



**UNIVERSIDAD  
AUTÓNOMA  
METROPOLITANA  
Unidad Iztapalapa**

---

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Posgrado en Física

Propuesta de Investigación Doctoral

**CICATRIZACIÓN CUÁNTICA EN  
BILLARES SUAVES**

REALIZADO POR: **M. en C. Adán González Andrade**

MATRÍCULA: **2221801165**

PARA SUSTENTAR EL **Examen Predoctoral**

ASESOR: **DR. MIGUEL ÁNGEL BASTARRACHEA MAGNANI**

COORDINADOR: **DR. ORLANDO GUZMÁN LÓPEZ**

---

28 DE MARZO DE 2025

IZTAPALAPA, CIUDAD DE MÉXICO

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Caos clásico . . . . .	2
1.2. Caos cuántico . . . . .	3
1.3. Billares . . . . .	3
1.4. Billares suaves . . . . .	4
1.5. Billares cuánticos . . . . .	5
1.6. Cicatrización cuántica . . . . .	6
1.7. Cicatrización de muchos cuerpos . . . . .	6
<b>2. Objetivos</b>	<b>8</b>
2.1. Objetivo general . . . . .	8
2.2. Objetivos específicos . . . . .	8
<b>3. Metodología</b>	<b>8</b>
3.1. Solución de sistemas dinámicos . . . . .	8
3.2. Técnicas de análisis del caos y regularidad clásicos . . . . .	9
3.3. Técnicas: funciones de onda y espectros cuánticos . . . . .	10
3.4. Técnicas para el cálculo de cicatrización . . . . .	11
<b>4. Resultados Esperados</b>	<b>11</b>
<b>5. Avances</b>	<b>12</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>16</b>
<b>Calendario</b>	<b>21</b>

## 1. Introducción

En la década de los 60, el meteorólogo Edward Lorenz publicó uno de los artículos científicos más citado en la actualidad [1, 2], donde se estudió la dinámica de un fluido viscoso que resulta de la convección entre dos placas horizontales a diferente temperatura. Como resultado obtuvo unas ecuaciones diferenciales que son altamente sensibles a las condiciones iniciales. Además, encontrando que algunas trayectorias tienden a converger hacia una región específica del espacio fase, independientemente de la elección de condición inicial, esto es lo que ahora se conoce como el atractor que lleva su nombre. Su investigación se convirtió en un paradigma para el entendimiento del *caos*, transformando la visión de la comunidad científica sobre la predictibilidad en sistemas naturales complejos. En 1972 Lorenz dio una charla titulada: *Predictibilidad: ¿El aleteo de una mariposa en Brasil puede ocasionar un tornado en Texas?* Este suceso fue un parteaguas pues, desde aquel momento hasta la actualidad, el término caos ha logrado permear en la población no científica a una escala muy amplia [2]. Ahora la referencia al efecto mariposa se utiliza como una metáfora accesible para explicar a audiencias ajena al ámbito científico lo que se conoce como la teoría del caos. Lorenz intentó varias veces dar una definición de este concepto, bajo su visión: un sistema manifiesta caos cuando el *estado presente* determina completamente el *estado futuro*, pero el *estado aproximado* presente es insuficiente para determinar el *estado aproximado* en el futuro distante [3].

### 1.1. Caos clásico

Sin embargo, los primeros trabajos relacionados con el concepto de caos se remontan al trabajo del matemático Henri Poincaré [4], que prestó especial atención al sistema de tres cuerpos: Tierra-Sol-Luna; enfocándose en el comportamiento de órbitas generadas por conjuntos de condiciones iniciales. Esto le permitió mostrar la existencia de trayectorias de gran complejidad, que en la actualidad denominamos órbitas caóticas [5]. Un sistema dinámico puede definirse como un descripción matemática determinista para la evolución del estado de un sistema hacia adelante en el tiempo. Donde el tiempo puede ser tanto una variable continua (al sistema se le suele llamar flujo), o bien, discreta [5]. Así, se denomina órbita (inspirado históricamente en la mecánica celeste) a aquella trayectoria (cerrada o abierta) en el espacio fase (o de configuraciones) que es resultado de la evolución de un sistema dinámico dado un conjunto de condiciones iniciales. Cabe destacar, que las órbitas pueden ser continuas, discretas, finitas o infinitas [6]. Cuando las soluciones a las ecuaciones que rigen a un sistema dinámico presentan pequeñas variaciones ante pequeños cambios en las condiciones iniciales, se dice que las órbitas son regulares o normales [7].

Los sistemas con dos o más grados de libertad tienen órbitas periódicas que se clasifican de acuerdo con su estabilidad, es decir, según cómo responde el sistema a pequeñas perturbaciones de las trayectorias. Cuando la dinámica es caótica, se espera la aparición de órbitas periódicas inestables (UPO, por sus siglas en inglés). Aunque también pueden presentarse en sistemas regulares, no es típico [8]. La información que se obtiene de este tipo de órbitas puede utilizarse para describir propiedades estadísticas del caos como ex-

ponentes de Lyapunov, entropías o dimensiones fractales; incluso aspectos fundamentales como la estructura jerárquica del caos y las transiciones caos-regularidad [9–11].

Si se considera un sistema dinámico, tal que su estado presente exacto determina completamente todos los estados futuros, se dice que el sistema dinámico es determinista [12]. Entonces, el término caos dinámico, caos clásico o simplemente caos, se utiliza para describir el comportamiento irregular de sistemas dinámicos, el cual surge de una evolución temporal estrictamente determinista, sin ninguna fuente de ruido o estocasticidad externa. El estudio contemporáneo del caos es de utilidad para entender cómo emergen patrones y orden aparente en sistemas que inicialmente parecen completamente aleatorios, dentro de diferentes disciplinas científicas como la física, química, biología y la ingeniería [13]. Y es que los sistemas en la naturaleza exhiben tanto estructuras ordenadas como caóticas, así, el control y entendimiento del origen de la aleatoriedad son temas relevantes a la fecha para la ciencia y las ingenierías [14].

## 1.2. Caos cuántico

Cuando los efectos cuánticos son relevantes en un sistema físico, la noción clásica de caos (en términos de sensibilidad a condiciones iniciales definidas con precisión arbitraria) pierde sentido, ya que los estados cuánticos están descritos por distribuciones de probabilidad (funciones de onda) y no por trayectorias deterministas. En estos casos, uno se ve naturalmente llevado a buscar otros criterios genuinamente cuánticos que permitan distinguir entre tipos de dinámica, como lo puede ser la estadística de niveles energéticos [15]. Así, el caos cuántico aparece como la disciplina encargada de estudiar los rasgos de los sistemas cuánticos cuyos análogos clásicos son caóticos y de identificar los aspectos propios de los sistemas cuánticos no integrables. Debido al principio de correspondencia (el cual demanda que en la región semicásica, que son escalas largas comparadas con la longitud de onda de De Broglie, la mecánica cuántica continuamente recupera la mecánica clásica [16]), en el límite clásico, los aspectos que inducen una dinámica caótica deberían prevalecer en los sistemas cuánticos [17]. No obstante, queda mucho por entender acerca del papel del caos en la correspondencia clásico-cuántica. Por esta razón, se eligen los billares como objeto de estudio, pues son un modelo lo suficientemente simple para ser investigado por métodos matemáticos pero que demuestra un comportamiento típico de movimiento irregular [18], además de que históricamente se han utilizado para modelar una amplia gama de fenómenos físicos [19].

## 1.3. Billares

Los sistemas conocidos como billares son modelos paradigmáticos para explorar el caos y sus propiedades. Su estudio se remonta al trabajo de Jacques Hadamard que, en 1898, propuso un sistema que consiste en una partícula puntual de masa  $m$  que se mueve libremente, es decir, sin fuerzas externas, a lo largo de una superficie bidimensional dada  $\Omega$  [20]. Entonces, si consideramos que en la frontera  $\partial\Omega$  hay paredes sólidas (equivalente a un pozo de potencial infinito), podemos definir un billar plano de paredes duras como la región  $\Omega$  dentro de la cual, una partícula que evoluciona bajo la acción de un potencial,

puede colisionar con la frontera  $\partial\Omega$  de forma instantánea y especular, es decir, siguiendo la regla de que el ángulo de incidencia es igual al ángulo reflejado. La evolución de una partícula dentro de un billar de paredes duras no es continua, pues dentro del dominio se tiene la evolución libre y, en el momento en que ocurre una colisión, los valores de momento cambian instantáneamente  $\mathbf{p}_{\text{incidente}} \rightarrow \mathbf{p}_{\text{reflejado}}$ . En general, la evolución de una partícula durante un tiempo  $t$  en un billar de paredes duras equivale a la composición de mapeos continuos  $\mathcal{J}$  y discretos  $\mathbf{J}$ , a lo largo de intervalos  $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ , con  $i$  denotando la  $i$ -ésima colisión [21].

Los billares buscan modelar diversos fenómenos físicos en los cuales una o más partículas se mueven dentro de un contenedor y colisionan con sus paredes. Las principales propiedades de la dinámica de estos sistemas físicos están determinadas por la forma de las paredes del contenedor [22]. Por ejemplo, si la frontera es un círculo o una elipse entonces el sistema es integrable (regular) [23]. Sin embargo, una frontera deformada conduce a un sistema altamente caótico (debido a los cambios de signo en la curvatura); como lo mostró Yakov Sinai con su billar [24] y posteriormente reafirmado por Leonid Bunimovich [25].

Por otro lado, si se estudia a los billares más como modelo físico que matemático, hay que tomar en cuenta que las partículas no experimentan colisiones instantáneas, sino que son desviadas progresivamente debido a la acción de un campo [26]. De ahí es que surge el concepto de billar suave como un modelo un tanto más realista que un pozo de potencial infinito.

## 1.4. Billares suaves

Como se mencionó antes, los billares de paredes rígidas tienen la particularidad de introducir una discontinuidad en la evolución del espacio fase. Un enfoque alternativo, empleado para estudiar sistemas donde la suavidad es físicamente relevante, consiste en introducir suavidad en la frontera del billar. Al hacerlo, la partícula cambia su momento de forma continua durante un lapso, y luego continúa su evolución, evitando las discontinuidades en el espacio fase y permitiendo así la descripción completa de la dinámica resolviendo las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Por una parte, los billares de paredes suaves son de interés teórico ya que su dinámica puede analizarse de manera exhaustiva mediante las herramientas de la mecánica Hamiltoniana, gracias a la continuidad de sus trayectorias. Además, se ha mostrado que la suavidad en un billar tiene un efecto estabilizador en la dinámica [27]. Así, se pueden estudiar propiedades dinámicas adicionales que aportan riqueza al entendimiento del caos y la regularidad.

El punto de partida para modelar un billar suave es escribir una función Hamiltoniana para un pozo de potencial que es suave en su frontera, es decir,

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y; h), \quad (1.1)$$

donde  $h$  es un nuevo parámetro el cual modula la dureza del billar [28]. Además, el potencial viene dado como

$$V(x, y; h) = \operatorname{erf}\{h(\partial\Omega)\}, \quad (1.2)$$

donde  $\partial\Omega$  corresponde a la ecuación en forma implícita de la curva para la frontera y  $\operatorname{erf}$  denota a la función error  $\operatorname{erf}(x) = 2\pi^{-1/2} \int_0^x e^{-s^2} ds$ . Cabe destacar que en la literatura pueden encontrarse diferentes perfiles para suavizar un billar, como por ejemplo funciones polinomiales [29]. El parámetro de dureza toma sentido al revisar sus casos límite, pues cuando  $h \rightarrow 0$  se tiene la situación donde la contribución de las fronteras es nula y se recupera el potencial de una partícula libre. Mientras que en el límite  $h \rightarrow \infty$  se tiene un pozo de potencial infinito: caso de paredes duras. Así, los billares suaves resultan en una extensión natural de los billares clásicos. En este proyecto se busca extender aún más este concepto para también modelar fenómenos cuánticos.

## 1.5. Billares cuánticos

Se define un billar cuántico plano (en el sentido de paredes duras) como un pozo bidimensional con paredes infinitas y potencial nulo en su interior [30]. La posición de las paredes queda determinada por una curva cerrada  $\mathcal{C}$ , y en el interior por un dominio  $\mathcal{D}$  haciendo que este sistema sea ligado para cualquier energía. Ahora, la dinámica está regida por la ecuación de Schrödinger en el interior del pozo que se anula en el contorno. Para el caso estacionario, si se expresa la energía en términos del número de onda  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ , el problema se reduce a resolver la ecuación de Helmholtz con condición de Dirichlet en la frontera

$$\nabla^2 \varphi = -k^2 \varphi \text{ en } \mathcal{D}, \quad \varphi = 0 \text{ en } \mathcal{C}. \quad (1.3)$$

En un billar cuántico comúnmente se estudia el espectro, el cual consiste en un número infinito de valores propios  $0 > k_1^2 \geq k_2^2 \geq \dots$ , con sus respectivas funciones propias asociadas  $\phi_1, \phi_2, \dots$

Las funciones propias asociadas  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ , pueden ser normalizadas y constituyen un conjunto ortonormal completo para las funciones de cuadrado integrable, donde cada función es infinitamente diferenciable en los puntos interiores. El conjunto de puntos donde cada función propia  $\psi_i$  se anula es llamado el conjunto nodal, el cual consiste de curvas infinitamente diferenciables en el interior de  $\mathcal{V}$ . En el caso de una membrana oscilante, por ejemplo, las curvas nodales aparecen donde la membrana se mantiene en reposo durante una *eigenvibración* [31]. Cuando  $m$  curvas nodales se cruzan en un punto, lo hacen formando ángulos iguales  $\pi/m$  [30]. En ese sentido, un gran reto para la resolución de un billar cuántico duro (pozo de potencial escalonado) es el de incorporar en el modelo un ensamble de funciones adecuadas que respeten las condiciones de frontera del billar [32].

A la fecha, los billares cuánticos han sido estudiados exhaustivamente. Por un lado, hay diversas investigaciones teóricas, por ejemplo, para la descripción del caos en diferentes geometrías [33], el estudio de fenómenos de transporte [34, 35], el modelaje de fluidos cuánticos como el de  ${}^4\text{He}$  [36] o para estudiar el principio de correspondencia clásico-cuántico [37, 38]. A su vez, se han realizado implementaciones experimentales con billares de microondas [39, 40], billares nanoscópicos en monocapas de dicalcogenuros de

metales de transición (TMD) para el estudio la estabilidad de estados cristalinos [41], billares opto-atómicos [42, 43], billares de fluidos polarítónicos [44]. Sin embargo, hay una dirección de estudio para estos sistemas que ha sido escasamente estudiada y es de particular interés para este proyecto: la cicatrización cuántica.

## 1.6. Cicatrización cuántica

Décadas atrás, Michael Berry [45] conjeturó que las funciones propias de sistemas cuánticos cuyo análogo clásico es caótico deberían parecerse localmente a una superposición de ondas planas. Con esto, la función de onda es modelada como

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_i^n c_i \sin(\mathbf{k}_i \mathbf{r} + \phi_i), \quad (1.4)$$

donde  $\mathbf{k}_i$  son vectores de onda uniformemente distribuidos en todas las direcciones con una magnitud fija  $k$ ,  $\phi_i$  son fases aleatorias uniformemente distribuidas y  $c_i$  son coeficientes aleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo  $(-1, 1)$  y normalizados de forma que  $\int_V |\psi|^2 d\mathbf{r} = 1$  [17].

Para el problema de un billar de Bunimovich cuántico, Steven McDonald y Allan Kaufman abordaron la solución de la ecuación de Helmholtz (1.4) de forma numérica, donde identificaron curvas nodales que son afectadas por órbitas periódicas [46]. Concluyendo que existe una repulsión mutua entre valores propios vecinos y una direccionalidad aleatoria para las curvas nodales. Inspirado por este trabajo, Eric Heller [47] bautizó estas huellas generadas por las órbitas periódicas inestables como *cicatrices cuánticas*. Así, de acuerdo con Heller [48] se establece la siguiente definición: Un estado propio cuántico de un sistema que es clásicamente caótico tiene una cicatriz de una órbita periódica inestable si su densidad en las variedades clásicas, cerca de la órbita periódica, difiere de forma significativa de la densidad estadísticamente esperada.

Un aspecto relevante de los billares cuánticos es que los estados propios están influenciados no sólo por la superficies de energía, sino también por las órbitas cerradas del sistema clásico. En otras palabras, las órbitas de alguna manera, dejan una huella que persiste a través de miles de estados y probablemente sobreviven hasta el límite clásico [49]. La cicatrización cuántica se ha estudiado en billares desde 1984 [47] hasta la fecha [50, 51]. Tomando diferentes geometrías como el estadio de Bunimovich [52] y el billar de Sinai [53]. Pero también otras menos convencionales como la geometría triangular [54], de diamante [55] o hasta una frontera ondulada [56]. Sin embargo, el fenómeno de la cicatrización es más general que el caso de un billar y en ello recae que sean fundamentales para el entendimiento de los sistemas cuánticos.

## 1.7. Cicatrización de muchos cuerpos

Debido a las complicadas interacciones entre sus componentes, los sistemas cuánticos de muchos cuerpos no son típicamente integrables y exhiben caos. El caos se piensa como un

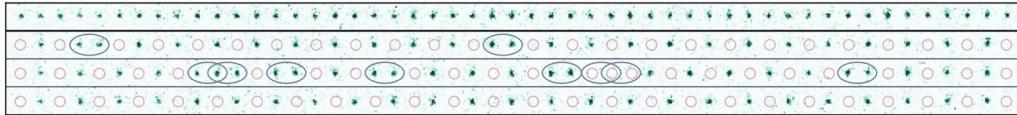


Figura 1: Arreglo experimental de una cadena de 51 átomos visualizado vía fluorescencia. Fila superior: antes de aplicar un pulso adiabático. Tres filas inferiores: instancias separadas después del pulso. Los círculos rojos indican ausencia de átomos atribuida a excitaciones de Rydberg. Las elipses azules indican pares de átomos que funcionan como paredes ya sea por encontrarse en el mismo estado o por estar en su estado base. Figura tomada de [58].

mecanismo que hace posible que los sistemas cuánticos alcancen estados de equilibrio y térmicos, como sucede en el caso clásico. Es por eso que en general satisfacen la llamada Hipótesis de Termalización de Eigenestados (ETH, por sus siglas en inglés) [57]. Gracias a un importante experimento en un simulador de cuántico de un átomo de Rydberg el fenómeno de cicatrización cuántica de muchos cuerpos ha atraído la atención en la última década [58] (ver figura 1). El comportamiento que observaron no pudo ser caracterizado por un ensamble térmico simple pues sus observaciones sugirieron que el sistema no termaliza dentro de las escalas de tiempo que esperaban, lo cual resultó ser inesperado ya que su sistema no se asemeja a ningún sistema integrable conocido. Fueron en trabajos posteriores, donde se observó que esto se debía en gran medida a estados propios que tendían a distribuirse de forma inesperada, análogamente a los estados cicatrizados que se concentraban en la vecindad de órbitas periódicas inestables clásicas [59], de ahí que surge el concepto de *cicatriz cuántica de muchos cuerpos*. Sin embargo, para justificar la analogía con las cicatrices en billares cuánticos, debería existir alguna noción de trayectoria clásica subyacente a los estados propios. Encontrar tal trayectoria, y más generalmente el contrapunto clásico de un sistema cuántico de muchos cuerpos, es de hecho uno de los objetivos centrales del campo del caos cuántico [60]. Además de tener implicaciones profundas en el entendimiento del caos en sistemas cuánticos, este fenómeno resulta importante pues las cicatrices cuánticas de muchos cuerpos permitirían transportar y proteger información en sistemas cuánticos complicados, lo que ha motivado investigaciones sobre su posible aplicación en información cuántica [61].

A pesar de existir estudios sobre cómo la suavidad afecta las propiedades de los billares cuánticos, éstos son escasos [62]. Incluso los billares suaves clásicos no se han estudiado a profundidad, por ejemplo, hay geometrías típicas del caso de paredes duras a las que no se les ha estudiado el efecto de un potencial suave en su frontera. Además del efecto de otros aspectos que naturalmente surgen en billares suaves, como la energía del sistema o la disipación de partículas. Por tanto, se pretende estudiar el efecto de la suavidad en los billares cuánticos y su conexión con aspectos fundamentales de la cicatrización de uno y de muchos cuerpos.

## 2. Objetivos

Para delimitar el alcance de este proyecto se delimitan los siguientes objetivos.

### 2.1. Objetivo general

El objetivo general de este trabajo es estudiar la presencia y robustez de cicatrices cuánticas en billares suaves con geometrías tradicionales o modulables.

### 2.2. Objetivos específicos

- Resolver la dinámica de billares duros y billares suaves, así como caracterizar sus regímenes de regularidad y caos como función de los parámetros relevantes del sistema.
- Estudiar y calcular cicatrices cuánticas y UPOs en billares cuánticos tradicionales o modulables y caracterizar su dinámica.
- Cuantizar billares suaves con geometrías tradicionales o modulables y caracterizar su dinámica.
- Aprender las técnicas de análisis de caos cuántico para el estudio de las propiedades de los billares cuánticos suaves.
- Confirmar la presencia de cicatrización cuántica en billares cuánticos suaves con geometrías tradicionales o modulables.
- Explorar la posibilidad de extender el estudio de cicatrices cuánticas en billares cuánticos suaves en el terreno de sistemas cuánticos de muchos cuerpos.

## 3. Metodología

En esta sección, se presentan las herramientas teóricas y numéricas necesarias para la realización de este proyecto.

### 3.1. Solución de sistemas dinámicos

Se usará la herramienta numérica desarrollada en el lenguaje *Julia* para mi tesis de maestría como punto de partida [3]. La cual permite evolucionar partículas en un billar suave clásico dadas las ecuaciones de movimiento de Hamilton correspondientes una curva diferenciable como frontera, como en el caso, por ejemplo, de una circunferencia, una elipse y una *squircle*. Un aspecto a resaltar es que este herramienta permite integrar ecuaciones diferenciales con rigidez (*stiffness*), lo cual es uno de los principales problemas a tratar

cuando se trabaja con billares suaves [27]. Esta rigidez se traduce en órbitas que tienden a curvas no diferenciables (poco suaves). Entonces, para valores de dureza suficientemente grandes, las ecuaciones de movimiento no se pueden integrar por métodos convencionales, como puede serlo Runge-Kutta de orden 4 [63]. Con lo anterior, será posible explorar diferentes geometrías de interés para este proyecto.

Como preámbulo para el estudio de billares suaves cuantizados se hará uso de algunas técnicas bien conocidas para el estudio de caos cuántico, tales como los indicadores espectrales (distribuciones de primeros vecinos [64], factor  $r$  [65]) e indicadores dinámicos de caos [66]. Para esto, se deben identificar las órbitas periódicas inestables, que se relacionan directamente con el fenómeno de cicatrización. Además, se pretende extender el estudio a los sistemas de muchos cuerpos. Para esto, se indagará en los métodos más adecuados para estudiar el caos en estos sistemas.

### 3.2. Técnicas de análisis del caos y regularidad clásicos

Para estudiar de forma cualitativa la dinámica de un sistema y poder identificar regiones del espacio fase que presentan caos, se suele recurrir a una técnica denominada método de la sección transversal de Poincaré o, simplemente, secciones de Poincaré (PSOS, por sus siglas en inglés). Si bien puede utilizarse en sistemas de dimensión mayor, es particularmente útil en sistemas con dos grados de libertad [67]. Esta técnica consiste en transformar una evolución continua en un mapeo discreto, donde cada punto de éste se representa como una perforación de una superficie de energía constante por dicha trayectoria en el espacio fase. Esto facilita la identificación de órbitas periódicas y cuasiperiódicas que son clave para comprender la naturaleza del comportamiento caótico [68]. A pesar de la utilidad de esta herramienta, la información que se le puede recuperar es únicamente cualitativa.

Para un análisis cuantitativo del caos, se suele recurrir a los exponentes de Lyapunov [19, 69, 70]. Esta herramienta proviene de estudiar el ritmo al que dos condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas se alejan a tiempos largos. La naturaleza de esta cantidad surge de linealizar la dinámica, donde se observa que

$$|\mathbf{u}(t)| \approx |\mathbf{u}(0)| e^{\lambda t}, \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{u}(t) = (\mathbf{q}(t); \mathbf{p}(t))$  es un vector del espacio fase que cuantifica la separación entre dos órbitas, inicialmente cercanas, al tiempo  $t$ . Donde a la cantidad  $\lambda$  se le llama exponente de Lyapunov.

No sólo hay un exponente de Lyapunov, sino un espectro cuya dimensión es la misma que la del sistema dinámico de estudio. Cada exponente  $\lambda_i$  del espectro puede interpretarse como la razón de crecimiento promedio de los ejes principales de una elipsoide infinitesimal, que rodea un punto del espacio fase y evoluciona de acuerdo a una regla dinámica dada (ecuaciones de movimiento). Por tanto, el espectro de Lyapunov describe el ensanchamiento y contracción característico del flujo en el espacio fase [21]. En un espacio fase como el de un billar (con dos coordenadas de posición y dos de momento) todos los vectores de perturbación crecen asintóticamente con el máximo exponente de Lyapunov

del espectro  $\lambda_1$ . Además, se cumple en este caso que  $\lambda_2 = -\lambda_3$  y  $\lambda_4 = -\lambda_1$  [71], lo cual proviene de la simetría de pares de Smale. Para sistemas Hamiltonianos (que conservan energía), se tiene que  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  [72].

Aunque el espectro de Lyapunov se puede utilizar para proporcionar una definición cuantitativa del caos, el máximo exponente de Lyapunov  $\lambda_1 \equiv \lambda$ , es el más importante de todo el espectro. Pues tanto la magnitud como el signo de esta cantidad revelan información sobre la dinámica del sistema estudiado. Tomando como referencia la ecuación (3.1), se discuten los tres posibles valores de esta cantidad:

1. ( $\lambda < 0$ ). Aquí  $e^{\lambda t}$  decrece hacia cero a medida que  $t$  aumenta. Esto significa que la magnitud de cualquier perturbación inicial  $|u(0)|$  tiende a disminuir exponencialmente rápido hacia cero. En términos de la dinámica del sistema, las trayectorias que inicialmente están cerca una de la otra tienden a converger con el tiempo. El sistema, por lo tanto, tiene la capacidad de retornar a un estado estable después de ser perturbado, y pequeñas variaciones o errores tienden a amortiguarse con el tiempo. Entonces un exponente de Lyapunov negativo mediría el ritmo al que un sistema se aproxima a algo típico de un punto particular: un atractor regular [7].
2. ( $\lambda = 0$ ). Si  $e^{\lambda t} = 1$ , independientemente del valor de  $t$ , significa que la magnitud de cualquier perturbación inicial  $|u(0)|$  se mantiene constante a lo largo del tiempo. Desde el punto de vista dinámico, las trayectorias que inicialmente están cerca una de la otra no convergen ni divergen significativamente en el tiempo. Este es el caso de movimiento regular [73].
3. ( $\lambda > 0$ ). Cuando  $e^{\lambda t}$  aumenta exponencialmente a medida que  $t$  se hace grande, entonces la magnitud de cualquier perturbación inicial  $|u(0)|$  crece exponencialmente con el tiempo. Así, las trayectorias que inicialmente están cercanas comienzan a divergir rápidamente una de otra. Esto cuantifica el promedio de crecimiento de una desviación infinitesimal de una órbita regular a partir de una perturbación. En este caso se dice que el movimiento es caótico [7].

Además de las secciones de Poincaré y los exponentes de Lyapunov existen otros métodos que se revisarán para estudiar su viabilidad como cuantificadores el caos en un billar, como lo puede la caracterización de parámetros no lineales [74] o la entropía de Kolmogorov-Sinai, que caracteriza el grado de inestabilidad hiperbólica en sistemas dinámicos y que puede relacionarse con coeficientes de transporte en situaciones fuera de equilibrio [75]. Esto permitirá estudiar aspectos más profundos de la dinámica de un sistema caótico.

### 3.3. Técnicas: funciones de onda y espectros cuánticos

Se buscará la forma óptima de cuantizar un billar suave. Comenzando por implementar los métodos de Eduardo Vergini [30] para billares duros, que consisten en resolver la ecuación de Schrödinger en pozos de potencial con condiciones de contorno adecuadas. También se estudiarán los métodos semicuánticos con integrales de camino, considerando las reglas de cuantización semicuántica tipo Bohr-Sommerfeld-Einstein-WKB que son un estándar [76]. También se estudiará la teoría de Gutzwiller sobre órbitas periódicas, donde se remplazan las integrales de camino por una suma infinita sobre todas las órbitas

periódicas, permitiendo con esto que el espectro de energía quede determinado completamente por cantidad puramente clásicas, como lo pueden ser las longitudes de las órbitas periódicas y sus exponentes de Lyapunov [77].

### 3.4. Técnicas para el cálculo de cicatrización

En principio, se buscará caracterizar las familias de órbitas en los billares de este proyecto para investigar la presencia de cicatrizes de trayectorias periódicas en las funciones propias a partir de las técnicas propuestas por Vergini [30]. Posteriormente, se implementará la evolución de paquetes de onda de acuerdo a los planteamientos de Heller [48], tomando en cuenta los tiempos de recurrencia  $\tau$ , que son una función de la matriz de estabilidad y la forma inicial del paquete de onda (estos tiempos están ponderados por el exponente de Lyapunov). También se explorará la viabilidad de usar un análisis puramente cuántico, como lo pueden ser funciones de Husimi para analizar localización en el espacio fase [78].

## 4. Resultados Esperados

Existen diversas metodologías para detectar y clasificar UPOs, ya sea haciendo aproximaciones lineales, o bien, usando la fuerza bruta de cómputo. Aún así, estos métodos suelen ser generales para sistemas dinámicos y no han sido desarrollados en plenitud para billares suaves. En este trabajo se espera encontrar el método óptimo para caracterizar familias de UPOs en el caso de billares suaves y entender su relación con el parámetro de dureza y la geometría del potencial. Con lo anterior, se planea identificar los cuantificadores de caos clásico óptimos para el caso de un billar suave.

Después de caracterizar la dinámica clásica, y considerando los métodos para cuantizar billares duros, los cuales se basan principalmente en resolver la ecuación de Schrödinger con condiciones de contorno de Dirichlet; se espera encontrar una metodología que permita, de forma sistemática, cuantizar un billar suave. Esto supone una herramienta que sea capaz de calcular funciones de onda dada una geometría y dureza del potencial para el billar. Primero abordando el problema estacionario y, de ser posible, al caso con dependencia temporal. Las limitaciones dependerán de la complejidad numérica de los potenciales con rigidez que usualmente aparecen al estudiar billares suaves. A pesar de esto, se estima poder determinar un rango de aplicabilidad de la metodología en función de los recursos computacionales disponibles.

Una vez que se tengan herramientas para resolver billares cuánticos suaves, se planea identificar los métodos óptimos para el estudio del caos cuántico en este tipo de sistemas, aprovechando las herramientas desarrolladas para el estudio del caos clásico en este modelo. A su vez, se anticipa aportar información sobre la influencia que tiene la geometría y la dureza del potencial en la dinámica cuántica de un billar. Además, se propone desarrollar herramientas numéricas para el estudio y caracterización de la cicatrización cuántica estándar en billares suaves. Con esto, se espera comprender de manera integral el papel del caos cuántico dentro del marco de la correspondencia clásico-cuántica. Finalmente,

se espera que este trabajo ofrezca herramientas numéricas y teóricas que contribuyan a la comprensión del fenómeno de la cicatrización cuántica de muchos cuerpos. Esperando extender el estudio a posibles conexiones con realizaciones experimentales de billares cuánticos suaves de muchos cuerpos.

## 5. Avances

Se cuenta con una herramienta para resolver la dinámica de billares suaves [3]. La cual primero se implementó en una geometría elíptica y posteriormente se llevó a al caso de un *squiricle*. Este nombre proviene de la combinación anglosajona *square* y *circle* y es una curva que va desde un círculo hasta un cuadrado y viceversa. En el caso anisotrópico que se presenta a continuación [79], se puede mapear un rectángulo a una elipse. La curva de un *squiricle* es

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{s^2 x^2 y^2}{\alpha^2 \beta^2} = 1, \quad (5.1)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son los lados del rectángulo, o bien, el semieje mayor y semieje menor de la elipse, de acuerdo al caso límite correspondiente y dependiendo de la orientación de la curva. El parámetro de *cuadradez*  $s$  toma valores  $0 \geq s \geq 1$ , donde se recupera un rectángulo si  $s = 1$  y una elipse cuando  $s = 0$ .

Se tiene la capacidad de cómputo para evolucionar la dinámica a durezas muy altas (probado hasta  $h \approx 100$ ) y tiempos muy grandes (del orden de  $10^6$  pasos de computadora). Sin embargo, puede llegar a requerir grandes cantidades de poder de cómputo. Los cálculos mostrados a continuación se realizaron en un equipo con 256gb de memoria RAM, que permite completar las tareas en un tiempo razonable. Conociendo el potencial que rige la dinámica de una partícula dentro del billar, y por tanto las ecuaciones de movimiento de Hamilton, esta herramienta numérica permite resolver el billar suave. Por una parte, ésta integra las ecuaciones de movimiento que dependen de la dureza del pozo de potencial  $h \in (0, \infty)$ . Por ejemplo, para el billar suave de *squiricle* se muestran unas trayectorias en

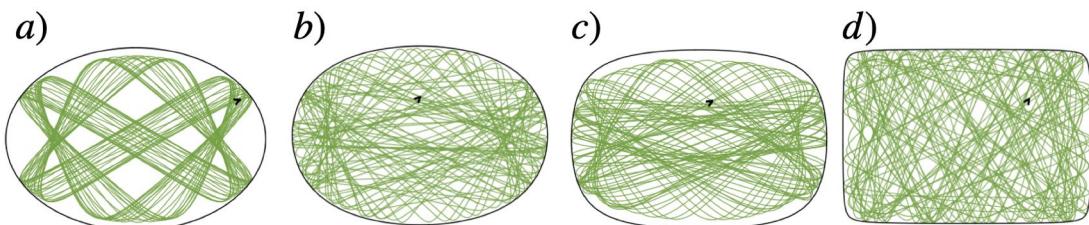


Figura 2: Trayectorias en un billar suave de *squiricle* mostradas en color verde dada una condición inicial (flecha negra) para los parámetros de dureza y *cuadradez*: a)  $h = 2.5$  y  $s = 0$  (billar de elipse),  $h = 8$  y  $s = 0.5$ ,  $h = 2.5$  y  $s = 0.8$ ,  $h = 8$  y  $s = 0.99$ . En negro se muestra la curva de nivel correspondiente a energía cero la cual se corresponde con la frontera en el caso de paredes duras.

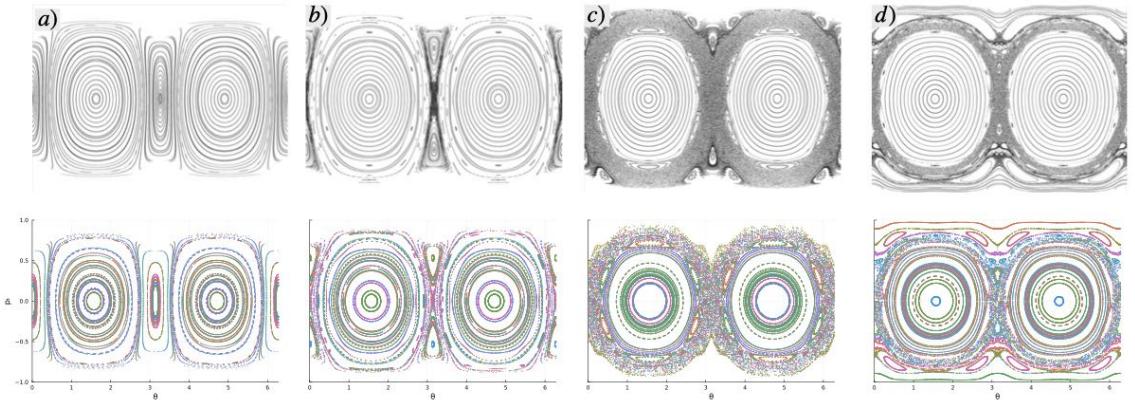


Figura 3: Comparación por columnas entre las secciones de Poincaré de un billar suave de elipse que se encuentra en la literatura [27] (fila superior) y las secciones de Poincaré (fila inferior) para los mismos parámetros pero calculados con las herramientas numéricas desarrolladas en la tesis de maestría. En ambos casos  $E = 0$ ,  $a = 1$  y  $b = \sqrt{1 - 0.72^2}$ , que son el semieje mayor y menor, respectivamente. Mientras que el parámetro de dureza toma los valores: a)  $h = 1$ , b)  $h = 1.7$ , c)  $h = 2.5$  y d)  $h = 6$ .

la figura 2, donde se modulan de diferentes formas la dureza del potencial y la cuadradecz y puede observarse cómo en los casos de dureza más grande, las trayectorias tienden a líneas rectas.

Por otro lado, también se tiene la capacidad de calcular secciones de Poincaré. Esta herramienta parte de la evolución de trayectorias y la identificación de puntos que cruzan la hípersuperficie de energía constante establecida.. En el caso de billares el corte que se hace es sobre el llamado *espacio de colisiones*, tomando en cuenta que para billares suaves los choques ocurren con las equipotenciales del pozo. Cada punto de la sección de Poincaré representa una colisión en  $(\theta, p_{\tan})$  que son el ángulo polar y el momento tangente respecto a la curva equipotencial donde ocurre el choque. Esta herramienta se ha verificado con secciones de Poincaré de billares suaves, presentes en la literatura (ver figura 3).

Además, se tiene la capacidad numérica de calcular el máximo exponente de Lyapunov en billares suaves (ver figura 4). A partir de evolucionar un vector que cuantifica el ritmo de separación de dos condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas. Para evitar desboradamiento numérico, se renormaliza recurrentemente y así permite evoluciones a tiempos muy largos, lo que es necesario para el estudio dinámica clásica de un billar suave.

Se ha implementado una herramienta numérica que da la solución estacionaria para billares cuánticos duros: circunferencia, elipse, *squircle* y estadio de Bunimovich. Este es el caso más sencillo de un billar cuántico. En la figura 5 se muestran algunos valores propios a manera de ilustración de la herramienta numérica desarrollada, la cual consiste en resolver la ecuación de Helmholtz (1.3) con condiciones de contorno utilizando el método de diferencias finitas. Cada geometría requiere de implementar con cuidado las condiciones de contorno tipo Dirichlet, en ese sentido, recae la principal complejidad de este método. También se puede abordar este problema resolviendo analíticamente la ecuación de Helmholtz, sin embargo, se necesitan funciones especiales acordes a la geometría de la

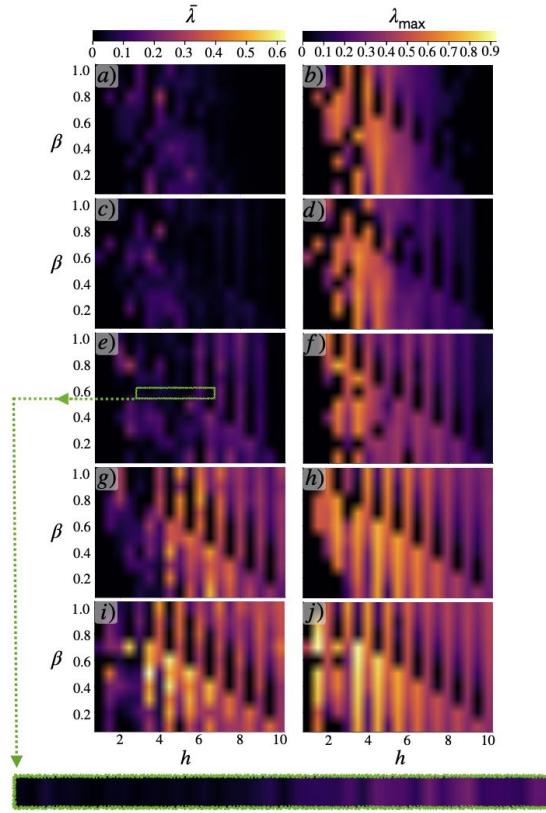


Figura 4: Mapa de caos y regularidad con exponentes de Lyapunov para un billar de *squircle*. En el eje vertical se tiene un parámetro geométrico que estira o contrae la frontera del billar y en el eje horizontal se tiene el parámetro de dureza. Primer columna: cálculo del máximo exponente de Lyapunov promediado sobre diferentes condiciones iniciales aleatorias  $\bar{\lambda}$ . Segunda columna: el valor más grande del máximo exponente de Lyapunov para un conjunto de condiciones iniciales aleatorias  $\lambda_{\max}$ . Se varía el parámetro  $s$  del billar yendo de una elipse hasta casi completamente rectangular: a)-b)  $s = 0.0$ , c)-d)  $s = 0.3$ , e)-f)  $s = 0.5$ , g)-h)  $s = 0.8$ , i)-j)  $s = 0.9$ . Se fija  $E = 0$  en todos los casos. Cada columna maneja una escala de color con diferente valor máximo para observar variaciones muy sutiles que de otra forma serían difíciles de apreciar. Utilizar este tipo de mapas de parámetros permite evidenciar la aparición de caos o regularidad acorde a cómo un parámetro se module. Parte inferior: un mallado más fino para apreciar con mayor precisión las regiones con exponente de Lyapunov cero.

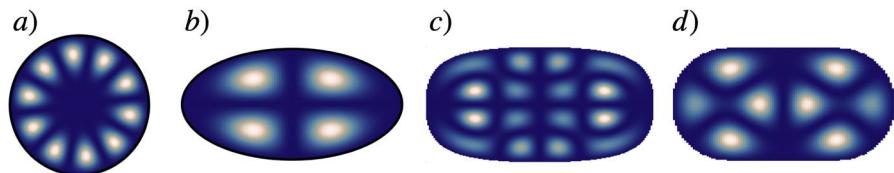


Figura 5: Soluciones estacionarias para el cuadrado de la función de onda  $|\psi_{nm}|^2$  en un billar cuántico para diferentes fronteras: a) circular ( $|\psi_{16}|^2$ ), b) elíptica ( $|\psi_{16}|^2$ ), c) squircle ( $|\psi_{27}|^2$ ) y d) estadio de Bunimovich ( $|\psi_{11}|^2$ ). La escala de color va desde azul (cero probabilidad) hasta blanco (mayor probabilidad).

frontera lo cual no se tiene en todos los casos.

A manera de comprobación de las herramientas a desarrollar en este trabajo, se tomará como referencia el artículo de Perttu Luukko et al. [80] donde caracterizan cicatrizes cuánticas en pozos de potencial bidimensionales suaves con geometría circular. Tener un punto de comparación será de gran ayuda para afrontar los primeros retos de este proyecto.

## Bibliografía

- [1] E. N. Lorenz, *Journal of atmospheric sciences* **20**, 130 (1963).
- [2] É. Ghys, in *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges* (Springer International Publishing, 2015) pp. 19–39.
- [3] A. González Andrade, *Modulación de caos en billares mediante un potencial en la frontera*, Master's thesis, Universidad Autónoma Metropolitana, CDMX, México (2024).
- [4] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Vol. 2 (Gauthier-Villars et fils, imprimeurs-libraires, Paris, 1893).
- [5] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [6] S. Wimberger, *Nonlinear dynamics and quantum chaos*, Vol. 10 (Springer, Suiza, 2014).
- [7] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical mechanics*, 3rd ed. (American Association of Physics Teachers, Boston, 2002).
- [8] E. J. Heller, *Physical Review A* **35**, 1360 (1987).
- [9] D. Auerbach, P. Cvitanović, J.-P. Eckmann, G. Gunaratne, and I. Procaccia, *Physical Review Letters* **58**, 2387 (1987).
- [10] O. Biham and M. Kvale, *Physical Review A* **46**, 6334 (1992).
- [11] R. Badii, E. Brun, M. Finardi, L. Flepp, R. Holzner, J. Parisi, C. Reyl, and J. Simonet, *Reviews of Modern Physics* **66**, 1389 (1994).
- [12] E. N. Lorenz, *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography 57:1* **42**, 378 (1990).
- [13] B. Hamidouche, K. Guesmi, and N. Essounbouli, *Annual Reviews in Control* **58**, 100966 (2024).
- [14] J. P. Crutchfield, *Nature Physics* **8**, 17 (2012).
- [15] L. D'Alessio, Y. Kafri, A. Polkovnikov, and M. Rigol, *Advances in Physics* **65**, 239 (2016).
- [16] H.-J. Stöckmann, *Quantum Chaos: An Introduction* (Cambridge University Press, 1999).
- [17] Č. Lozej, *Transport and Localization in Classical and Quantum Billiards*, Ph.d. thesis, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, Slovenia (2020).

- [18] F. Steiner, Russian Journal of Nonlinear Dynamics **2**, 214 (2006).
- [19] G. Datseris, L. Hupe, and R. Fleischmann, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **29** (2019).
- [20] J. Hadamard, Bulletin de la Société Mathématique de France **26**, 195 (1898).
- [21] C. Dellago, H. A. Posch, and W. G. Hoover, Physical Review E **53**, 1485 (1996).
- [22] N. Chernov and R. Markarian, *Chaotic billiards*, 127 (American Mathematical Soc., USA, 2006).
- [23] H. Poritsky, Annals of Mathematics , 446 (1950).
- [24] Y. G. Sinai, in *Doklady Akademii Nauk*, Vol. 153 (Russian Academy of Sciences, 1963) pp. 1261–1264.
- [25] L. A. Bunimovich, Communications in Mathematical Physics **65**, 295 (1979).
- [26] H. A. d. Oliveira, C. Manchein, and M. Beims, Physical Review E **78**, 046208 (2008).
- [27] T. Kroetz, H. A. Oliveira, J. S. Portela, and R. L. Viana, Physical Review E **94**, 022218 (2016).
- [28] D. Turaev and V. Rom-Kedar, Journal of statistical physics **112**, 765 (2003).
- [29] V. Zharnitsky, Physical review letters **75**, 4393 (1995).
- [30] E. G. Vergini, *Estudio cuántico y semicásico de billares clásicamente caóticos*, Ph.D. thesis, Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (1995).
- [31] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Vol. I*, first english edition ed. (Wiley Interscience, New York, 1966).
- [32] S. R. Jain and R. Samajdar, Rev. Mod. Phys. **89**, 045005 (2017).
- [33] D. de Menezes, M. Jar e Silva, and F. de Aguiar, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **17** (2007).
- [34] S. Rotter, B. Weingartner, N. Rohringer, and J. Burgdörfer, Physical Review B **68**, 165302 (2003).
- [35] B. Weingartner, S. Rotter, and J. Burgdörfer, Physical Review B **72**, 115342 (2005).
- [36] T. Araújo Lima and F. de Aguiar, Physical Review E **91**, 012923 (2015).
- [37] Y. Shimizu and A. Shudo, Chaos, Solitons & Fractals **5**, 1337 (1995).
- [38] J. Wang, G. Benenti, G. Casati, and W.-g. Wang, Physical Review E **103**, L030201 (2021).

[39] A. Kudrolli, S. Sridhar, A. Pandey, and R. Ramaswamy, *Physical Review E* **49**, R11 (1994).

[40] A. Kudrolli, V. Kidambi, and S. Sridhar, *Physical review letters* **75**, 822 (1995).

[41] J. Ravnik, Y. Vaskivskyi, J. Vodeb, P. Aupič, I. Vaskivskyi, D. Golež, Y. Gerasimenko, V. Kabanov, and D. Mihailovic, *Nature Communications* **12**, 3793 (2021).

[42] A. Kaplan, N. Friedman, M. Andersen, and N. Davidson, *Physical review letters* **87**, 274101 (2001).

[43] A. Kaplan, N. Friedman, M. Andersen, and N. Davidson, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **187**, 136 (2004).

[44] T. Gao, E. Estrecho, K. Bliokh, T. Liew, M. Fraser, S. Brodbeck, M. Kamp, C. Schneider, S. Höfling, Y. Yamamoto, *et al.*, *Nature* **526**, 554 (2015).

[45] M. V. Berry, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **10**, 2083 (1977).

[46] S. McDonald and A. Kaufman, *Physical Review Letters* **42**, 1189 (1979).

[47] E. J. Heller, *Physical Review Letters* **53**, 1515 (1984).

[48] M.-J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin, eds., *Chaos and Quantum Physics*, Les Houches Session LII (North-Holland, 1989).

[49] M. V. Berry, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **423**, 219 (1989).

[50] S. Pilatowsky-Cameo, D. Villaseñor, M. A. Bastarrachea-Magnani, S. Lerma-Hernández, L. F. Santos, and J. G. Hirsch, *Nature communications* **12**, 852 (2021).

[51] Z. Ge, A. M. Graf, J. Keski-Rahkonen, S. Slizovskiy, P. Polizogopoulos, T. Taniguchi, K. Watanabe, R. Van Haren, D. Lederman, V. I. Fal'ko, *et al.*, *Nature* **635**, 841 (2024).

[52] C. C. King, *Quanta* **3** (2014).

[53] L. Kaplan and E. Heller, *Physical Review E* **62**, 409 (2000).

[54] Č. Lozej, G. Casati, and T. Prosen, *Physical Review Research* **4**, 013138 (2022).

[55] R. P. Salazar, G. Téllez, D. F. Jaramillo, and D. L. González, *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* **39**, 152 (2015).

[56] W. Li, L. Reichl, and B. Wu, *Physical Review E* **65**, 056220 (2002).

[57] M. Rigol, V. Dunjko, and M. Olshanii, *Nature* **452**, 854 (2008).

[58] H. Bernien, S. Schwartz, A. Keesling, H. Levine, A. Omran, H. Pichler, S. Choi, A. Zibrov, M. Endres, M. Greiner, *et al.*, *Nature* **551**, 579 (2017).

[59] C. Turner, A. Michailidis, D. Abanin, M. Serbyn, and Z. Papić, *Nature Physics* **14**, 745 (2018).

[60] M. Serbyn, D. A. Abanin, and Z. Papić, *Nature Physics* **17**, 675 (2021).

[61] V. Khemani, M. Hermele, and R. Nandkishore, *Phys. Rev. B* **101**, 174204 (2020).

[62] J. Keski-Rahkonen, A. M. Graf, and E. J. Heller, Antiscarring in chaotic quantum wells (2024), arXiv:2403.18081.

[63] D. W. Zingg and T. T. Chisholm, *Applied Numerical Mathematics* **31**, 227 (1999).

[64] G. Akemann, M. Kieburg, A. Mielke, and T. c. v. Prosen, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 254101 (2019).

[65] Y. Atas, E. Bogomolny, O. Giraud, and G. Roux, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 084101 (2013).

[66] F. Haake, *Quantum signatures of chaos*, 3rd ed. (Springer Berlin, Heidelberg, Germany, 2012).

[67] M. Tabor, WileyInterscience (1989).

[68] H. Löffelmann, T. Kučera, and E. Gröller, Visualizing poincaré maps together with the underlying flow, in *Mathematical Visualization: Algorithms, Applications and Numerics* (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1998) pp. 315–328.

[69] G. Benettin, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **13**, 211 (1984).

[70] P. Garrido, *Journal of statistical physics* **88**, 807 (1997).

[71] A. Pikovsky and A. Politi, *Lyapunov exponents: a tool to explore complex dynamics* (Cambridge University Press, 2016).

[72] C. Dellago, L. Glatz, and H. Posch, *Physical Review E* **52**, 4817 (1995).

[73] G. Datseris and U. Parlitz, *Nonlinear dynamics: a concise introduction interlaced with code* (Springer Nature, 2022).

[74] M. Custódio, C. Manchein, and M. W. Beims, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **22**, 026113 (2012).

[75] T. Papenbrock, *Physical Review E* **61**, 1337 (2000).

[76] M. Sieber and F. Steiner, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **44**, 248 (1990).

[77] P. A. Braun, S. Heusler, S. Müller, and F. Haake, *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* **30**, 189 (2002).

[78] S. Pilatowsky-Cameo, D. Villasenor, M. A. Bastarrachea-Magnani, S. Lerma-Hernández, L. F. Santos, and J. G. Hirsch, *Quantum* **6**, 644 (2022).

[79] M. F. Guasti, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* **23**, 895 (1992).

[80] P. J. Luukko, B. Drury, A. Klales, L. Kaplan, E. J. Heller, and E. Räsänen, *Scientific reports* **6**, 37656 (2016).

## Calendario de actividades

ACTIVIDADES	24 O	25 I	25 P	25 O	26 I	26 P	26 O	27 I	27 P	27 O	28 I
Investigación documental.											
Identificación del problema dinámico, tanto clásico como cuántico.											
Ánalysis espectral de billares cuánticos duros.											
Métodos para cuantizar un billar suave.											
Cursar UEAs <i>Trabajo de Investigación</i>											
Estudiar cuantificadores de cicatrización en los billares duros y suaves.											
Estudiar cuantificadores de cicatrización de muchos cuerpos.											
Estudio sobre el principio de correspondencia clásico-cuántico mediante los billares desarrollados.											
Inspección de la viabilidad de contrastar los resultados obtenidos con realizaciones experimentales existentes.											
Escritura de un artículo de investigación.											
Escritura de la tesis.											
Disertación											

Tabla 1: Cronograma de actividades de investigación