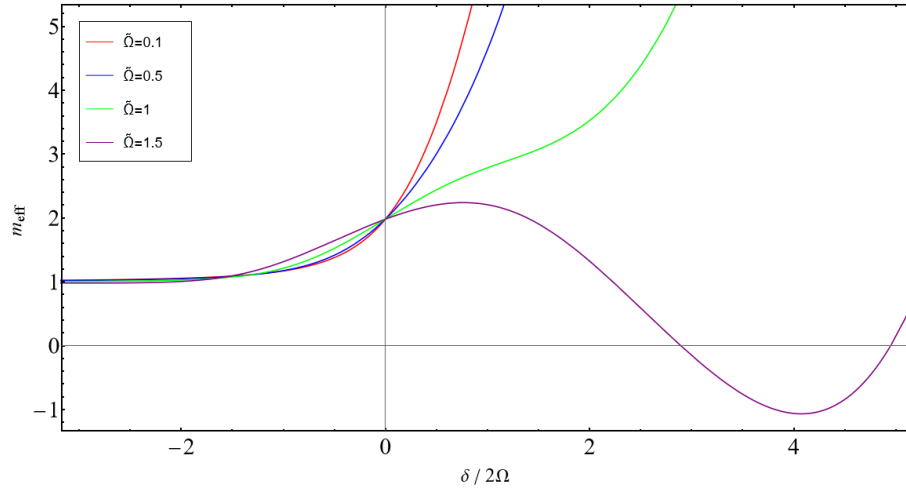
$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k^2} \right|_{k=0} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_x} \right) \pm \frac{\delta (1/m_c - 1/m_x)}{\sqrt{\delta^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2}} \right\} \\ &= \frac{1}{m_c} \left[\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2}} \right) \right] + \frac{1}{m_x} \left[\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2}} \right) \right]\end{aligned}$$

Identificamos a los coeficientes de Hopfield modificados, de modo que la masa efectiva queda en términos de éstos:

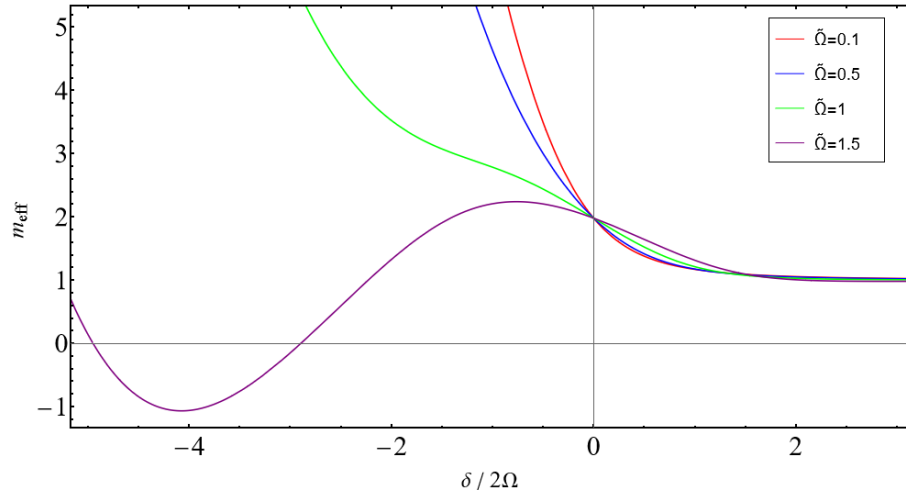
$$\frac{1}{m_{UP}^*} = \frac{\tilde{C}^2}{m_c} + \frac{\tilde{S}^2}{m_x} \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{m_{LP}^*} = \frac{\tilde{S}^2}{m_c} + \frac{\tilde{C}^2}{m_x} \quad (3.9)$$

Como se trata de valores complejos, debemos separar la parte real de la imaginaria, en la Figura 9 se muestra la gráfica de las masas. Al igual que en el caso coherente en el punto de máxima hibridación ($\delta = 0$), la masa toma el valor de $m^* = 2m_x m_c / (m_x + m_c)$. Cuando $\tilde{\Omega}$ es pequeño la masa tiende a la forma del caso coherente, en cuanto este factor crece, la curvatura de la masa efectiva empieza a tener un cambio en intervalos cada vez más grandes de δ . Si nos fijamos en un valor constante de δ , la masa tiende a ser menor para valores más grandes de $\tilde{\Omega}$, esto lo podemos atribuir a que en cuanto más grande sea la disipación en el acoplamiento, la interacción entre ambos sistemas será menor, lo que conlleva a un valor menor de la masa, pues como hemos mencionado la masa efectiva se manifiesta debido a las interacciones del sistema. También, es importante notar que para valores cada vez más grandes de la disipación los puntos donde la masa se vuelve



(a) Masa efectiva de los polaritones arriba.



(b) Masa efectiva de los polaritones abajo.

Figura 9: Masa efectiva de los polaritones en función de la desintonización, para diferentes valores de $\tilde{\Omega}$.

negativa serán cada vez menor. Para ver el comportamiento de la masa en función de la desintonización δ y la disipación $\tilde{\Omega}$ se muestra en la Figura 10 un mapa de densidad para la masa efectiva, en concordancia con el caso coherente, el máximo crecimiento de la masa será en la recta para $\tilde{\Omega} = 0$ pero conforme la disipación crece la masa tiene valores cada vez más bajos, hasta llegar a valores de cero y negativos. En la Figura 10(a) para los polaritones arriba, la masa negativa se presenta para valores cada vez menores de δ conforme la disipación crece, como lo indica la curva color negro.

La recta que nos da los puntos donde la masa efectiva es cero, la obtenemos mediante la siguiente ecuación:

$$\text{Re} \left(\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_x} \right) \pm \frac{\delta (1/m_c - 1/m_x)}{\sqrt{\delta^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2}} \right\} \right)^{-1} = 0 \quad (3.10)$$

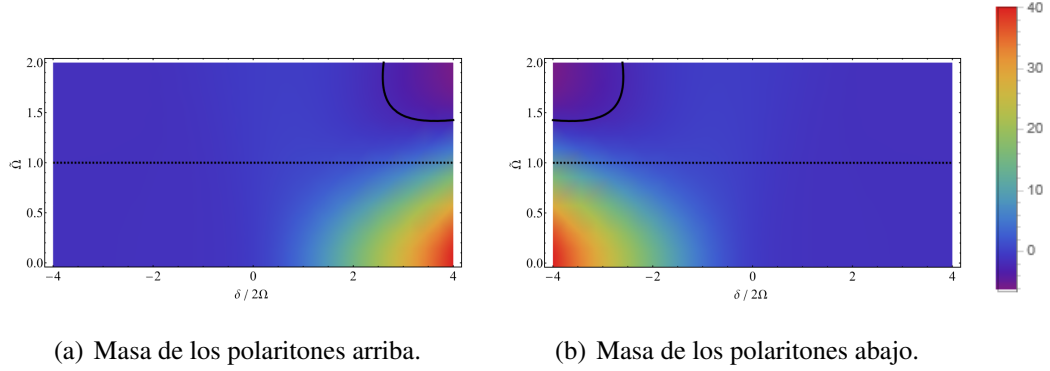


Figura 10: Mapa de densidad para la masa efectiva dependiendo de la desintonización y $\tilde{\Omega}$. En negro se muestran las curvas donde la masa es cero $m^* = 0$.

Por otro lado, podemos ver el comportamiento de los parámetros de masa con respecto al momento de los polaritones abajo. Como anticipamos, la dispersión para este caso es notoriamente anómala, ya que los puntos de inflexión en la curvatura son más pronunciados que en el caso coherente. Esto se muestra en la Figura 11, en este caso la masa inercial sí tomará valores negativos pasando los puntos de inflexión de la relación de dispersión, dada la definición de la masa inercial en términos de la velocidad de grupo, podemos interpretar esas zonas donde m_1 es negativa como aquellas donde si se le aplica un impulso al grupo, éste se moverá en dirección opuesta al impulso, esto se ha demostrado experimentalmente y además, la condición para que se manifieste este fenómeno es que la disipación en el acoplamiento sea mayor que el acoplamiento coherente [9]. De manera similar, m_2 tiene valores negativos acorde a los puntos de inflexión.

3.2. Caso 2

Los excitones-polaritones, debido a la configuración en la que se consiguen, son intrínsecamente un sistema que puede interactuar con sus alrededores. Por lo que para un estudio del sistema a profundidad, debemos considerar aquellas variables relevantes debidas a su interacción con los alrededores. En la sección anterior estudiamos el caso de la disipación en el acoplamiento, lo que corresponde a la recombinación de algunos excitones y el escape de algunos fotones fuera de la cavidad. Ahora, nos interesa ver cómo se modifica el sistema bajo la disipación para cada parte constituyente, la material y fotónica. En los excitones incluimos un factor de disipación y otro para los fotones debido a las imperfecciones de los espejos y la configuración dentro de la cavidad. Siguiendo el mismo método que en el caso 1, añadimos un término no hermitiano al hamiltoniano [20]. Por lo que el sistema de excitones-polaritones quedará descrito por el siguiente hamiltoniano:

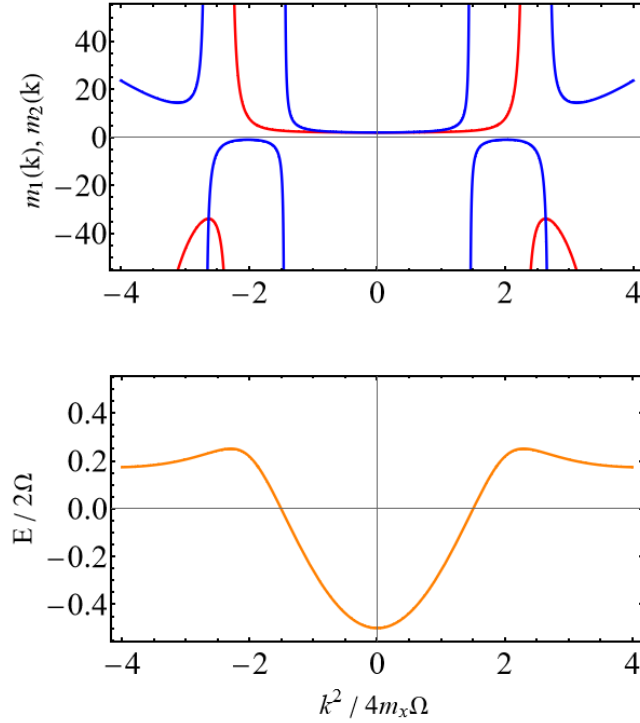


Figura 11: Parámetros de masa para los polaritones abajo. En el gráfico inferior vemos la relación de dispersión y en el superior los parámetros de masa m_1 en rojo y m_2 en azul. Tomando $\tilde{\Omega} = 2$.

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\mathbf{k}} \begin{bmatrix} \hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger & \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{k}}^x - i\gamma_x & \Omega \\ \Omega & \varepsilon_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{\mathbf{k}} \\ \hat{c}_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} [(\varepsilon_{\mathbf{k}}^x - i\gamma_x) \hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}} + (\varepsilon_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c) \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} + \Omega(\hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} + \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{x}_{\mathbf{k}})] \end{aligned}$$

Para encontrar las energías del sistema, proponemos la misma transformación que en los dos casos anteriores, tomando a los coeficientes de Hopfield como en el caso coherente, ecuación 2.4. También podemos obtener las energías para ambas ramas diagonalizando directamente la matriz del hamiltoniano. Si planteamos el problema de eigenvalores, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} \varepsilon_{\mathbf{k}}^x - i\gamma_x - \epsilon & \Omega \\ \Omega & \varepsilon_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c - \epsilon \end{array} \right| &= (\varepsilon_{\mathbf{k}}^x - i\gamma_x - \epsilon)(\varepsilon_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c - \epsilon) - \Omega^2 \\ &= \epsilon^2 + (i(\gamma_x + \gamma_c) - (\varepsilon_{\mathbf{k}}^x + \varepsilon_{\mathbf{k}}^c)) \epsilon \\ &\quad + (\varepsilon_{\mathbf{k}}^x(\varepsilon_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c) - i\gamma_x(\varepsilon_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c) - \Omega^2) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Al resolver la ecuación de segundo grado y acomodando los términos de manera conveniente, encontramos las energías para ambos modos:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{UP,LP} - i\gamma_{\mathbf{k}}^{UP,LP} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\mathbf{k}} + 2\varepsilon_{\mathbf{k}}^x - i(\gamma_x + \gamma_c) \pm \sqrt{[\delta_{\mathbf{k}} - i(\gamma_c - \gamma_x)]^2 + 4\Omega^2} \right) \quad (3.12)$$

Como de nuevo nos interesan la parte real e imaginaria de las energías, usamos la misma expresión del caso anterior:

$$\sqrt{[\delta_{\mathbf{k}} - i(\gamma_c - \gamma_x)]^2 + 4\Omega^2} = \sqrt{[\delta_{\mathbf{k}}^2 - (\gamma_c - \gamma_x)^2 + 4\Omega^2] - i[2\delta_{\mathbf{k}}(\gamma_c - \gamma_x)]}$$

Proseguimos a escribir la parte real e imaginaria de la energía:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{UP,LP} &= \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{k}}^x \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{[\delta_{\mathbf{k}}^2 - (\gamma_c - \gamma_x)^2 + 4\Omega^2]^2 + 4\delta_{\mathbf{k}}^2(\gamma_c - \gamma_x)^2} + \delta_{\mathbf{k}}^2 - (\gamma_c - \gamma_x)^2 + 4\Omega^2}{2}} \\ \gamma_{\mathbf{k}}^{UP,LP} &= \frac{1}{2}(\gamma_x + \gamma_c) \\ &\pm \sqrt{\frac{\sqrt{[\delta_{\mathbf{k}}^2 - (\gamma_c - \gamma_x)^2 + 4\Omega^2]^2 + 4\delta_{\mathbf{k}}^2(\gamma_c - \gamma_x)^2} - (\delta_{\mathbf{k}}^2 - (\gamma_c - \gamma_x)^2 + 4\Omega^2)}{2}} \end{aligned}$$

Con esto ya podríamos graficar la energía de los polaritones, sin embargo, podemos hacer una aproximación para que las expresiones tomen una forma más sencilla, dado que hacerlo analíticamente arroja expresiones más complejas. Tomemos la expresión 3.12, dado que la diferencia $(\gamma_c - \gamma_x)$ por lo general es menor a uno, realizamos una expansión en serie de Taylor de lo que está dentro de la raíz a segundo orden:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{UP,LP} - i\gamma_{\mathbf{k}}^{UP,LP} &\approx \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{k}}^x - \frac{i}{2}(\gamma_x + \gamma_c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2} \\ &\quad - \frac{i}{2} \frac{\delta_{\mathbf{k}}(\gamma_c - \gamma_x)}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta_{\mathbf{k}} + 2\varepsilon_{\mathbf{k}}^x \pm \sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2} \right) \\ &\quad - i \left(\gamma_x \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\delta_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2}} \right) + \gamma_c \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\delta_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2}} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Donde identificamos a $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{UP,LP}$ con la energía de los polaritones superiores e inferiores para el caso con acoplamiento coherente, para dicho caso también definimos a los coeficientes de Hopfield, los cuales asociamos a la expresión obtenida como $\gamma_{\mathbf{k}}^{UP} = \gamma_x C_{\mathbf{k}}^2 + \gamma_c S_{\mathbf{k}}^2$ y

$\gamma_{\mathbf{k}}^{LP} = \gamma_x S_{\mathbf{k}}^2 + \gamma_c C_{\mathbf{k}}^2$. En consecuencia, al hacer la aproximación anterior hemos dejado a la energía en términos de los coeficientes de Hopfield y la energía ya conocida del caso coherente, que si bien sigue teniendo una parte real y otra imaginaria, esto es más fácil de trabajar. Recordemos que al aplicar la transformación y diagonalizar el Hamiltoniano, lo que ganamos es poder escribir el nuevo Hamiltoniano en términos de los operadores de creación y aniquilación de los polaritones arriba y abajo, con la forma de nuestra energía, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_{\mathbf{k}} \begin{bmatrix} \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger & \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{LP} - i\gamma_{\mathbf{k}}^{LP} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\mathbf{k}}^{UP} - i\gamma_{\mathbf{k}}^{UP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{L}_{\mathbf{k}} \\ \hat{U}_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} (\varepsilon_{\mathbf{k}}^{LP} - i\gamma_{\mathbf{k}}^{LP}) \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} + (\varepsilon_{\mathbf{k}}^{UP} - i\gamma_{\mathbf{k}}^{UP}) \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}}\end{aligned}\quad (3.14)$$

Con todos estos resultados ya podemos graficar la energía de los polaritones, dado que γ_c depende de la disipación que exista en el material del que estén hechos los espejos, este parámetro lo podemos conocer experimentalmente de antemano. Por lo que podemos dejar fijo γ_c y ver cómo varía nuestro sistema para diferentes valores de γ_x . Como se observa en la Figura 12(a) existe una similitud entre cómo se comportan ambas ramas al caso coherente y éste que estamos considerando, sin embargo, la inclusión de los nuevos términos disipativos hace que la brecha entre ambos modos se reduzca para valores más altos de γ_x [3]. Por otro lado, en el caso anterior veíamos que a mayor $\tilde{\Omega}$ la energía de los polaritones cruzaba las energías de los excitones y fotones no interactuantes, aquí esto no se presenta, la energía de los polaritones muestra un acercamiento asintótico a las energías de la parte material y fotónica, así como en el caso coherente, por lo tanto, ese comportamiento puede ser atribuido al acoplamiento disipativo. También, a diferencia del primer caso, en éste no observamos esas rectas en las que ambos modos tendían a acercarse conforme $\tilde{\Omega}$ crecía, siendo esto otra característica del acoplamiento disipativo, es decir, la atracción de niveles [22, 16]. Lo más sobresaliente de este gráfico es que la brecha disminuye conforme el valor γ_x también lo hace, creando puntos de máximo acercamiento entre ambos modos, en específico las curvas moradas en la Figura 12(a) lo exhiben de manera evidente, éstos se conocen como *puntos excepcionales* [3, 4] donde las eigenenergías de cada rama tienden a adquirir valores iguales y el sistema se vuelve degenerado, estos puntos también marcan la transición de valores reales a complejos de las eigenenergías, sin embargo, en la imagen esto ocurre para valores muy grandes de γ_x y fuera del acoplamiento fuerte, por lo que estas situaciones no son de mucho interés físico. Este curioso fenómeno también se ilustra en la Figura 12(b) donde se muestran las partes imaginarias de la eigenenergía de cada modo. Como se verá más adelante en el texto, la información que nos da la parte imaginaria es que ésta se encuentra acotada asintóticamente por los valores de disipación del sistema. Lo que sí podemos ver de la gráfica y las expresiones, es que ambas ramas de la parte imaginaria se intersectan en $\delta = 0$, el punto está dado por $\gamma^{UP}(\delta = 0) = \gamma^{LP}(\delta = 0) = (\gamma_c + \gamma_x)/2$.

En la figura 13(a) se muestra el espectro de energía como función del momento. De nuevo, la inclusión de los nuevos términos disipativos crea una disminución de la brecha, al igual que en la gráfica anterior, en ésta tampoco se presenta el caso donde la energía de los polaritones rebasa a la de los excitones y fotones. Confirmando que eso sólo se presenta

en el caso con acoplamiento disipativo, además, en ese caso la relación de dispersión se volvía especialmente anómala gracias a eso, en este caso, si bien la curvatura cambia de manera apreciable, no parece que difiera demasiado del caso coherente. Por lo tanto, la relación de dispersión anómala es también una característica del acoplamiento disipativo, y en consecuencia, también la aparición de la masa negativa [17, 9]; recordemos que la masa negativa aparece debido a la curvatura de la relación de dispersión. En la Figura 13(b) la parte imaginaria de la energía muestra las mismas características que en la gráfica anterior.

¿Cómo podemos entender la disminución de la brecha? Partamos del hecho de que a diferencia del caso coherente, aquí las energías son números complejos, donde la parte imaginaria nos da la tasa de decaimiento. Por lo tanto, al existir términos de disipación para cada parte del sistema, ambas partes están perdiendo energía a diferentes ritmos, y ese es el punto importante, que la tasa de decaimiento para ambas partes es diferente. Pensemos que el sistema quiere equilibrar esta pérdida de ambas partes mezclando ambos modos, dando lugar a una disminución de la brecha o diferencia de fases (como se verá más adelante), fruto de equilibrar las tasas de decaimiento en cada sistema.

3.2.1. Masa efectiva, caso 2

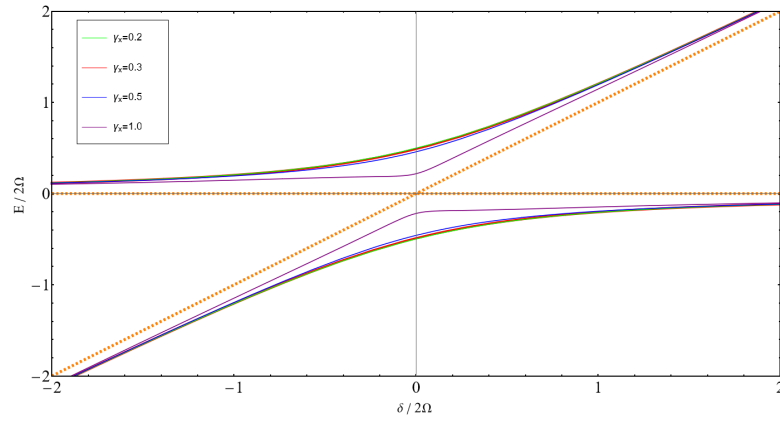
Con la expresión de la energía para los polaritones, podemos repetir el proceso y calcular las derivadas con respecto al momento y así obtener cómo se ven las masas efectivas para este caso:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial k} = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{m_c} + \frac{k}{m_x} \right) \pm \frac{1}{2} \left((\delta_{\mathbf{k}} - i(\gamma_c - \gamma_x))^2 + 4\Omega^2 \right)^{-1/2} \times (\delta_{\mathbf{k}} - i(\gamma_c - \gamma_x)) \left(\frac{k}{m_c} - \frac{k}{m_x} \right)$$

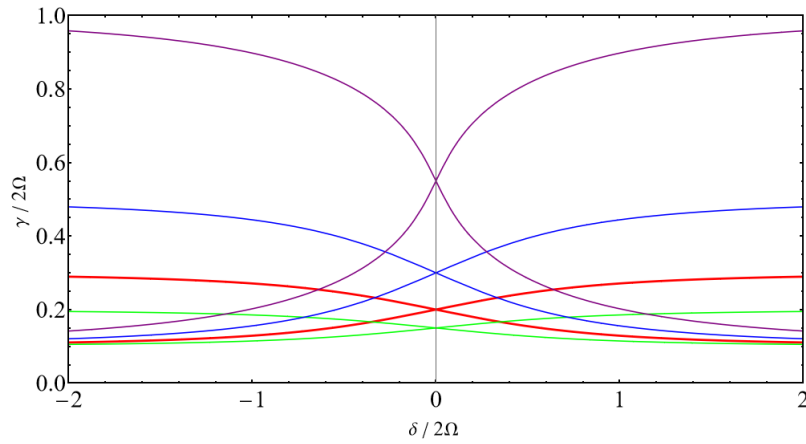
Para la segunda derivada obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_x} \right) \pm \frac{1}{2} \left((\delta_{\mathbf{k}} - i(\gamma_c - \gamma_x))^2 + 4\Omega^2 \right)^{-1/2} \left(\frac{k}{m_c} - \frac{k}{m_x} \right)^2 \\ &\quad \pm \frac{1}{2} \left((\delta_{\mathbf{k}} - i(\gamma_c - \gamma_x))^2 + 4\Omega^2 \right)^{-1/2} (\delta_{\mathbf{k}} - i(\gamma_c - \gamma_x)) \left(\frac{1}{m_c} - \frac{1}{m_x} \right) \\ &\quad \mp \frac{1}{2} \left((\delta_{\mathbf{k}} - i(\gamma_c - \gamma_x))^2 + 4\Omega^2 \right)^{-3/2} (\delta_{\mathbf{k}} - i(\gamma_c - \gamma_x))^2 \left(\frac{k}{m_c} - \frac{k}{m_x} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Con esto ya tendríamos las expresiones para poder graficar la masa efectiva, sin embargo, hagamos uso de la expresión aproximada para obtener una forma más simple de la masa efectiva a momento cero. Tomando la ecuación 3.25, la segunda derivada está dada por:

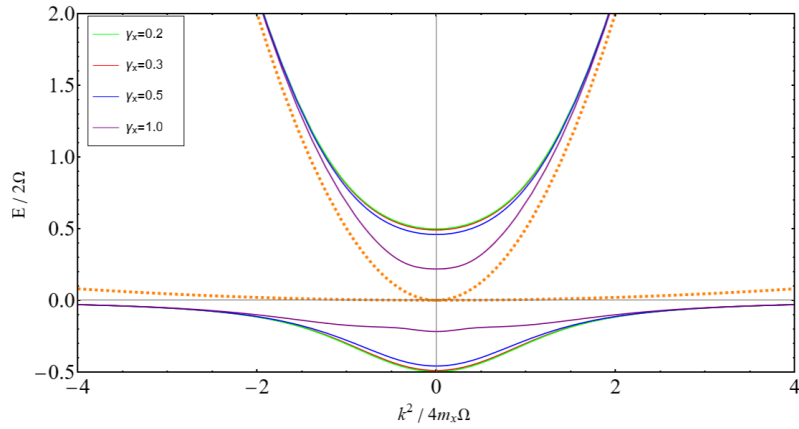


(a) Energía como función de la desintonización.

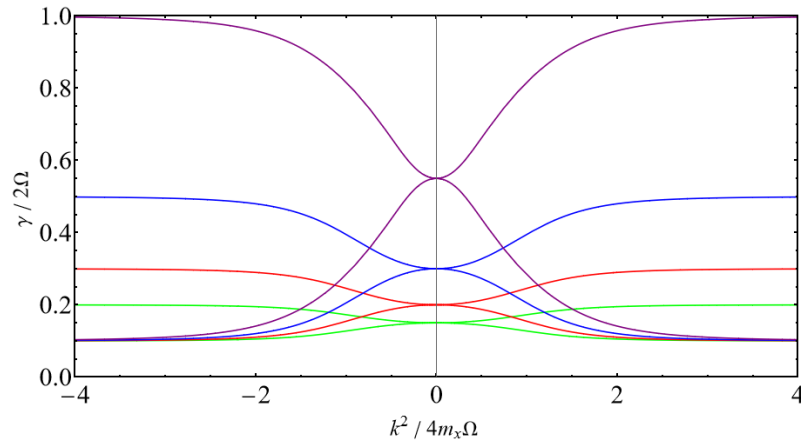


(b) Parte imaginaria de la energía.

Figura 12: Espectro de energía de los excitones-polaritones como función de la desintonización para diferentes valores de γ_x manteniendo $\gamma_c = 0.1$. En (a) las líneas punteadas corresponden a la energía de los excitones y fotones por sí solos.



(a) Energía como función del momento.



(b) Parte imaginaria de la energía.

Figura 13: Espectro de energía de los excitones-polaritones como función del momento para diferentes valores de γ_x manteniendo $\gamma_c = 0.1$. En (a) las líneas punteadas corresponden a la energía de los excitones y fotones no interactuantes.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mathbf{k}}^{UP,LP}}{\partial k^2} - i \frac{\partial^2 \gamma_{\mathbf{k}}^{UP,LP}}{\partial k^2} \quad (3.16)$$

Donde el primer término de ésta ecuación ya lo conocemos, es la masa efectiva que calculamos para el caso coherente. Para el segundo término, ya vimos que depende únicamente de los coeficientes de Hopfield, por lo tanto, si queremos la segunda derivada, primero debemos obtener las derivadas de los coeficientes de Hopfield. Lo cual resulta en lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{\mathbf{k}}^2}{\partial k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{k/m_c - k/m_x}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2}} - \frac{(k/m_c - k/m_x)\delta_{\mathbf{k}}^2}{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2)^{3/2}} \right) \\ \frac{\partial S_{\mathbf{k}}^2}{\partial k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{(k/m_c - k/m_x)\delta_{\mathbf{k}}^2}{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2)^{3/2}} - \frac{k/m_c - k/m_x}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2}} \right) \end{aligned}$$

Y la segunda derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_{\mathbf{k}}^2}{\partial k^2} &= \frac{3}{2} \frac{(k/m_c - k/m_x)^2 \delta_{\mathbf{k}}^3}{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2)^{5/2}} - \frac{3}{2} \frac{(k/m_c - k/m_x)^2 \delta_{\mathbf{k}}}{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2)^{3/2}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{(1/m_c - 1/m_x)\delta_{\mathbf{k}}^2}{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2)^{3/2}} + \frac{1}{2} \frac{(1/m_c - 1/m_x)}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Esto para un solo coeficiente, para el siguiente tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_{\mathbf{k}}^2}{\partial k^2} &= \frac{3}{2} \frac{(k/m_c - k/m_x)^2 \delta_{\mathbf{k}}}{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{(k/m_c - k/m_x)^2 \delta_{\mathbf{k}}^3}{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2)^{5/2}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{(1/m_c - 1/m_x)\delta_{\mathbf{k}}^2}{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2)^{3/2}} - \frac{1}{2} \frac{(1/m_c - 1/m_x)}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

De este modo, ya tenemos todo para escribir las expresiones para la masa efectiva a momento cero. Esto es:

$$\frac{1}{m_{UP}^*} = \frac{C^2}{m_c} + \frac{S^2}{m_x} - i \left(\frac{1}{2} \frac{(1/m_c - 1/m_x)}{\sqrt{\delta^2 + 4\Omega^2}} (\gamma_c - \gamma_x) \left(\frac{\delta^2}{\delta^2 + 4\Omega^2} - 1 \right) \right) \quad (3.19)$$

Esto para los polaritones arriba a momento cero. Para los polaritones abajo:

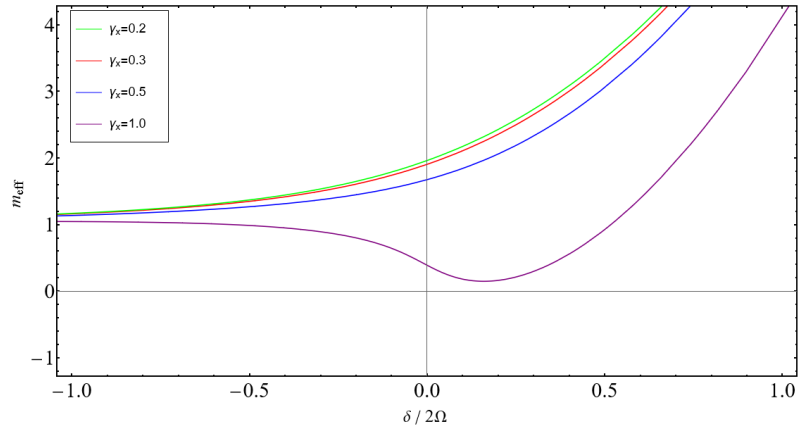
$$\frac{1}{m_{LP}^*} = \frac{S^2}{m_c} + \frac{C^2}{m_x} - i \left(\frac{1}{2} \frac{(1/m_c - 1/m_x)}{\sqrt{\delta^2 + 4\Omega^2}} (\gamma_c - \gamma_x) \left(1 - \frac{\delta^2}{\delta^2 + 4\Omega^2} \right) \right) \quad (3.20)$$

Con estas expresiones recién encontradas, podemos graficar la masa efectiva como función de la desintonización tomando la parte real del inverso de las expresiones 3.19 y 3.20, tal como se observa en la figura 14. Vemos que la forma de las curvas es similar al caso coherente, al menos para valores pequeños de γ_x , ya que en cuanto la disipación crece se presenta un decaimiento similar al de las gráficas de la figura 9. Además, en los casos anteriores, la masa era la misma para el punto de máxima hibridación, en este caso existe una brecha entre los valores de la masa en el punto $\delta = 0$ que varía dependiendo del valor de γ_x . Lo relevante, es que de acuerdo a las expresiones para la masa efectiva 3.19 y 3.20, el término que involucra los valores de la disipación es $(\gamma_c - \gamma_x)$ no ambos por separado, por lo tanto, el cómo varíe la masa en este caso depende de cómo se comparan ambos valores. Para la masa de los polaritones superiores, si la diferencia entre los términos de disipación es pequeña, ésta se aproxima cada vez más al valor del caso coherente en el punto de máxima hibridación, en cambio, si la diferencia es muy grande ($\gamma_x \gg \gamma_c$) la masa en este punto disminuirá cada vez más, en concordancia al significado que tenemos de la disipación, ya que si ésta es mayor en la parte material que en la fotónica, quiere decir que existe un mayor decaimiento en los excitones que en los fotones, dando lugar a que la masa efectiva sea dominada por la parte fotónica y como ésta tiene un valor pequeño, la masa del sistema disminuye cada vez más conforme la disipación aumenta. De manera similar ocurre en el caso de los polaritones inferiores, pero con la diferencia de que la masa aumenta en el punto de máxima hibridación conforme γ_x también aumenta, esto en concordancia con la diferencia de signo obtenida en las expresiones para la masa efectiva. En conclusión, esta brecha que vemos en los valores de la masa en el punto de máxima hibridación es una característica de la disipación de cada elemento por separado, a diferencia del caso con acoplamiento disipativo.

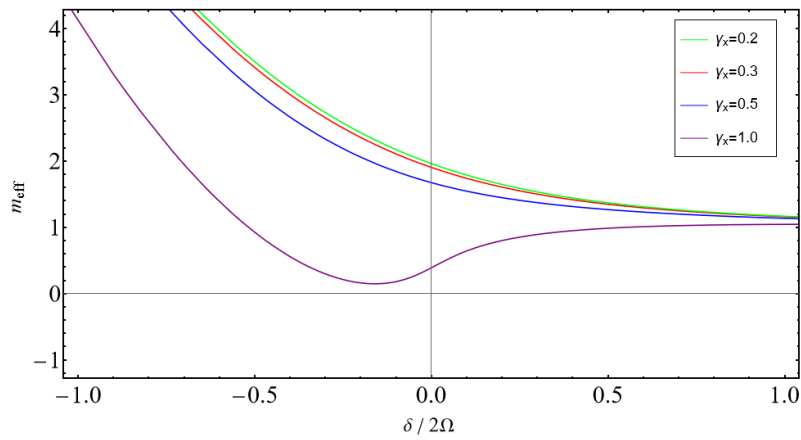
Al igual que en el caso de la sección anterior, la masa efectiva de ambas ramas puede llegar a tener valores negativos y por lo tanto, existen puntos donde $m^* = 0$. Los cuales podemos encontrar resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(\frac{C^2}{m_c} + \frac{S^2}{m_x} - i \left(\frac{1}{2} \frac{(1/m_c - 1/m_x)}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2}} (\gamma_c - \gamma_x) \left(\frac{\delta^2}{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2} - 1 \right) \right) \right) &= 0 \\ \text{Re} \left(\frac{S^2}{m_c} + \frac{C^2}{m_x} - i \left(\frac{1}{2} \frac{(1/m_c - 1/m_x)}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2}} (\gamma_c - \gamma_x) \left(1 - \frac{\delta^2}{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4\Omega^2} \right) \right) \right) &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones, podemos ver gráficamente los puntos donde la masa se hace cero para diferentes valores de la desintonización y γ_x . Esto con un density plot como se muestra en la Figura 15, donde se ha puesto en negro las curvas donde la masa efectiva vale cero. A diferencia del caso 1, las zonas con masa negativa son menores para este caso, confirmando que la masa negativa se presenta en mayor grado debido al acoplamiento disipativo. Además, las curvas de masa cero se presentan a grandes valores de γ_x , al igual que en el punto de máxima hibridación se aprecia la brecha que existe entre la masa para diferentes valores de la disipación. Otra cosa relevante, es que si comparamos con la figura 10, allí el crecimiento de la masa para valores grandes de la desintonización se ve ampliamente afectada por el factor $\tilde{\Omega}$, en este caso, el crecimiento de las masas no tiene una diferencia apreciable respecto al caso coherente.

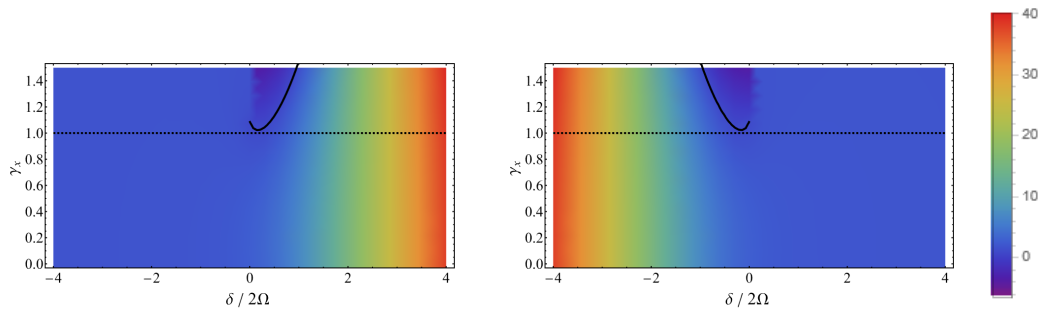


(a) Masa efectiva UP.



(b) Masa efectiva LP.

Figura 14: Masa efectiva para los polaritones como función de la desintonización para diferentes valores de γ_x fijando $\gamma_c = 0.1$.



(a) Masa de los polaritones arriba.

(b) Masa de los polaritones abajo.

Figura 15: Mapa de densidad para la masa efectiva dependiendo de la desintonización y γ_x . En negro, líneas continuas, se muestran las curvas donde la masa es cero. Las líneas negras punteadas corresponden a $\gamma_x = 1$.

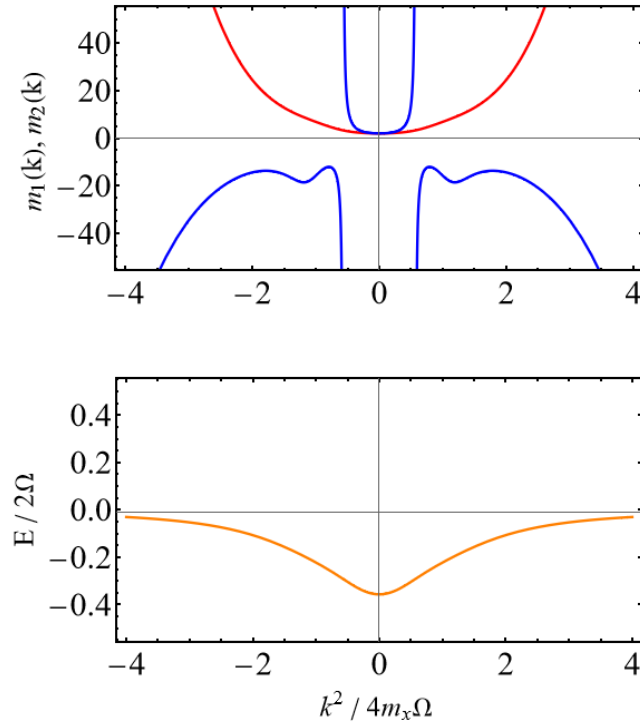


Figura 16: Parámetros de masa para los polaritones abajo. En el gráfico inferior vemos la relación de dispersión y en el superior los parámetros de masa m_1 en rojo y m_2 en azul. Tomando $\gamma_x = 0.7$.

Ahora podemos estudiar cómo se comportan los parámetros de masa en función del momento para la relación de dispersión de los polaritones inferiores. Anticipamos que el comportamiento debe ser similar al del caso coherente, sin embargo, al introducir la disipación deben aparecer las brechas para diferentes valores de γ_x . Como vemos en la figura 16 el comportamiento de los parámetros de masa es similar al caso coherente, principalmente en el hecho de que para la masa inercial no hay valores negativos dentro del rango apropiado para el sistema. Como ya habíamos anticipado, la masa negativa no aparece debido a que la relación de dispersión es similar al caso coherente, todo lo contrario para el caso 1. Para la masa de difusión, vemos un cambio significativo respecto al caso 1 y el caso coherente. En primer lugar, en el caso 1 y el coherente, no aparecen esos pequeños valles en las ramas negativas del parámetro m_2 . Al igual que debido a los cambios de curvatura presentes en el caso 1, allí existen más puntos de inflexión en donde el signo de la masa cambia, a diferencia de lo que observamos en este caso.

3.3. Caso 3

Ya examinemos los casos donde la disipación se encuentra, por separado, en los elementos y el acoplamiento. Ahora, consideremos el caso completo de la disipación en los excitones polaritones. Para eso, al tener los dos casos anteriores al mismo tiempo, tenemos el siguiente hamiltoniano:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \sum_{\mathbf{k}} \begin{bmatrix} \hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger & \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{k}}^x - i\gamma_x & \Omega_R - i\Omega_{im} \\ \Omega_R - i\Omega_{im} & \varepsilon_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{\mathbf{k}} \\ \hat{c}_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{\mathbf{k}} [(\varepsilon_{\mathbf{k}}^x - i\gamma_x)\hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger\hat{x}_{\mathbf{k}} + (\varepsilon_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c)\hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger\hat{c}_{\mathbf{k}} + (\Omega_R - i\Omega_{im})(\hat{x}_{\mathbf{k}}^\dagger\hat{c}_{\mathbf{k}} + \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger\hat{x}_{\mathbf{k}})]
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Con los resultados de los dos casos anteriores, seguimos un procedimiento análogo. Así que si proponemos la transformación 2.3 usando los coeficientes de Hopfield tal y como los definimos para el caso 1, con acoplamiento disipativo. Podemos diagonalizar el hamiltoniano y obtener las eigenenergías. Del mismo modo, también podemos obtenerlas encontrando los eigenvalores de la matriz:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \varepsilon_{\mathbf{k}}^x - i\gamma_x - \epsilon & \Omega_R - i\Omega_{im} \\ \Omega_R - i\Omega_{im} & \varepsilon_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c - \epsilon \end{vmatrix} &= (\varepsilon_{\mathbf{k}}^x - i\gamma_x - \epsilon)(\varepsilon_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c - \epsilon) - (\Omega_R - i\Omega_{im})^2 \\
&= \epsilon^2 + (i(\gamma_x + \gamma_c) - (\varepsilon_{\mathbf{k}}^x + \varepsilon_{\mathbf{k}}^c))\epsilon \\
&\quad + (\varepsilon_{\mathbf{k}}^x(\varepsilon_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c) - i\gamma_x(\varepsilon_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c) - (\Omega_R - i\Omega_{im})^2) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Por lo tanto, los valores de la energía, son:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{UP,LP} - i\gamma_{\mathbf{k}}^{UP,LP} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\mathbf{k}} + 2\varepsilon_{\mathbf{k}}^x - i(\gamma_x + \gamma_c) \pm \sqrt{(\delta_{\mathbf{k}} - i(\gamma_c - \gamma_x))^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2} \right) \tag{3.23}$$

De nuevo, nos interesa ver la parte real e imaginaria de esta expresión, para esto, usamos la expresión 3.4. Obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(\delta_{\mathbf{k}} - i(\gamma_c - \gamma_x))^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2} &= \sqrt{[\delta_{\mathbf{k}}^2 - (\gamma_c - \gamma_x)^2 + 4(\Omega_R^2 - \Omega_{im}^2)]} \\
&\quad - i[2\delta_{\mathbf{k}} + 8\Omega_R\Omega_{im}]
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Uniendo esto con 3.23, tenemos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathbf{k}}^{UP,LP} &= \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{k}}^x \\
&\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[\delta_{\mathbf{k}}^2 - (\gamma_c - \gamma_x)^2 + 4(\Omega_R^2 - \Omega_{im}^2)]^2 + [2\delta_{\mathbf{k}} + 8\Omega_R\Omega_{im}]^2 + \delta_{\mathbf{k}}^2 - (\gamma_c - \gamma_x)^2 + 4(\Omega_R^2 - \Omega_{im}^2)}{2}}
\end{aligned}$$

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{UP,LP} = \frac{1}{2}(\gamma_x + \gamma_c) \pm \frac{\delta_{\mathbf{k}} + 4\Omega_R\Omega_{im}}{|2\delta_{\mathbf{k}} + 8\Omega_R\Omega_{im}|}$$

$$\times \sqrt{\frac{\sqrt{[\delta_{\mathbf{k}}^2 - (\gamma_c - \gamma_x)^2 + 4(\Omega_R^2 - \Omega_{im}^2)]^2 + [2\delta_{\mathbf{k}} + 8\Omega_R\Omega_{im}]^2} - (\delta_{\mathbf{k}}^2 - (\gamma_c - \gamma_x)^2 + 4(\Omega_R^2 - \Omega_{im}^2))}{2}}$$

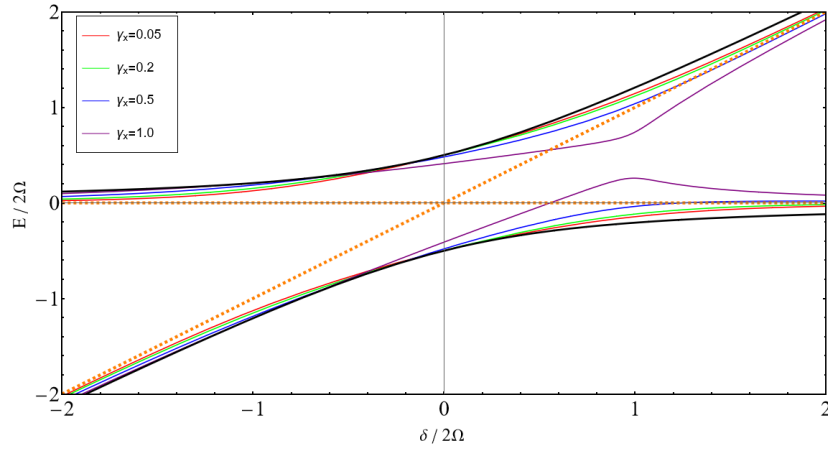
De igual forma, con esto ya podríamos graficar las energías y calcular la masa efectiva. Sin embargo, hagamos la misma aproximación que en el caso 2:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{UP,LP} - i\gamma_{\mathbf{k}}^{UP,LP} &\approx \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{k}}^x - \frac{i}{2}(\gamma_x + \gamma_c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2} \\ &\quad - \frac{i}{2} \frac{\delta_{\mathbf{k}}(\gamma_c - \gamma_x)}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta_{\mathbf{k}} + 2\varepsilon_{\mathbf{k}}^x \pm \sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2} \right) \\ &\quad - i \left(\gamma_x \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\delta_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2}} \right) + \gamma_c \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\delta_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2}} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

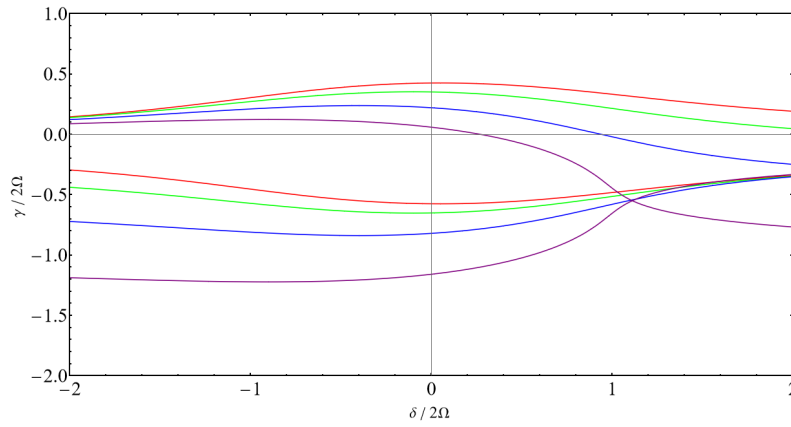
Donde identificamos de nueva cuenta a los coeficientes de Hopfield, pero esta vez con la modificación del acoplamiento disipativo, ecuación 3.2. Así, $\gamma_{\mathbf{k}}^{UP} = \gamma_x C_{\mathbf{k}}^2 + \gamma_c S_{\mathbf{k}}^2$ y $\gamma_{\mathbf{k}}^{LP} = \gamma_x S_{\mathbf{k}}^2 + \gamma_c C_{\mathbf{k}}^2$. De la misma forma que en los otros casos, al diagonalizar el hamiltoniano, podemos escribirlo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\mathbf{k}} \begin{bmatrix} \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger & \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{LP} - i\gamma_{\mathbf{k}}^{LP} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\mathbf{k}}^{UP} - i\gamma_{\mathbf{k}}^{UP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{L}_{\mathbf{k}} \\ \hat{U}_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} (\varepsilon_{\mathbf{k}}^{LP} - i\gamma_{\mathbf{k}}^{LP}) \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} + (\varepsilon_{\mathbf{k}}^{UP} - i\gamma_{\mathbf{k}}^{UP}) \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Con esta información, ya podemos graficar la energía de los polaritones. Pero antes de hacerlo, los dos casos pasados ya nos proveen de una intuición acerca de lo que esperamos ver en este caso, no solo matemáticamente, sino que la interpretación física que hagamos también se desprende de ellos. En primer lugar, el caso II indica que la presencia de los parámetros γ_x y γ_c disminuyen la brecha entre ambos modos, además de la atracción de niveles presente en el caso 1. Por otro lado, el acoplamiento disipativo, hará que las curvas de ambos modos superen a las curvas de energía de los excitones y fotones no interactuantes, tal como en la figura 8 y 7. También esperamos que el acoplamiento disipativo haga que la curvatura de la relación de dispersión sea anómala, dando lugar a la masa negativa. Esto se confirma en las figuras 17 y 18, específicamente, en la 17(a) se aprecia la aparición de los puntos excepcionales, sin embargo, éstos se encuentran desplazados hacia la derecha. Atribuimos esto a la presencia del acoplamiento disipativo, así como en



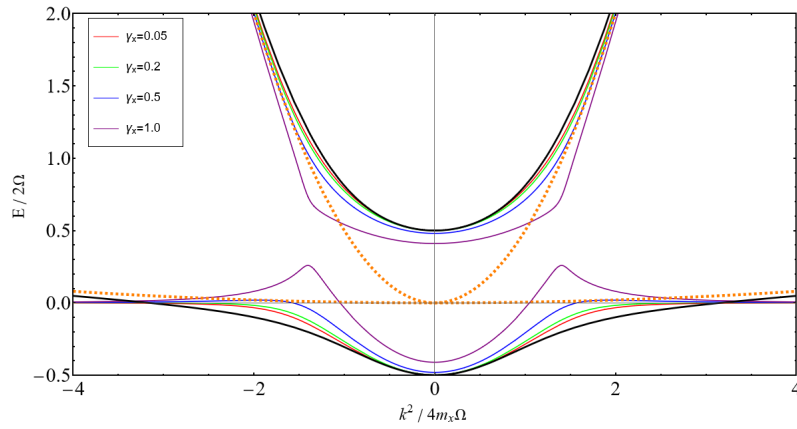
(a) Energía como función de la desintonización.



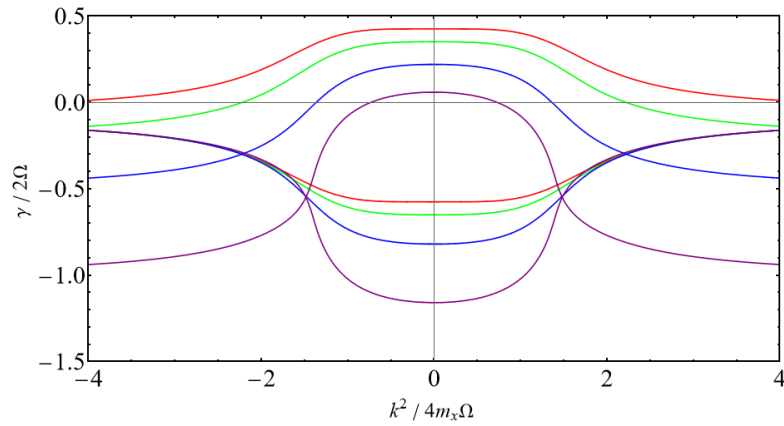
(b) Parte imaginaria de la energía.

Figura 17: Espectro de energía de los excitones-polaritones como función de la desintonización para diferentes valores de γ_x manteniendo $\gamma_c = 0.1$ y $\tilde{\Omega} = 1$. En (a) las líneas punteadas corresponden a la energía de los excitones y fotones no interactuantes, en línea negra se muestra la energía de los excitones-polaritones para el caso coherente.

parte imaginaria de la figura 17(b) los puntos excepcionales se manifiestan cuando ambas ramas se aproximan una de la otra, en el caso 2 esto sucedía en el punto de máxima hibridación. En la figura 18 se presentan la parte real e imaginaria de la energía como función del momento, como mencionamos es clara la contribución del acoplamiento disipativo en la curvatura anómala de la relación de dispersión y la disminución de la brecha, consecuencia de la disipación en cada elemento del sistema. En la 18(b) la atracción de niveles se manifiesta cuando ambas ramas se separan, además, los puntos excepcionales aparecen para valores más grandes de γ_x , dado que para esos valores, ambas ramas tienden a coincidir en algún punto.



(a) Energía como función del momento.



(b) Parte imaginaria de la energía.

Figura 18: Espectro de energía de los excitones-polaritones como función del momento para diferentes valores de γ_x manteniendo $\gamma_c = 0.1$ y $\tilde{\Omega} = 1$. En (a) las líneas punteadas corresponden a la energía de los excitones y fotones no interactuantes, en línea negra se muestra la energía de los excitones-polaritones para el caso coherente.

3.3.1. Masa efectiva, caso 3

Con la ecuación 3.23 podemos derivar y obtener los parámetros de masa, lo cual será muy similar al caso 2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{k}{m_c} + \frac{k}{m_x} \right) \pm \frac{1}{2} \left((\delta_{\mathbf{k}} - i(\gamma_c - \gamma_x))^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2 \right)^{-1/2} \\ &\quad \times (\delta_{\mathbf{k}} - i(\gamma_c - \gamma_x)) \left(\frac{k}{m_c} - \frac{k}{m_x} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Y para la segunda derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_x} \right) \pm \frac{1}{2} \left((\delta_{\mathbf{k}} - i(\gamma_c - \gamma_x))^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2 \right)^{-1/2} \left(\frac{k}{m_c} - \frac{k}{m_x} \right)^2 \\ &\quad \pm \frac{1}{2} \left((\delta_{\mathbf{k}} - i(\gamma_c - \gamma_x))^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2 \right)^{-1/2} (\delta_{\mathbf{k}} - i(\gamma_c - \gamma_x)) \left(\frac{1}{m_c} - \frac{1}{m_x} \right) \\ &\quad \mp \frac{1}{2} \left((\delta_{\mathbf{k}} - i(\gamma_c - \gamma_x))^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2 \right)^{-3/2} (\delta_{\mathbf{k}} - i(\gamma_c - \gamma_x))^2 \left(\frac{k}{m_c} - \frac{k}{m_x} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Como en el caso anterior, usemos la expresión aproximada para la energía, así obtendremos unas ecuaciones para la masa efectiva muy parecidas a las del caso 2. De nueva cuenta debemos derivar los coeficientes de Hopfield, en este caso serán los de la ecuación 3.2. De modo que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{\mathbf{k}}^2}{\partial k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{k/m_c - k/m_x}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2}} - \frac{(k/m_c - k/m_x)\delta_{\mathbf{k}}^2}{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2)^{3/2}} \right) \\ \frac{\partial S_{\mathbf{k}}^2}{\partial k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{(k/m_c - k/m_x)\delta_{\mathbf{k}}^2}{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2)^{3/2}} - \frac{k/m_c - k/m_x}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2}} \right) \end{aligned}$$

Y la segunda derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_{\mathbf{k}}^2}{\partial k^2} &= \frac{3}{2} \frac{(k/m_c - k/m_x)^2 \delta_{\mathbf{k}}^3}{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2)^{5/2}} - \frac{3}{2} \frac{(k/m_c - k/m_x)^2 \delta_{\mathbf{k}}}{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2)^{3/2}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{(1/m_c - 1/m_x)\delta_{\mathbf{k}}^2}{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2)^{3/2}} + \frac{1}{2} \frac{1/m_c - 1/m_x}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Esto para un solo coeficiente, para el siguiente tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_{\mathbf{k}}^2}{\partial k^2} &= \frac{3}{2} \frac{(k/m_c - k/m_x)^2 \delta_{\mathbf{k}}}{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{(k/m_c - k/m_x)^2 \delta_{\mathbf{k}}^3}{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2)^{5/2}} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{(1/m_c - 1/m_x) \delta_{\mathbf{k}}^2}{(\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2)^{3/2}} - \frac{1}{2} \frac{1/m_c - 1/m_x}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Con esto, ya podemos escribir la expresión de la masa efectiva a momento cero, la cual está dada por:

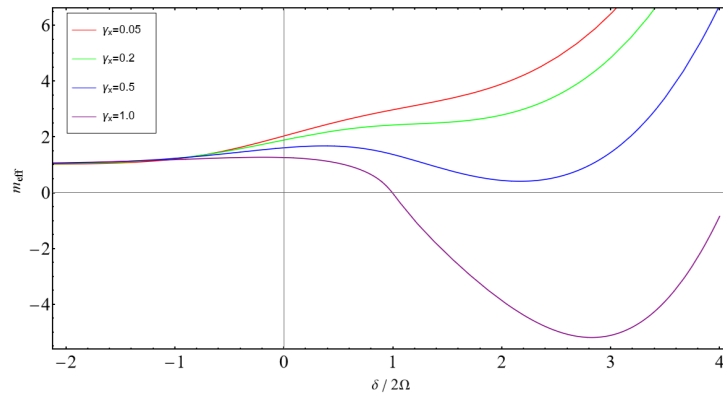
$$\frac{1}{m_{UP}^*} = \frac{C^2}{m_c} + \frac{S^2}{m_x} - i \left(\frac{1}{2} \frac{(1/m_c - 1/m_x)}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2}} (\gamma_c - \gamma_x) \left(\frac{\delta^2}{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2} - 1 \right) \right) \quad (3.31)$$

$$\frac{1}{m_{LP}^*} = \frac{S^2}{m_c} + \frac{C^2}{m_x} - i \left(\frac{1}{2} \frac{(1/m_c - 1/m_x)}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2}} (\gamma_c - \gamma_x) \left(1 - \frac{\delta^2}{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2} \right) \right) \quad (3.32)$$

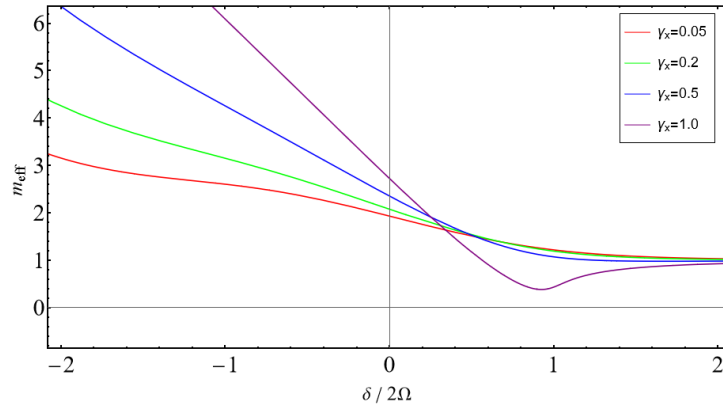
Las masas efectivas se encuentran en la figura 19, así como en las eigenenergías, lo que esperamos es que se manifiesten características de los dos casos anteriores. Lo primero es ver que la brecha entre las masas está presente debido al cambio en γ_x como se explicó en el caso 2, por otro lado, debido al acoplamiento disipativo los valles en las curvas están más presentes que en el caso 2, además de una presencia más clara de masas con valor cero y negativas. Debido al acoplamiento disipativo, los valores negativos de la masa se hacen más presentes, de modo que vale la pena estudiar cómo se comportan estos valores en un mapa de densidad, así como las curvas donde $m^* = 0$. La cual podemos graficar mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(\frac{C^2}{m_c} + \frac{S^2}{m_x} - i \left(\frac{1}{2} \frac{(1/m_c - 1/m_x)}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2}} (\gamma_c - \gamma_x) \left(\frac{\delta^2}{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2} - 1 \right) \right) \right) &= 0 \\ \text{Re} \left(\frac{S^2}{m_c} + \frac{C^2}{m_x} - i \left(\frac{1}{2} \frac{(1/m_c - 1/m_x)}{\sqrt{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2}} (\gamma_c - \gamma_x) \left(1 - \frac{\delta^2}{\delta_{\mathbf{k}}^2 + 4(\Omega_R - i\Omega_{im})^2} \right) \right) \right) &= 0 \end{aligned}$$

En la figura 20 tenemos las gráficas para diferentes valores de γ_x , para valores pequeños la masa se comporta de manera similar a la del caso 1, pero en cuanto éste crece, vemos que la distribución de los valores negativos de la masa cambia, pero además, si miramos las curvas para masa cero, éstas se aproximan a los valores presentados en la figura 15.



(a) Masa efectiva UP.



(b) Masa efectiva LP.

Figura 19: Masa efectiva para los polaritones como función de la desintonización para diferentes valores de γ_x fijando $\tilde{\Omega} = 1$ y $\gamma_c = 0.1$.

Esto se manifiesta en la deformación de la curva, como si fuera atraída hacia la zonas de masa negativa en la figura 15.

Hasta ahora, en los casos anteriores, hemos hablado de aquellos puntos donde la masa efectiva vale cero, sin embargo, ¿qué es lo que esto significa? En la siguiente sección abordaremos el caso de un sistema clásico para obtener mejores ideas conceptuales, sin embargo, esta cuestión la podemos pensar de la siguiente manera: si un sistema se comportara como si su masa fuera cero, sería equivalente a un sistema sin ningún tipo de fuerza externa actuando sobre él [24]. En el caso clásico de dos osciladores acoplados, estos, así como el resorte, tienen un factor disipativo que permite la pérdida de energía con los alrededores (tal y como sucede con los excitones-polaritones). Siendo un sistema disipativo, también es conveniente pensarlo como poseedor de una masa efectiva, la cual se verá afectada en función de la dinámica del sistema, que a su vez, depende de los parámetros disipativos. Dicho esto, lo que se encuentra en el caso donde la masa efectiva es cero, es que el sistema se comporta como un cuerpo rígido, dado que al poseer un momento nulo, la fuerza inercial del sistema también es cero, lo que vendría a ser equivalente al movimiento de un sistema sin masa. En nuestro caso, lo que ocurre con el sistema con masa efectiva cero, es algo similar, tanto la parte material como fotónica del sistema oscilan sin ningún desplazamiento de fase entre sí, es decir, algo equivalente a ese comportamiento de “cuerpo rígido” [24].

Ahora, podemos graficar los parámetros de masa con las derivadas que ya calculamos, esto se encuentra en la figura 21. Como el acoplamiento disipativo está presente, la masa inercial negativa cobra más relevancia, a diferencia del caso 2 y en concordancia con el caso 1 [9]. Para darle una mejor interpretación a la masa inercial negativa, recordemos que ésta está relacionada con la velocidad de grupo. Por lo tanto, en la gráfica de la energía presentada en la figura 21 tenemos dos puntos, si quisiéramos que el sistema pase del punto azul al verde debemos aplicar un impulso (notando que estos puntos se encuentran en una región donde $m_1 < 0$), el paquete de ondas desacelera pero continúa propagándose en la misma dirección [18]. Por otro lado, como la velocidad de grupo también tendrá cambios de signo, cuando sea menor a cero ($v < 0$) al aplicarle un impulso el paquete de onda no solo desacelera sino que cambia de dirección, esto en concordancia con lo reportado en [9].

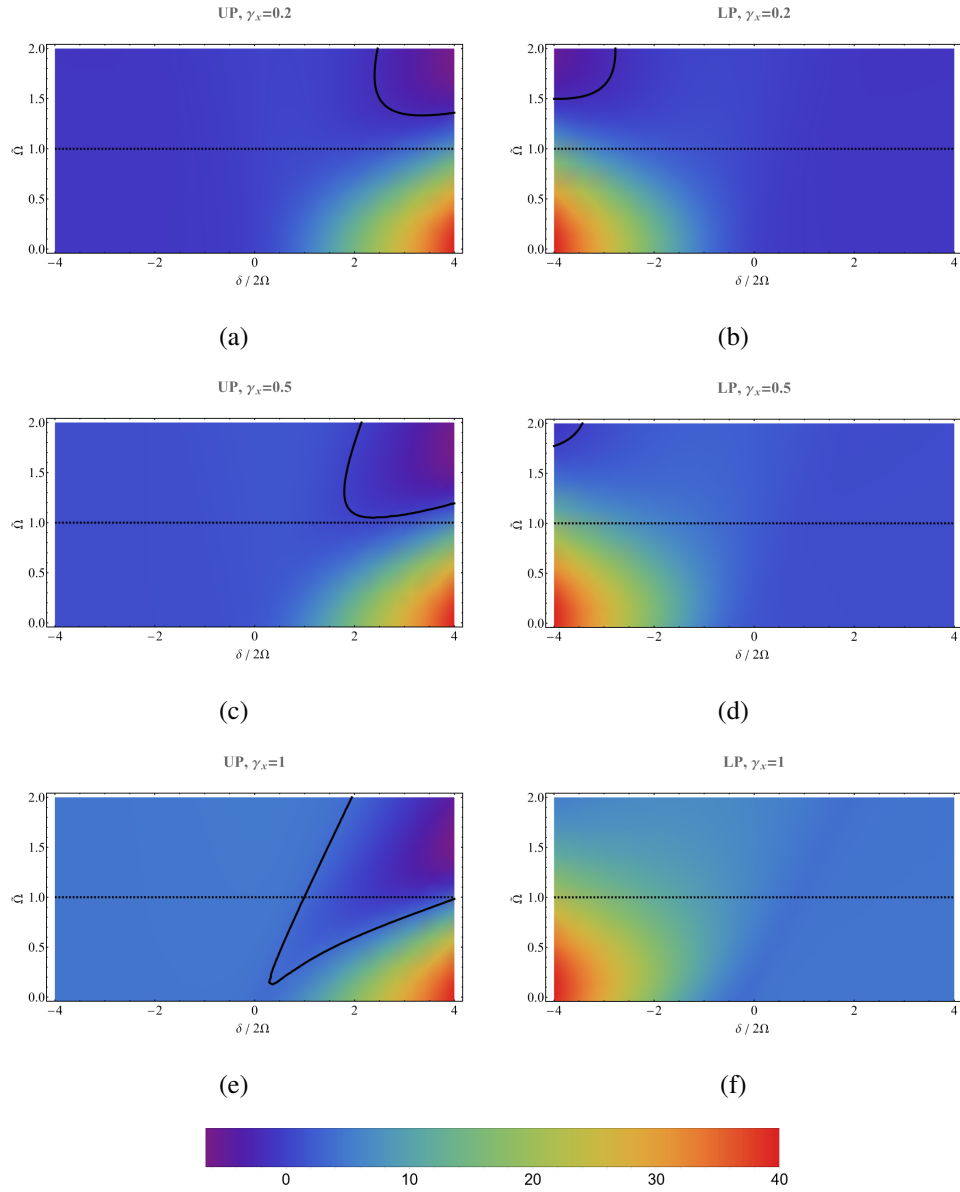


Figura 20: Mapa de densidad para la masa efectiva de los polaritones arriba y abajo dependiendo de la desintonización y $\tilde{\Omega}$, para diferentes valores de γ_x . En negro se muestran las curvas donde la masa es cero $m^* = 0$.

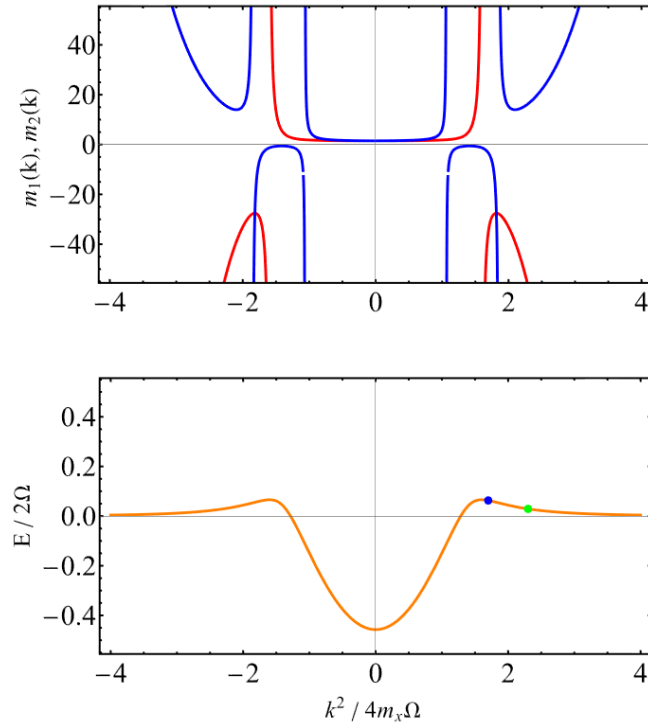


Figura 21: Parámetros de masa para los polaritones abajo. En el gráfico inferior vemos la relación de dispersión y en el superior los parámetros de masa. m_1 en rojo y m_2 en azul. Tomando $\tilde{\Omega} = 1$ y $\gamma_x = 0.7$.

4. Interpretación clásica del acoplamiento

Como el sistema excitón-polaritón es en esencia dos osciladores acoplados fuertemente, es instructivo analizar el caso clásico de dos osciladores acoplados de la misma manera. Esto nos proporcionará mejor entendimiento de lo que está pasando en el sistema cuántico. Por lo tanto, es de nuestro interés revisar los mismos casos que en el de los excitones polaritones: caso coherente sin disipación de ningún tipo, disipaciones en los osciladores individuales pero no en el acoplamiento, disipación en el acoplamiento pero no en los osciladores individuales y el caso disipativo completo.

Partamos del hecho de que un acoplamiento de cualquier tipo ocurre cuando dos osciladores están “conectados” de algún modo, de tal forma que lo que le suceda a uno sea capaz de afectar al otro. Esta configuración implica, intrínsecamente, un intercambio de energía entre cada oscilador [4]; pero lo relevante será si la energía total del sistema se conserva o existen pérdidas debido a algún efecto disipativo. De modo que podemos hacer la siguiente distinción:

- **Acoplamiento coherente:** existe un intercambio de energía propio de la configuración del sistema, sin embargo, no existen pérdidas de energía, por lo que el sistema es conservativo.
- **Acoplamiento disipativo:** de nuevo son dos sistemas intercambiando energía debido a algún tipo de interacción, pero ahora existen pérdidas de energía con el “me-

dio”, donde el medio podría ser cualquier cosa que no pertenezca a la configuración del sistema y en donde existan pérdidas de energía. Para el caso clásico de dos osciladores, el efecto disipativo aparecerá cuando exista una dependencia de la posición o velocidad en el término de acoplamiento.

Consideremos un sistema de dos osciladores, en específico dos péndulos, acoplados por un resorte. El que exista un acoplamiento coherente o disipativo dependerá de la configuración del sistema. De manera general podemos escribir las ecuaciones de movimiento para los grados de libertad ϕ_1 y ϕ_2 , siguiendo las ideas presentadas en [3], de la siguiente forma:

$$\ddot{\phi}_1 + 2\lambda_1\dot{\phi}_1 + \omega_1^2\phi_1 - f_1(\phi_1, \dot{\phi}_1) = 2J_1\omega_1(\phi_1 - \phi_2) + 2\Gamma_1(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \quad (4.1)$$

$$\ddot{\phi}_2 + 2\lambda_2\dot{\phi}_2 + \omega_2^2\phi_2 - f_2(\phi_2, \dot{\phi}_2) = 2J_2\omega_2(\phi_2 - \phi_1) + 2\Gamma_2(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) \quad (4.2)$$

Donde el lado izquierdo de ambas ecuaciones describe a cada oscilador en solitario. Los términos $\omega_{1,2} = \sqrt{g/l_{1,2}}$ corresponden a las frecuencias naturales de cada oscilador, y éste es el término de restauración lineal propio de un oscilador. Además se incluye una fuerza de fricción lineal con coeficiente de amortiguamiento $\lambda_{1,2}$ para cada oscilador, estos términos serían equivalentes a lo que en los excitones polaritones llamamos γ_x y γ_c . El término con $f_{1,2}$ corresponde a términos no lineales, ya sean de restauración (dependientes de $\phi_{1,2}$) o de fricción (dependientes de $\dot{\phi}_{1,2}$), los cuales ignoraremos para mayor facilidad. Los términos del lado derecho caracterizan al acoplamiento entre ambos osciladores, los primeros términos que son proporcionales a la diferencia entre las coordenadas ($\phi_{1,2} - \phi_{2,1}$) corresponden al acoplamiento coherente con constante de acoplamiento $J_{1,2}$. Por otro lado, los términos proporcionales a la diferencia de velocidades ($\dot{\phi}_{1,2} - \dot{\phi}_{2,1}$) hacen que la disipación en el acoplamiento aparezca, con constante de acoplamiento $\Gamma_{1,2}$. En general, estas ecuaciones no tienen solución analítica, sin embargo, podemos hacer algunas consideraciones razonables para obtener resultados satisfactorios [25]. En primer lugar, asumimos que no hay términos no lineales, es decir, $f_{1,2} = 0$. Además, para la mayoría de situaciones se cumple que $\lambda_{1,2} \gg J_{1,2}$ y $\Gamma_{1,2} \ll \omega_{1,2}$. Como nos interesa saber cómo se comportan los modos que caracterizan al sistema, proponemos la siguiente solución con sus respectivas derivadas:

$$\phi_{1,2} = A_{1,2}e^{i\tilde{\omega}t} \quad (4.3)$$

$$\dot{\phi}_{1,2} = A_{1,2}i\tilde{\omega}e^{i\tilde{\omega}t} \quad (4.4)$$

$$\ddot{\phi}_{1,2} = -A_{1,2}\tilde{\omega}^2e^{i\tilde{\omega}t} \quad (4.5)$$

Donde $\tilde{\omega}$ son las eigenfrecuencias. Para encontrarlas, sustituimos éstas expresiones en 4.1:

$$-A_1\tilde{\omega}^2 e^{i\tilde{\omega}t} + \omega_1^2 A_1 e^{i\tilde{\omega}t} + 2\lambda_1 A_1 i\tilde{\omega} e^{i\tilde{\omega}t} + 2J_1\omega_1(A_2 e^{i\tilde{\omega}t} - A_1 e^{i\tilde{\omega}t}) + 2\Gamma_1(A_1 i\tilde{\omega} e^{i\tilde{\omega}t} - A_2 i\tilde{\omega} e^{i\tilde{\omega}t}) = 0$$

$$-A_2\tilde{\omega}^2 e^{i\tilde{\omega}t} + \omega_2^2 A_2 e^{i\tilde{\omega}t} + 2\lambda_2 A_2 i\tilde{\omega} e^{i\tilde{\omega}t} + 2J_2\omega_2(A_1 e^{i\tilde{\omega}t} - A_2 e^{i\tilde{\omega}t}) + 2\Gamma_2(A_2 i\tilde{\omega} e^{i\tilde{\omega}t} - A_1 i\tilde{\omega} e^{i\tilde{\omega}t}) = 0$$

Reescribimos éstas ecuaciones usando la expresión para $\phi_{1,2}$ y sus derivadas:

$$-\tilde{\omega}^2 \phi_1 + \omega_1^2 \phi_1 + 2\lambda_1 i\tilde{\omega} \phi_1 + 2J_1\omega_1(\phi_2 - \phi_1) + 2\Gamma_1 i\tilde{\omega}(\phi_1 - \phi_2) = 0 \quad (4.6)$$

$$-\tilde{\omega}^2 \phi_2 + \omega_2^2 \phi_2 + 2\lambda_2 i\tilde{\omega} \phi_2 + 2J_2\omega_2(\phi_1 - \phi_2) + 2\Gamma_2 i\tilde{\omega}(\phi_2 - \phi_1) = 0 \quad (4.7)$$

Si identificamos todos los términos que multiplican a ϕ_1 y ϕ_2 , podemos factorizarlos y escribir las ecuaciones en forma matricial, lo cual queda de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} -\tilde{\omega}^2 + \omega_1^2 + 2\lambda_1 i\tilde{\omega} - 2\omega_1 J_1 + 2i\tilde{\omega}\Gamma_1 & 2\omega_1 J_1 - 2i\tilde{\omega}\Gamma_1 \\ 2\omega_2 J_2 - 2i\tilde{\omega}\Gamma_2 & -\tilde{\omega}^2 + \omega_2^2 + 2i\lambda_2 \tilde{\omega} - 2\omega_2 J_2 + 2i\tilde{\omega}\Gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.8)$$

Dadas las suposiciones que hicimos, podemos aproximar las eigenfrecuencias: $\omega_{1,2} + \tilde{\omega} \approx 2\tilde{\omega}$. De tal modo que podemos reescribir la matriz como sigue:

$$2\tilde{\omega} \begin{pmatrix} -\tilde{\omega} + \omega_1 + i\lambda_1 - J_1 + i\Gamma_1 & J_1 - i\Gamma_1 \\ J_2 - i\Gamma_2 & -\tilde{\omega} + \omega_2 + i\lambda_2 - J_2 + i\Gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.9)$$

Conviene cambiar a un marco de referencia rotado, en el que definimos $\omega_{ref} = (\omega_1 + \omega_2)/2$, con esto, las eigenfrecuencias en el marco original deben ser modificadas. Para esto definimos unas nuevas frecuencias en el nuevo marco $\tilde{\omega}' = \tilde{\omega} - \omega_{ref}$.

$$\begin{pmatrix} \omega_1 - \omega_{ref} + i\lambda_1 - J_1 + i\Gamma_1 - \tilde{\omega}' & J_1 - i\Gamma_1 \\ J_2 - i\Gamma_2 & \omega_2 - \omega_{ref} + i\lambda_2 - J_2 + i\Gamma_2 - \tilde{\omega}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.10)$$

Ahora definimos la desintonización entre ambos osciladores $\Delta = \omega_2 - \omega_1$, de tal modo que:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\Delta + i\lambda_1 - J_1 + i\Gamma_1 - \tilde{\omega}' & J_1 - i\Gamma_1 \\ J_2 - i\Gamma_2 & \frac{1}{2}\Delta + i\lambda_2 - J_2 + i\Gamma_2 - \tilde{\omega}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.11)$$

Para darle solución al sistema, el determinante de la matriz debe ser cero, por lo que así podemos encontrar las eigenfrecuencias. Esto nos arroja una ecuación de segundo grado para $\tilde{\omega}'$, la cual después de resolverla y simplificar con algo de álgebra, nos arroja

los siguientes resultados para las eigenfrecuencias, recordando el cómo definimos las frecuencias en el marco de referencia rotado:

$$\tilde{\omega}_{\pm} = \omega_{ref} + \tilde{\omega}' = \frac{1}{2} [(\omega_1 + \omega_2) + (G_1 - i\lambda_1) + (G_2 - i\lambda_2)] \pm \frac{1}{2} \sqrt{[\Delta - (G_1 - i\lambda_1) + (G_2 - i\lambda_2)]^2 + 4G_1G_2} \quad (4.12)$$

Donde $G_{1,2} = J_{1,2} - i\Gamma_{1,2}$. Con esto ya hemos hallado las frecuencias de ambos modos para el caso general en donde hay disipación en el acoplamiento y en ambos péndulos. La forma de proceder fue proponer una solución que dependía de las eigenfrecuencias. De un modo similar podemos proponer una solución en el marco de referencia rotado donde la amplitud y la fase dependan explícitamente del tiempo, pero con una evolución temporal lenta que permita usar el método de promediado [26]. De tal modo que $\phi_{1,2} = A_{1,2}(t)\cos[\omega_{ref}t + \theta_{1,2}(t)]$. Pasando al marco rotado, podemos reescribir las ecuaciones de movimiento en términos de la frecuencia de referencia y un término perturbativo:

$$\phi_{1,2} + \omega_{ref}^2 \phi_{1,2} + h_{1,2} = 0 \quad (4.13)$$

Donde:

$$h_{1,2} = 2\lambda_{1,2}\dot{\phi}_{1,2} + (\omega_{1,2}^2 - \omega_{ref}^2)\phi_{1,2} - 2J_{1,2}\omega_{1,2}(\phi_{2,1} - \phi_{1,2}) - 2\Gamma_{1,2}(\dot{\phi}_{1,2} - \dot{\phi}_{2,1}) \quad (4.14)$$

Debido a la dependencia de $h_{1,2}$, puede ser tratado como un término perturbativo. Por lo tanto, el método de promediado puede ser usado para eliminar las oscilaciones rápidas y así observar el comportamiento cualitativo de $A_{1,2}(t)$ y de $\theta_{1,2}(t)$ mediante las siguientes relaciones:

$$\frac{dA_{1,2}}{dt} = \langle h_{1,2} \sin \tau \rangle$$

$$\frac{d\theta_{1,2}}{dt} = \langle h_{1,2} \cos \tau \rangle$$

Donde el promedio está siendo calculado sobre un periodo $T = 2\pi/\omega_{ref}$ y $\tau = \omega_{ref}t + \theta_{1,2}$. Como lo dijimos, $A_{1,2}(t)$ y $\theta_{1,2}(t)$ varían lentamente con respecto al tiempo, por lo que podemos considerar que ambas cantidades son aproximadamente constantes en un período. Sustituyendo nuestra función propuesta y su derivada en el término perturbativo $h_{1,2}$ y considerando que varían lentamente, podemos evaluar fácilmente el promedio, ya que los términos involucrarán senos y cosenos, de los cuales es útil recordar que $\langle \sin^2 \tau \rangle = 1/2$ y $\langle \sin \tau \cos \tau \rangle = 0$.

$$\langle 2\lambda_1 \dot{\phi}_1 \sin \tau \rangle = -\lambda_1 A_1 \quad (4.15)$$

Ya que el promedio sobre un período de $\sin^2(\tau)$ es $1/2$. Para el segundo término tenemos:

$$\langle (\omega_1^2 - \omega_{ref}^2) \phi_1 \sin \tau \rangle = (\omega_1^2 - \omega_{ref}^2) A_1 \langle \sin \tau \cos \tau \rangle = 0 \quad (4.16)$$

Ya que el promedio de $\sin \tau \cos \tau$ es cero sobre un periodo. Para el tercer término tenemos:

$$\begin{aligned} \langle 2J_1\omega_1(\phi_2 - \phi_1) \sin(\omega_{ref}t + \theta_1) \rangle &= 2J_1\omega_1 [A_2 \langle \cos(\omega_{ref}t + \theta_2) \sin(\omega_{ref}t + \theta_1) \rangle - \\ &\quad A_1 \langle \cos(\omega_{ref}t + \theta_1) \sin(\omega_{ref}t + \theta_1) \rangle] \end{aligned}$$

Donde el segundo término es cero, debido a que el argumento en ambas funciones es igual y como ya vimos, el promedio de $\sin \tau \cos \tau$ es cero. Para el primero, notemos que los argumentos difieren por una fase, entonces, al hacer la integral lo que nos queda es lo siguiente:

$$\langle 2J_1\omega_1(\phi_2 - \phi_1) \sin(\omega_{ref}t + \theta_1) \rangle = \frac{A_2 J_1 \omega_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\omega_{ref}} \quad (4.17)$$

Finalmente, para el cuarto término sucede algo similar:

$$\langle 2\Gamma_1(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \sin \tau \rangle = \Gamma_1 A_1 - A_2 \Gamma_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (4.18)$$

De modo que al juntar todos estos términos obtenemos lo siguiente:

$$\frac{dA_1}{dt} = -(\lambda_1 + \Gamma_1)A_1 - \frac{A_2 J_1 \omega_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\omega_{ref}} + A_2 \Gamma_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (4.19)$$

Como mencionamos, el mismo procedimiento se realiza para A_2 :

$$\frac{dA_2}{dt} = -(\lambda_2 + \Gamma_2)A_2 - \frac{A_1 J_2 \omega_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\omega_{ref}} + A_1 \Gamma_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (4.20)$$

Acorde a lo obtenido en [3, 4]. Ahora, para el caso de $\theta_{1,2}$ hacemos un proceso de promediado completamente análogo:

$$\begin{aligned} \frac{d(\theta_1 - \theta_2)}{dt} &= -\Delta + \frac{J_1\omega_1 - J_2\omega_2}{\omega_{ref}} + \frac{(A_1^2\omega_2J_2 - A_2^2\omega_1J_1) \cos(\theta_1 - \theta_2)}{A_1A_2\omega_{ref}} \\ &\quad - \left(\frac{A_1\Gamma_2}{A_2} + \frac{A_2\Gamma_1}{A_1} \right) \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Habiendo encontrado las frecuencias y el comportamiento aproximado del sistema mediante el método de promediado, ya podemos ver cómo se comportan los 3 casos análogos al sistema de excitones-polaritones:

1. Caso sin ningún tipo de disipación.
2. Caso con disipación en cada péndulo.
3. Caso con acoplamiento disipativo.

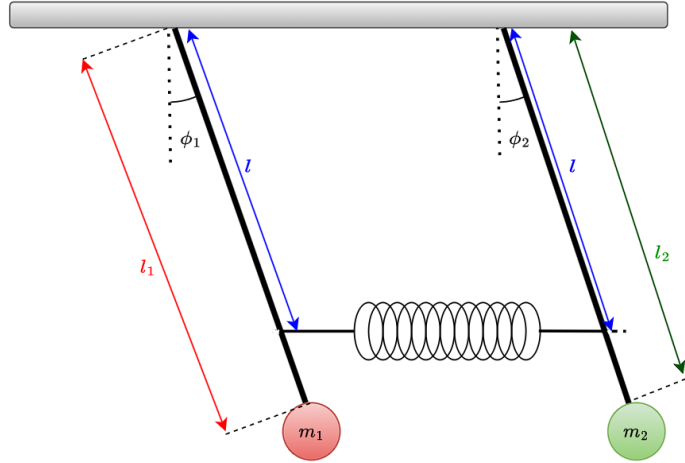


Figura 22: Esquema de dos péndulos acoplados mediante un resorte de constante k .

4.1. Caso 1

Consideremos un sistema de dos péndulos acoplados mediante un resorte de constante k sin ningún tipo de disipación. Como el que se ilustra en la figura 22. Cuyo lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}ml_2^2\dot{\phi}_2^2 - \frac{1}{2}mgl_1\phi_1^2 - \frac{1}{2}mgl_2\phi_2^2 - \frac{1}{2}kl^2(\phi_1 - \phi_2)^2 \quad (4.22)$$

Al calcular las derivadas, las ecuaciones que obtenemos, son:

$$ml_{1,2}^2\ddot{\phi}_{1,2} + mgl_{1,2}\phi_{1,2} + kl^2(\phi_{1,2} - \phi_{2,1}) = 0 \quad (4.23)$$

La cual podemos reescribir de una manera más familiar:

$$\ddot{\phi}_{1,2} + \omega_{1,2}^2\phi_{1,2} - 2J_{1,2}\omega_1(\phi_{2,1} - \phi_{1,2}) = 0 \quad (4.24)$$

Con $\omega_{1,2} = \sqrt{g/l_{1,2}}$ son las frecuencias naturales de cada oscilador. Por otro lado $J_{1,2} = kl^2/(2m\omega_{1,2}l_{1,2}^2)$ son las constantes de acoplamiento. Comparando esto con la expresión 4.12, pero con $\lambda_{1,2} = \Gamma_{1,2} = 0$. Por lo que al sustituir esto en la expresión de las eigenfrecuencias, tenemos lo siguiente:

$$\tilde{\omega}_{\pm} = \frac{1}{2} \left[(\omega_1 + \omega_2) + J_1 + J_2 \pm \sqrt{[\omega_2 - \omega_1 - J_1 + J_2]^2 + 4J_1J_2} \right] \quad (4.25)$$

La influencia del acoplamiento es más notable cerca del punto de desintonización cero: $\Delta = \omega_2 - \omega_1 \approx 0$, en tal caso, las frecuencias son aproximadamente iguales, y por cómo está definida la fuerza de acoplamiento, tenemos que para este caso: $J = J_1 \approx J_2$. Con estas consideraciones, las eigenfrecuencias se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\tilde{\omega}_{\pm} - \omega_1 = \frac{1}{2} \left[\Delta + 2J \pm \sqrt{\Delta^2 + 4J^2} \right] \quad (4.26)$$

Esto lo podemos ver en la figura 23(a). Lo primero que notamos es el cruce evitado de ambos modos, característico de un acoplamiento coherente, además, dado que existe una separación significativa entre las frecuencias de los osciladores desacoplados y las eigenfrecuencias de ambos modos, decimos que los péndulos están fuertemente hibridizados. Esta hibridación es lo que produce el cruce evitado entre ambas ramas, $\tilde{\omega}_+$ y $\tilde{\omega}_-$. La separación que existe entre ambos modos en $\Delta = 0$, la brecha tipo Rabi [27], es proporcional a la fuerza de acoplamiento, ya que:

$$\tilde{\omega}_+(\Delta = 0) - \tilde{\omega}_-(\Delta = 0) = 2J \quad (4.27)$$

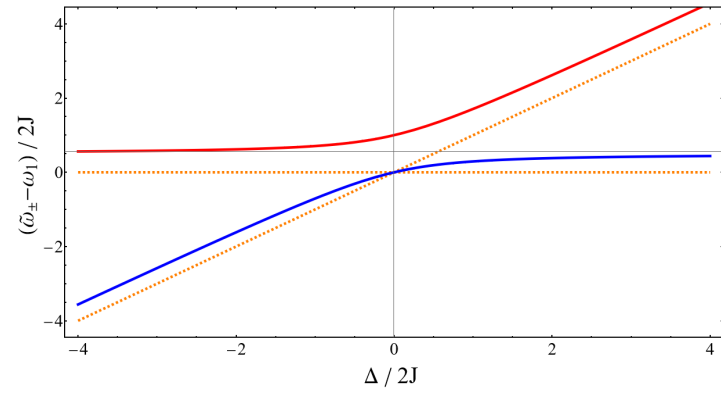
El que ambos modos se comporten de manera coherente, puede ser identificado fácilmente en el punto $\Delta = 0$ ya que ahí se cumple que: $\tilde{\omega}_-(\Delta = 0) = \omega_1$ y por la brecha $\tilde{\omega}_+(\Delta = 0) = 2J + \omega_1$. La primera de éstas condiciones establece una oscilación en fase de ambos osciladores, por otro lado, la rama superior corresponde a una oscilación fuera de fase con una diferencia de 180° . Evidentemente, este caso de los osciladores acoplados es completamente extrapolable al caso coherente de excitones-polaritones, con la diferencia de que en ese caso, la energía de ambos modos jamás se cruzaba con la de los sistemas desacoplados, lo que podríamos pensar como una ausencia de oscilación en fase, ambos modos corresponden a oscilaciones fuera de fase. También es importante notar que en este caso, no existe ninguna señal de degeneración entre ambos modos, ésta es eliminada mediante el acoplamiento de ambos péndulos, aún más, el grado de no degeneración es directamente proporcional a la fuerza de acoplamiento, ya que en $\Delta = 0$ la separación de ambos modos es $2J$ [3]. Una vez más, es lo mismo que aparecía en el sistema excitón-polaritón, ya que ahí, la fuerza de acoplamiento Ω era directamente proporcional a la separación de ambos modos, y como veremos en la siguiente sección, para que estemos en el régimen de acoplamiento fuerte, esta constante debe ser mayor que las pérdidas que tenga el sistema con sus alrededores.

Como mencionamos al inicio de ésta sección, el acoplamiento entre los péndulos, trae consigo un intercambio de energía que puede tener pérdidas o no, dependiendo de la configuración del sistema. Dado que en este caso no existe ninguna disipación esperamos que el intercambio sea de manera totalmente recíproca. Esto lo podemos ver mediante la aproximación que hicimos al inicio de esta sección mediante el método de promediado. Donde $\phi_{1,2} = A_{1,2} \cos(\omega_{ref}t + \theta_{1,2})$. Cerca de $\Delta \approx 0$ y para $J \ll \omega_{1,2}$, las ecuaciones a las que habíamos llegado se convierten en:

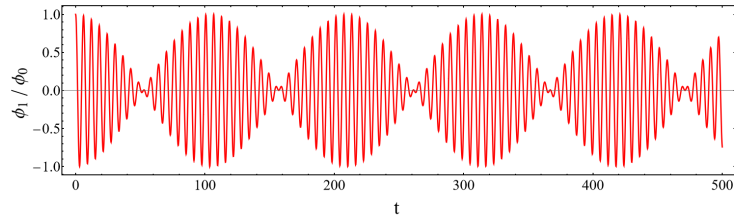
$$\frac{dA_{1,2}}{dt} = A_{2,1}J \sin(\theta_{2,1} - \theta_{1,2}) \quad (4.28)$$

$$\frac{d(\theta_1 - \theta_2)}{dt} = -\Delta + \frac{(A_1^2 - A_2^2)J \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2A_1A_2} \quad (4.29)$$

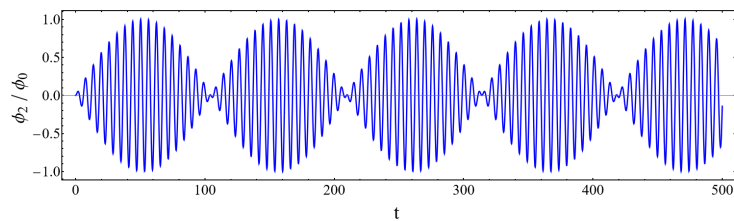
Para visualizar la dinámica de ambos osciladores acoplados, nos fijamos en el caso estacionario con $\Delta = 0$, lo que nos lleva a la condición de que $d(\theta_1 - \theta_2)/dt = 0$ pero



(a)



(b)



(c)

Figura 23: **(a)** Frecuencias de ambos modos como función de la desintonización, en anaranjado se muestran las frecuencias de los osciladores desacoplados. En **(b)** y **(c)** se muestran las oscilaciones de cada oscilador para $\Delta \approx 0$ y tomando $J/\omega_1 = 0.03$.

no necesariamente $d\theta_{1,2}/dt = 0$, bajo ésta consideración existen dos opciones para la segunda ecuación: $(A_1^2 - A_2^2) = 0$ o $\cos(\theta_1 - \theta_2) = -1$, la primera opción corresponde a una oscilación en fase o fuera de fase por 180° , $A_1 = A_2$ y $A_1 = -A_2$, respectivamente. La segunda opción corresponde a $\theta_1 - \theta_2 = (2n - 1)\pi$ lo cual corresponde a una oscilación fuera de fase por 90° , ésta es la opción que tomaremos, dado que nos proporciona un mejor entendimiento del acoplamiento [3]. Con esto, tenemos dos ecuaciones para la amplitud:

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dt} &= A_2 J \sin(\pi/2) = A_2 J \\ \frac{dA_2}{dt} &= A_1 J \sin(-\pi/2) = -A_1 J\end{aligned}$$

Cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned}A_1 &= \phi_0 \cos(Jt) \\ A_2 &= \phi_0 \sin(Jt)\end{aligned}$$

Donde hemos tomado como condiciones iniciales: $\phi_1(t=0) = \phi_2(t=0) = \phi_0$, debido a que estamos en el régimen de $\Delta = 0$ entonces $\omega_1 \approx \omega_2$. También, tomando el valor promedio de $d\theta_{1,2}/dt$ podemos aproximar $\theta_{1,2} \approx Jt$ de la expresión 4.21, entonces al sustituir en la expresión encontramos que:

$$\phi_1 \approx \phi_0 \cos(Jt) \cos[(\omega_1 + J)t] \quad (4.30)$$

$$\phi_2 \approx \phi_0 \sin(Jt) \sin[(\omega_1 + J)t] \quad (4.31)$$

Esto se encuentra en las gráficas 23(b) y 23(c), las cuales exhiben un patrón de batido con oscilaciones rápidas de frecuencia $\omega_1 + J$ y una envolvente de frecuencia J tipo Rabi [27]. La frecuencia de la envolvente es, como se aprecia en las gráficas, lo que determina la transeferencia de energía entre ambos osciladores, físicamente tiene sentido, ya que la frecuencia de la envolvente es justo la constante de acoplamiento, y como dijimos antes, el acoplamiento es lo que permite esa transferencia de energía entre ambos osciladores. Además, en este caso donde la fase es de 90 grados, la conservación de la energía se aprecia en las oscilaciones de cada péndulo.

Como conclusión de este caso, el acoplamiento coherente en este sistema nos da un mejor entendimiento de lo que veíamos en los excitones-polaritones, dado que las últimas gráficas las podemos pensar de la siguiente forma: cuando no hay disipación, la conservación de la energía entre los polaritones se manifiesta cuando un excitón decae a su estado base y libera un fotón, o viceversa, cuando un fotón excita a un electrón, y debido a que no hay pérdidas este proceso continuaría de una forma periódica así como en el caso clásico, además, hemos visto el papel de la constante de acoplamiento, que allá llamamos Ω en la separación de ambos modos y en la transferencia de energía.

4.2. Caso 2

En esta sección, estudiaremos de nueva cuenta el sistema de dos osciladores acoplados, tal y como se presenta en la figura 22, con la modificación de que introduciremos términos disipativos a cada oscilador, tal vez debido al pivote o el medio en el que se encuentran, sin embargo el acoplamiento sigue sin tener disipación. En principio, el lagrangiano de la ecuación 4.22 es el mismo, con la modificación de que introducimos la disipación mediante la función de disipación de Rayleigh [25]:

$$F = \lambda_1 m l_1^2 \dot{\phi}_1 + \lambda_2 m l_2^2 \dot{\phi}_2 \quad (4.32)$$

Las ecuaciones se obtienen mediante:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_{1,2}} - \frac{\partial L}{\partial \phi_{1,2}} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\phi}_{1,2}} = 0 \quad (4.33)$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{\phi}_{1,2} + 2\lambda_{1,2} \dot{\phi}_{1,2} + \omega_{1,2}^2 \phi_{1,2} - 2J_{1,2} \omega_1 (\phi_{2,1} - \phi_{1,2}) = 0 \quad (4.34)$$

Con las mismas identificaciones que en el caso anterior para $\omega_{1,2}$ y $J_{1,2}$. Con esto y la expresión 4.12 tenemos que los dos modos están dados por:

$$\tilde{\omega}_{\pm} = \frac{1}{2} \left[(\omega_1 + \omega_2) - i(\lambda_1 + \lambda_2) + J_1 + J_2 \pm \sqrt{[\omega_2 - \omega_1 - i(\lambda_2 - \lambda_1) - J_1 + J_2]^2 + 4J_1 J_2} \right] \quad (4.35)$$

De nueva cuenta, trabajamos en $\Delta \approx 0$ y por lo tanto $J = J_1 \approx J_2$ e introduciendo la definición de la desintonización tenemos:

$$\tilde{\omega}_{\pm} - \omega_1 = \frac{1}{2} \left[\Delta - i(\lambda_1 + \lambda_2) + 2J \pm \sqrt{[\Delta - i(\lambda_2 - \lambda_1)]^2 + 4J^2} \right] \quad (4.36)$$

Con la fórmula ya usada antes 3.4, podemos encontrar la parte real e imaginaria:

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} - \omega_1 &= \frac{1}{2} \Delta + J \\ \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{[\Delta - (\lambda_2 - \lambda_1)^2 + 4J^2]^2 + 4\Delta^2(\lambda_2 - \lambda_1)^2} + \Delta^2 - (\lambda_2 - \lambda_1)^2 + 4J^2}{2}} \\ \Delta \omega_{\pm} &= \frac{1}{2} (\lambda_2 + \lambda_1) \\ \pm \sqrt{\frac{\sqrt{[\Delta - (\lambda_2 - \lambda_1)^2 + 4J^2]^2 + 4\Delta^2(\lambda_2 - \lambda_1)^2} - (\Delta^2 - (\lambda_2 - \lambda_1)^2 + 4J^2)}{2}} \end{aligned}$$

Donde $Re(\tilde{\omega}_{\pm}) = \omega_{pm}$ y $-Im(\tilde{\omega}_{\pm}) = \Delta \omega_{\pm}$ de modo que $\tilde{\omega}_{\pm} = \omega_{\pm} - i\Delta \omega_{\pm}$. Con esto, podemos graficar los dos modos y su parte imaginaria. Esto se muestra en la figura 24,

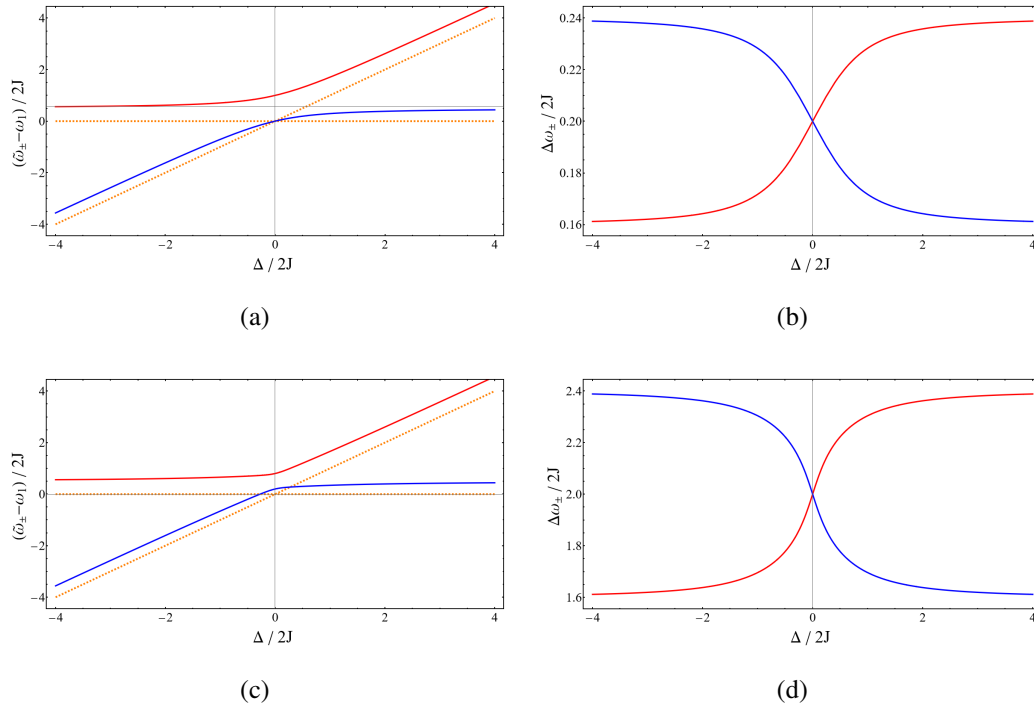


Figura 24: Frecuencias de ambos modos, parte real (lado derecho) y parte imaginaria (lado izquierdo). Donde para (a) y (b) se tomó $\lambda_2 = 0.1$ y para (c) y (d) $\lambda_2 = 1$ y para ambos casos se tomó que $\lambda_2 = 5\lambda_1$.

veoms que para valores pequeños de la disipación (acoplamiento fuerte), el comportamiento es bastante similar al caso anterior, con el mismo gap tipo Rabi y con las mismas diferencias de fase en $\Delta = 0$, también aunque la disipación se incluya el sistema aún no tiende a la degeneración. La hibridación de los dos modos también se ve reflejada en el ancho de banda (parte imaginaria $\Delta\omega_{\pm}$) ya que la evolución de ésta es atractiva, llegando a coincidir para $\Delta = 0$. La información importante que nos da el ancho de banda es que a valores grandes de la desintonización el comportamiento es asintótico, de hecho, para todo valor de Δ se cumple que $\Delta\omega_+ + \Delta\omega_- = \lambda_1 + \lambda_2$, esto lo que nos dice es que a pesar de haber disipación el sistema sigue siendo cerrado [3], lo que sucede es que aunque los osciladores intercambian energía, al no haber una disipación extra, nuestro sistema se mantiene acotado por arriba y abajo por $\lambda_{1,2}$. Esto también lo observábamos en el sistema de polaritones del caso 2, ya que la parte imaginaria mostraba este mismo comportamiento en función de los valores γ_x y γ_c . Por otro lado, la gráfica 24(c) se muestra el caso para un valor más grande de la disipación, lo que sucede es lo que ya habíamos visto en el sistema cuántico: una disminución del gap, que ahora podemos darle la interpretación de un cambio de fase entre los modos, en comparación al caso coherente. Ahora, lo que queremos es ver de nuevo el comportamiento dinámico aproximado de cada oscilador, lo haremos de la misma forma que en la sección anterior, con la diferencia de que al incluir

la disipación nuestras ecuaciones se convierten en:

$$\frac{dA_{1,2}}{dt} = -\lambda_{1,2}A_{1,2} + A_{2,1}J \sin(\theta_{2,1} - \theta_{1,2}) \quad (4.37)$$

$$\frac{d(\theta_1 - \theta_2)}{dt} = -\Delta + \frac{(A_1^2 - A_2^2)J \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2A_1A_2} \quad (4.38)$$

Bajo el mismo argumento de fijarnos en $\Delta = 0$ y en un caso estacionario en fase de 90° tenemos las siguientes ecuaciones para la amplitud:

$$\frac{dA_1}{dt} = -\lambda_1A_1 - A_2J$$

$$\frac{dA_2}{dt} = -\lambda_2A_2 + A_1J$$

Tomando las mismas condiciones iniciales, y asumiendo que ambos coeficientes de amortiguamiento son aproximadamente iguales, podemos proponer soluciones de la forma:

$$A_1 = \phi_0 e^{-\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2}t} \cos(Jt)$$

$$A_2 = \phi_0 e^{-\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2}t} \sin(Jt)$$

Y usando de nuevo que $\theta_{1,2} \approx Jt$, tenemos:

$$\phi_1 = \phi_0 e^{-\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2}t} \cos(Jt) \cos[(\omega_1 + J)t]$$

$$\phi_2 = \phi_0 e^{-\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2}t} \sin(Jt) \sin[(\omega_1 + J)t]$$

Esto está en la figura 26, donde las oscilaciones también presentan un patrón de batido al igual que en el caso anterior, con una envolvente que también depende de la fuerza de acoplamiento, por lo que esto puede ser descrito por una frecuencia tipo Rabi, el cambio más importante es que en este gráfico vemos el efecto de los términos disipativos en la transferencia de energía, lo que podemos ver en cómo la envolvente decae exponencialmente. Este decaimiento, tal y como se ve en las ecuaciones, está directamente relacionado con los coeficientes de amortiguamiento. Volviendo al sistema de polaritones, esto que vemos en la figura 26 lo podemos pensar como en la transferencia de energía en el sistema luz-materia y cómo la disipación debido a la configuración del sistema hace que esta transferencia se vea afectada en la evolución temporal. Con este análisis, no solo podemos entender mejor el papel de la disipación de energía en los polaritones, también entendemos mejor la disminución de la brecha entre ambos modos y cómo el ancho de banda está acotado por los valores de amortiguamiento.

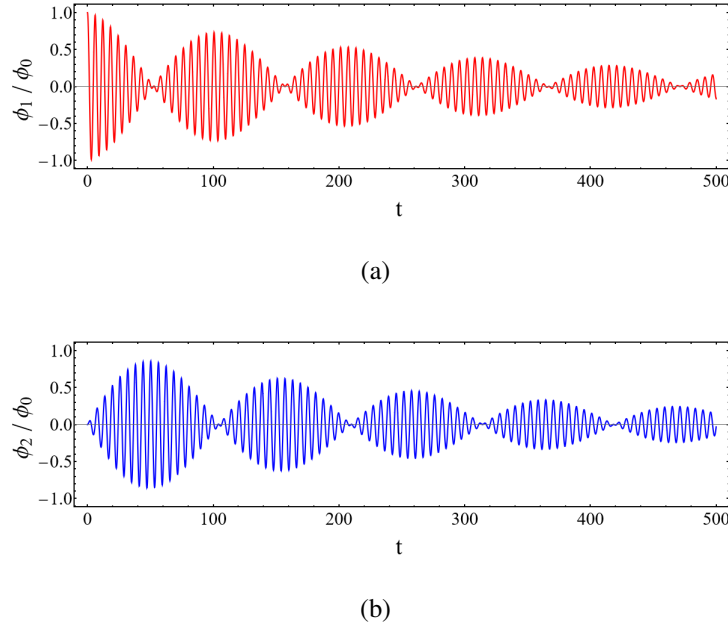


Figura 25: En (a) y (b) se muestran las oscilaciones de cada oscilador para $\Delta \approx 0$, tomando $J/\omega_1 = 0.03$ y $\lambda_2/\omega_1 = 5\lambda_1/\omega_1 = 0.005$.

4.3. Caso 3

En este caso, queremos ver el comportamiento del sistema bajo la acción de un acoplamiento disipativo, esto en el sistema de dos péndulos equivale a introducir algún mecanismo que disipe energía en el acoplamiento, en lugar del resorte ideal con el que veníamos trabajando. Pensemos en algún sistema hidráulico con algún fluido en su interior que haga que el sistema disipe energía. Al igual que en el caso anterior, trabajamos con el lagrangiano 4.22 añadiendo a la función de disipación de Rayleigh [25]:

$$F = \lambda_1 m l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \lambda_2 m l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + \nu m (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)^2 \quad (4.39)$$

Donde ν es la viscosidad del fluido que causa la disipación. Como en el sistema de la figura estamos considerando que el único medio de acoplamiento es el disipativo, tenemos que $J_1 = J_2 = 0$, esto también nos proporcionará más información acerca de lo que diferencia a ambos tipos de acoplamiento. Lo que obtenemos son las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\ddot{\phi}_{1,2} + 2\lambda_{1,2}\dot{\phi}_{1,2} + \omega_{1,2}^2\phi_{1,2} - 2\Gamma_{1,2}(\dot{\phi}_{2,1} - \dot{\phi}_{1,2}) = 0 \quad (4.40)$$

Donde la fuerza de acoplamiento es $\Gamma_{1,2} = \nu/l_{1,2}^2$. Cerca del punto de desintonización $\Delta = 0$ tenemos $\Gamma = \Gamma_1 \approx \Gamma_2$ y sustituyendo en la ecuación 4.12, tenemos las frecuencias de ambos modos:

$$\tilde{\omega}_{\pm} = \frac{1}{2} \left[(\omega_1 + \omega_2) - i(\lambda_1 + \lambda_2) - 2i\Gamma \pm \sqrt{[\omega_2 - \omega_1 - i(\lambda_2 - \lambda_1)]^2 - 4\Gamma^2} \right] \quad (4.41)$$

$$\tilde{\omega}_{\pm} - \omega_1 = \frac{1}{2} \left[\Delta - i(\lambda_1 + \lambda_2) - 2i\Gamma \pm \sqrt{[\Delta - i(\lambda_2 - \lambda_1)]^2 - 4\Gamma^2} \right] \quad (4.42)$$

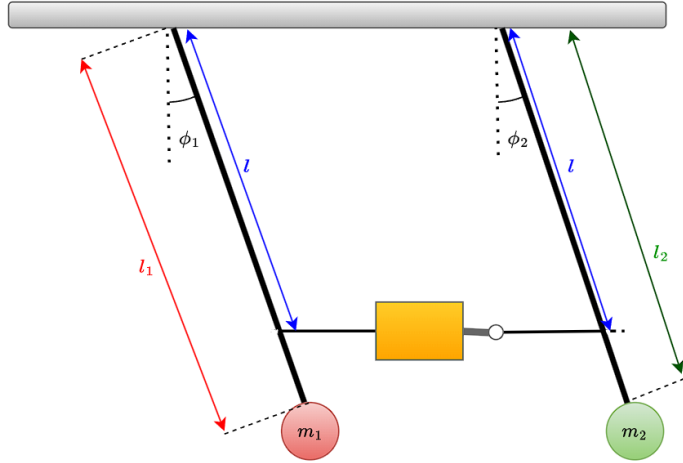


Figura 26: Esquema de dos péndulos acoplados mediante un sistema hidráulico que pueda disipar energía.

Podemos volver a aplicar 3.4 y obtener la parte real e imaginaria, considerando que $\tilde{\omega}_{\pm} = \omega_{\pm} - i\Delta\omega_{\pm}$. Obtenemos lo siguiente:

$$\omega_{\pm} - \omega_1 = \frac{1}{2}\Delta$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{[\Delta - (\lambda_2 - \lambda_1)^2 - 4\Gamma^2]^2 + 4\Delta^2(\lambda_2 - \lambda_1)^2} + \Delta^2 - (\lambda_2 - \lambda_1)^2 - 4\Gamma^2}{2}}$$

$$\Delta\omega_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_1) + \Gamma$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{[\Delta - (\lambda_2 - \lambda_1)^2 - 4\Gamma^2]^2 + 4\Delta^2(\lambda_2 - \lambda_1)^2} - (\Delta^2 - (\lambda_2 - \lambda_1)^2 - 4\Gamma^2)}{2}}$$

Las gráficas de las frecuencias y el ancho de banda para ambos modos se muestran en la figura 27. A diferencia del acoplamiento coherente, donde ambos modos se repelen, en este caso observamos una atracción de ambos modos para cierto rango de la desintonización, tal y como se ilustra en las gráficas 27(a), 27(c) y 27(e). Tal fenómeno se conoce como atracción de niveles, y es característico del acoplamiento disipativo [3, 4, 2, 22]. A consecuencia, esto ya no puede ser caracterizado por medio de un gap tipo Rabi, ahora la atracción de niveles es entendida por medio de dos puntos en donde las eigenfrecuencias tienden a ser degeneradas, a esto se le conoce como puntos excepcionales, en analogía al caso coherente, la separación entre los puntos excepcionales está caracterizada por la fuerza de acoplamiento Γ . Los puntos excepcionales se originan debido a la estructura topológica de las eigenfrecuencias complejas [3]. La repulsión de niveles también se manifiesta en el ancho de banda, ya que a diferencia del caso coherente aquí observamos una repulsión en el amortiguamiento. Esto caracterizado por los parámetros $\Gamma + \lambda_1$ y $\Gamma + \lambda_2$. Si nos centramos en las gráficas 27(a) y 27(b), vemos que para $|\Delta| > 2\Gamma$ los modos tienen frecuencias diferentes pero mismo amortiguamiento, y todo lo contrario para $|\Delta| < 2\Gamma$.

En el sistema de excitones-polaritones, específicamente en el caso 1 vimos que en la figura 7, la atracción de niveles se manifestaba en esa tendencia de los modos a formar un “cuello de botella.” entre ambas ramas, así como en la parte imaginaria la repulsión entre las ramas confirma la atracción de niveles, sin embargo, algo no se explicó en la figura 7(a), ya que aunque el “cuello de botella” se asemeja al comportamiento presentado en la figura 27, por qué persiste la brecha entre ambos modos y no la degeneración del caso clásico. La respuesta es que en el caso clásico sólo tomamos en cuenta el acoplamiento disipativo sin el coherente (el acoplamiento del resorte), pero en los excitones-polaritones además del acoplamiento disipativo también está presente el acoplamiento coherente, por lo tanto, la brecha entre ambos modos queda descrita por ambas constantes de acoplamiento, Ω_R y Ω_{im} , en conclusión, no vemos la degeneración del sistema en la gráfica 7(a) por la presencia de Ω_R . Lo que sí vemos es que la tendencia a formar el cuello de botella es justo la aparición de los puntos excepcionales, cuya brecha depende directamente de la constante de acoplamiento disipativo Ω_{im} que es el parámetro que variamos para graficar.

Para ver el comportamiento dinámico de estos sistemas, de nueva cuenta recurrimos al método de promediado, cuyas ecuaciones antes establecidas, se transforman para nuestro caso en:

$$\begin{aligned}\frac{dA_{1,2}}{dt} &= -(\lambda_{1,2} + \Gamma)A_{1,2} + A_{2,1}\Gamma \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d(\theta_1 - \theta_2)}{dt} &= -\Delta - \left(\frac{A_1\Gamma}{A_2} + \frac{A_2\Gamma}{A_1} \right) \sin(\theta_1 - \theta_2)\end{aligned}$$

De acuerdo a estas ecuaciones, para el caso estacionario con $\Delta = 0$ la diferencia de fase entre los péndulos es 0° o 180° lo cual hace que la expresión para la amplitud se simplifique bastante:

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dt} &= -(\lambda_1 + \Gamma)A_1 + A_2\Gamma \\ \frac{dA_2}{dt} &= -(\lambda_2 + \Gamma)A_2 + A_1\Gamma\end{aligned}$$

La cual podemos resolver si la escribimos en forma matricial y encontramos los eigenvalores por medio de su ecuación característica:

$$\begin{pmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 + \Gamma & \Gamma \\ \Gamma & -\lambda_2 + \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Lo cual arroja los siguientes valores:

$$\gamma_{\pm} = \frac{2\Gamma - (\lambda_1 + \lambda_2) \pm \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\Gamma^2}}{2} \approx -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \Gamma(1 \pm 1) \quad (4.44)$$

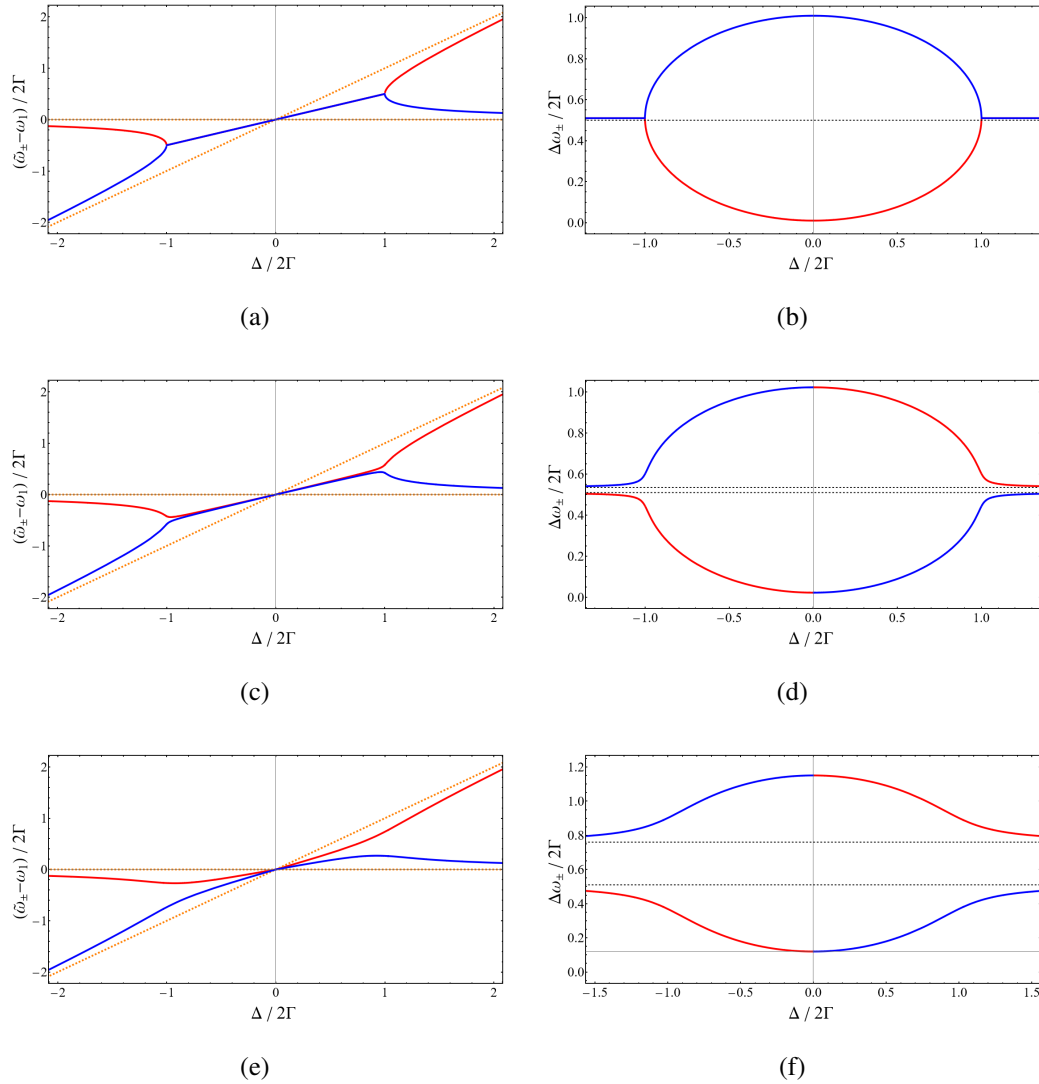


Figura 27: Frecuencias de ambos modos azul para el modo inferior ω_- y rojo para el superior ω_+ , parte real (lado derecho) y parte imaginaria (lado izquierdo). Donde para (a) y (b) se tomó $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0$, para (c) y (d) $\Delta\lambda = 0.05\Gamma$ y para (e) y (f) $\Delta\lambda = 0.5\Gamma$ además, para todas las gráficas $\lambda_1 = 0.02\Gamma$. En (a), (c) y (e) las líneas punteadas representan las frecuencias de los osciladores desacoplados. En (b), (d) y (f) las líneas negras punteadas, corresponden a $\Gamma + \lambda_1$ y $\Gamma + \lambda_2$.

Donde hemos usado el hecho de que $\lambda_{1,2}$ es muy pequeño y que al estar en acoplamiento fuerte $\Gamma^2/\lambda_1\lambda_2 \gg 1$. Tomando las condiciones iniciales $\phi_1(t=0) = \phi_0$ y $\phi_2(t=0) = 0$:

$$A_1 = \phi_0 e^{-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}t} (1 + e^{-2\Gamma t})/2$$

$$A_2 = \phi_0 e^{-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}t} (1 - e^{-2\Gamma t})/2$$

Como estamos en $\Delta = 0$, las soluciones aproximadas son:

$$\phi_1 = \frac{\phi_0}{2} e^{-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}t} (1 + e^{-2\Gamma t}) \cos(\omega_1 t) \quad (4.45)$$

$$\phi_2 = \frac{\phi_0}{2} e^{-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}t} (1 - e^{-2\Gamma t}) \cos(\omega_1 t) \quad (4.46)$$

Estas funciones se muestran en la figura 28. Al igual que en el caso 2 los parámetros $\lambda_{1,2}$ contribuyen con un decaimiento exponencial, pero además, en este caso tenemos una nueva fuente de disipación debida al acoplamiento, como asumimos $\Gamma \gg \lambda_{1,2}$ el decaimiento debido al acoplamiento supera a las pérdidas de cada sistema por separado. Esto tiene como consecuencia un decaimiento rápido en ϕ_1 y un incremento abrupto en ϕ_2 , lo cual se muestra en la figura 28. Lo más destacable es que al incluir el acoplamiento disipativo, el decaimiento rápido hace que ambos péndulos entren en un estado de sincronización, teniendo una misma amplitud y fase, a diferencia del acoplamiento coherente, donde no se observa ninguna tendencia hacia la sincronización [3, 4]. La sincronización es un fenómeno presente en la dinámica de sistemas físicos, químicos y biológicos [7]; lo que acabamos de ver es cómo puede ser inducida mediante el acoplamiento disipativo, esto se puede entender con el siguiente ejemplo: si tenemos dos metrónomos puestos sobre una misma superficie, en principio con diferente frecuencia, la superficie actuará como una reserva común de disipación para ambos sistemas, por lo que al dejar correr un tiempo suficientemente grande, ambos metrónomos, debido a la reserva compartida entrarán en sincronización. En el sistema de polaritones esto puede ser extrapolado al baño compartido por ambas partes, es decir, debido al acoplamiento disipativo, se induce la sincronización en el sistema.

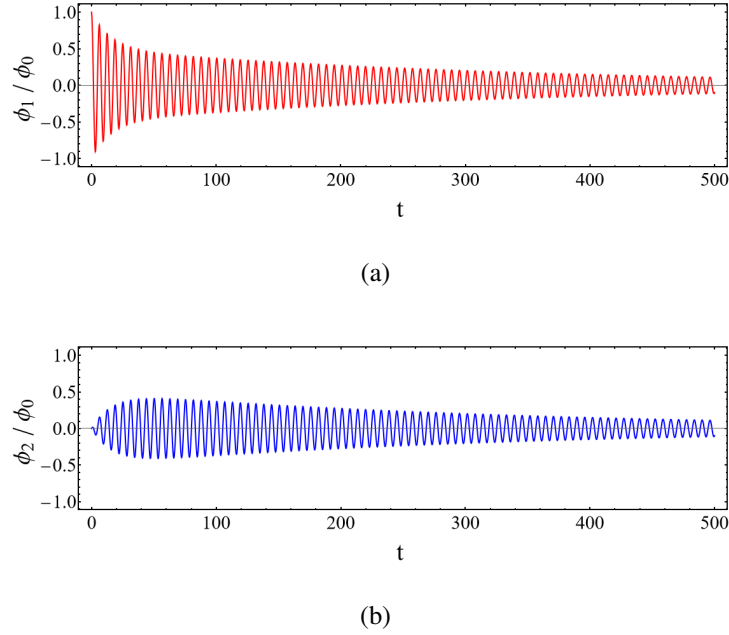


Figura 28: En **(a)** y **(b)** se muestran las oscilaciones de cada oscilador para $\Delta \approx 0$, tomando $\Gamma/\omega_1 = 0.03$ y $\lambda_2/\omega_1 = 5\lambda_1/\omega_1 = 0.005$, esto para estar dentro del rango de acoplamiento fuerte.

5. Conclusiones

A lo largo de este trabajo, vimos que la inclusión del acoplamiento disipativo provee un mejor entendimiento de los polaritones expuestos a fuentes de disipación. Principalmente, el acoplamiento disipativo tiene implicaciones importantes en el sistema: aparición de masa negativa debido a la relación de dispersión anómala, atracción de niveles entre ambos modos, los puntos excepcionales que hacen al sistema tender a la degeneración y la sincronización que extrapolamos del análisis del caso clásico. Del mismo modo, el análisis del caso clásico nos da una mejor interpretación acerca de fenómenos peculiares en el sistema cuántico: cambio en la brecha entre los modos y la masa efectiva, interpretación de la masa efectiva cero, el gap tipo Rabi que aparece en el caso coherente y la evolución dinámica de ambos osciladores dependiente de la fuerza de acoplamiento. El trabajo futuro consiste en una aproximación al acoplamiento disipativo mediante la teoría *input-output* y plantear las ecuaciones relevantes que son dependientes del tiempo [28, 29]. Así como entender mejor qué significa que haya sincronización en un sistema cuántico, que no es tan intuitivo como en el sistema clásico.

Referencias

- [1] Maximilian Schlosshauer. *Decoherence: and the Quantum-To-Classical Transition*. 1612-3018. Springer, 1 edition, Noviembre 2010.
- [2] Bimu Yao, Tao Yu, Xiang Zhang, Wei Lu, Yongsheng Gui, Can-Ming Hu, and Yaroslav M. Blanter. The microscopic origin of magnon-photon level attraction by traveling waves: Theory and experiment. *Physical Review B*, 100(21), December 2019.
- [3] M. Harder, B. M. Yao, Y. S. Gui, and C.-M. Hu. Coherent and dissipative cavity magnonics. *Journal of Applied Physics*, 129(20):201101, 05 2021.
- [4] Chenyang Lu, Mun Kim, Ying Yang, Y. S. Gui, and C.-M. Hu. Synchronization of dissipatively coupled oscillators. *Journal of Applied Physics*, 134(22):221101, 12 2023.
- [5] Iacopo Carusotto and Cristiano Ciuti. Quantum fluids of light. *Rev. Mod. Phys.*, 85:299–366, Feb 2013.
- [6] Hui Deng, Gregor Weihs, David Snoke, Jacqueline Bloch, and Yoshihisa Yamamoto. Polariton lasing vs. photon lasing in a semiconductor microcavity. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 100(26):15318–15323, 2003.
- [7] Dirk Witthaut, Sandro Wimberger, Raffaella Burioni, and Marc Timme. Classical synchronization indicates persistent entanglement in isolated quantum systems. *Nature Communications*, 8, 2017.
- [8] Yi-Pu Wang and Can-Ming Hu. Dissipative couplings in cavity magnonics. *Journal of Applied Physics*, 127(13):130901, 04 2020.
- [9] M. Wurdack, T. Yun, M. Katzer, A. G. Truscott, A. Knorr, M. Selig, E. A. Ostrovskaya, and E. Estrecho. Negative-mass exciton polaritons induced by dissipative light-matter coupling in an atomically thin semiconductor. *Nature Communications*, 14, 2023.
- [10] Charles Kittel. *Introduction to solid state physics*. John Wiley Sons, octava edition, 2005.
- [11] M. A. Bastarrachea-Magnani, A. Camacho-Guardian, M. Wouters, and G. M. Bruun. Strong interactions and biexcitons in a polariton mixture. *Phys. Rev. B*, 100:195301, Nov 2019.
- [12] Alexey V. Kavokin, Alexandra S. Sheremet, Ivan A. Shelykh, Pavlos G. Lagoudakis, and Yuri G. Rubo. Exciton-photon correlations in bosonic condensates of exciton-polaritons. *Scientific Reports*, 5, Aug 2015.
- [13] Alexey V. Kavokin, Jeremy J. Baumberg, Guillaume Malpuech, and Fabrice P. Laussy. *Microcavities*. Series on Semiconductor Science and Technology. Oxford University Press, 2017.

- [14] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Mecánica Cuántica No-Relativista*. Reverté, 1983.
- [15] Christopher C. Gerry and Peter L. Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2004.
- [16] N. R. Bernier, L. D. Tóth, A. K. Feofanov, and T. J. Kippenberg. Level attraction in a microwave optomechanical circuit. *Phys. Rev. A*, 98:023841, Aug 2018.
- [17] Dąbrowka Biegańska, Maciej Pieczarka, Christian Schneider, Sven Höfling, Sebastian Klemmt, and Marcin Syperek. Anomalous dispersion via dissipative coupling in a quantum well exciton-polariton microcavity, 2024.
- [18] David Colas, Fabrice P. Laussy, and Matthew J. Davis. Negative-mass effects in spin-orbit coupled bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 121:055302, Jul 2018.
- [19] Jonas Larson, Janne Salo, and Stig Stenholm. Effective mass in cavity qed. *Phys. Rev. A*, 72:013814, Jul 2005.
- [20] Marcelo A Marchioli and Salomon S Mizrahi. Dissipative mass-accreting quantum oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 30(8):2619, apr 1997.
- [21] Lars V. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, third edition, 1979.
- [22] Weichao Yu, Jiongjie Wang, H. Y. Yuan, and Jiang Xiao. Prediction of attractive level crossing via a dissipative mode. *Phys. Rev. Lett.*, 123:227201, Nov 2019.
- [23] J W Rao, C H Yu, Y T Zhao, Y S Gui, X L Fan, D S Xue, and C-M Hu. Level attraction and level repulsion of magnon coupled with a cavity anti-resonance. *New Journal of Physics*, 21(6):065001, jun 2019.
- [24] Shanshan Yao, Xiaoming Zhou, and Gengkai Hu. Experimental study on negative effective mass in a 1d mass-spring system. *New Journal of Physics*, 10(4):043020, apr 2008.
- [25] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Mecánica*. Reverté, segunda edition, 1994.
- [26] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. CRC Press, second edition, 2018.
- [27] Xufeng Zhang, Chang-Ling Zou, Liang Jiang, and Hong X. Tang. Strongly coupled magnons and cavity microwave photons. *Phys. Rev. Lett.*, 113:156401, Oct 2014.
- [28] Olivier Bleu, Kenneth Choo, Jesper Levinsen, and Meera M. Parish. Dissipative light-matter coupling and anomalous dispersion in nonideal cavities. *Phys. Rev. A*, 109:023707, Feb 2024.
- [29] Cristiano Ciuti and Iacopo Carusotto. Input-output theory of cavities in the ultrastrong coupling regime: The case of time-independent cavity parameters. *Phys. Rev. A*, 74:033811, Sep 2006.
- [30] A. Metelmann and A. A. Clerk. Nonreciprocal photon transmission and amplification via reservoir engineering. *Phys. Rev. X*, 5:021025, Jun 2015.