



**NOTAS DE APOYO A LA
INVESTIGACIÓN EN LA FUNCIÓN DE
WIGNER Y EL ESPACIO FASE
CUÁNTICO**

Autor:

Aland Rodríguez Martín del Campo

Co-asesor :

Dr. Bastarrachea Magnani Miguel Angel

Co-asesor :

Dr. Ernesto Benítez Rodríguez

Servicio Social

2 de septiembre de 2024 al 1º de marzo de 2025

**Departamento de Física
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa**

Índice

1. Introducción.	4
2. Distribución de Wigner.	5
2.1. Operador de Wigner y el operador de paridad desplazada	7
3. Propiedades de la función de Wigner	8
3.1. Hermiticidad y realidad	8
3.2. Proyección sobre q y p	9
3.3. Normalización	9
3.4. Invarianzas	10
3.5. Ecuación de movimiento clásica	10
3.6. No positividad (cuasiprobabilidad)	11
3.7. Simetría bajo intercambios $q \rightleftharpoons p$	12
4. Estados cuánticos relevantes	13
4.1. Estados de Fock	13
4.2. Estados Coherentes	18
4.2.1. Construcción de los estados coherentes	19
4.2.2. Valor esperado del campo electromagnético	22
4.2.3. Operadores de cuadratura	24
4.2.4. Distinción entre estados coherentes e incoherentes	25
4.3. Estados Comprimidos	26
4.4. Estados de gato de Schrödinger	29
5. Función característica y ordenamiento de operadores	31
5.1. Función característica de Moyal	31
5.2. Ordenamiento de operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger	33
5.3. Función característica de distintos ordenamientos	34
5.3.1. Ordenamiento normal (Glauber-Sudarshan)	34
5.3.2. Ordenamiento antinormal (Husimi)	36
5.3.3. Ordenamiento simétrico (Weyl)	36
5.4. Dinámica y dependencia temporal	38
5.4.1. Ejemplo: Oscilador Armónico	38
6. Conexión entre la mecánica cuántica y clásica	40
6.1. El Límite Cuántico-Clásico	41
7. Conclusiones	42

Apéndices	44
A. Relación entre $\hat{W}(q, p)$ y $\hat{\Pi}_{q,p}$	44
B. Operadores de Bopp	44
C. Convenciones para $W(q, p)$	45
D. Relación entre las funciones características $C(\sigma, \tau)$ y $\chi(\eta)$.	46
E. Cálculo de las funciones de Wigner para distintos estados	47
E.1. Estados de Fock	47
E.1.1. Usando la función de onda	47
E.1.2. Usando el operador de desplazamiento $\hat{D}(\eta)$	51
E.2. Estados Coherentes	55
E.2.1. Usando la función $\chi(\eta)$	55
E.2.2. Usando la función de onda	56
E.3. Estados Comprimidos	57
E.4. Estados de Gato de Schrödinger	59
F. Evolución temporal	63
G. Códigos para las gráficas	67

1. Introducción.

La física es la rama de la ciencia que se dedica a estudiar los fenómenos que ocurren en la naturaleza, desde el movimiento de los planetas hasta las interacciones de las partículas más diminutas. Tradicionalmente, la mecánica clásica ha sido la herramienta principal para describir el comportamiento de los objetos en el mundo macroscópico (objetos grandes que podemos ver y tocar), utilizando conceptos como la posición, la velocidad y la energía para predecir su evolución con total precisión.

Sin embargo, a principios del siglo XX, los científicos se encontraron con que estas leyes no eran suficientes para explicar el comportamiento de la materia a escalas microscópicas, como el de los átomos y las partículas subatómicas. Fue entonces que surgió la mecánica cuántica, una nueva teoría que revolucionó nuestra comprensión del universo planteando preguntas y respuestas nuevas e innovadoras.

Una de las diferencias fundamentales entre ambas teorías es la forma en que describen el estado de un sistema. En la mecánica clásica, el estado de un sistema se representa en un espacio fase, donde cada punto (\mathbf{q}, \mathbf{p}) representa una configuración posible, definida por el vector de coordenadas generalizadas (\mathbf{q}) y el vector de momentos conjugados (\mathbf{p}) de todos los grados de libertad del sistema. Conocer estos dos valores de manera precisa en un instante dado nos permite predecir el futuro del sistema con total exactitud. Sin embargo, aunque esta descripción es general, por simplicidad, en el desarrollo de este trabajo nos restringiremos a sistemas de un solo grado de libertad. Por lo que, se usará la notación escalar (q, p) para hacer referencia a las coordenadas del espacio fase.

A diferencia de la mecánica clásica, la mecánica cuántica no permite conocer simultáneamente la posición y el momento lineal de una partícula con total precisión. Esto se debe al principio de incertidumbre de Heisenberg, que establece que cuanto más precisamente se conoce una de estas propiedades, menos se conoce la otra. Debido a esta limitación, en la mecánica cuántica el estado de un sistema no se puede describir con un punto en el espacio fase. En su lugar, se utiliza una función de onda, que puede ser dependiente de la posición ($\psi(q)$) o del momento ($\phi(p)$), pero no de ambas al mismo tiempo.

Por esta limitación impuesta por el principio de incertidumbre de Heisenberg, no es posible definir una distribución de probabilidad en el espacio fase cuántico de la misma manera que en la mecánica clásica. Esto se debe a que no existe un punto exacto que represente la posición y el momento simultáneamente, como sí ocurre en la mecánica clásica. Lo que es posible es que un punto en este espacio represente el valor

esperado de un operador en ese espacio.

Por otra parte, en la formulación estándar de la mecánica cuántica, la densidad de probabilidad en el espacio de posiciones, $\rho(q)$, es dada por $\rho(q) = |\psi(q)|^2$, mientras que, en el espacio de momentos, $\rho(p) = |\phi(p)|^2$. Sin embargo, existe un tipo de funciones, llamadas *funciones de cuasi-probabilidad* que pueden expresarse en términos de ambas variables, $P(q, p)$, y tienen cierta semejanza con las funciones de distribución en el espacio fase ya que permiten expresar promedios cuánticos matemáticamente parecidos a los clásicos, de modo que pueda facilitarse el abordar este problema.

Cabe mencionar que dichas funciones no son propiamente una distribución de probabilidades como tal, ya que pueden tomar valores negativos. No obstante, resultan ser una herramienta matemática muy poderosa y útil para el estudio de sistemas cuánticos, ya que permite calcular promedios y analizar el comportamiento de sistemas de este tipo en términos de las variables canónicas de posición q y momento p , además de brindar información acerca de las posibles conexiones entre la mecánica clásica y cuántica.

Algunas de estas funciones de cuasi-probabilidad son atribuidas a Kodi Husimi (1909–2008), Roy J. Glauber (1925–2018) y Eugene Wigner (1902–1995), siendo este último quien propuso la *función de Wigner*, la cual se tratará con mayor detalle en este trabajo, sin embargo, el motivo para usar una u otra función es mera conveniencia.

2. Distribución de Wigner.

Esta distribución (también llamada *función de Wigner*) es, en realidad, una representación de un sistema cuántico en términos de una función en el espacio fase. Esto es útil para visualizar el comportamiento de los estados cuánticos de manera semejante a como se hace en la mecánica clásica.

En general, para un sistema en un estado mixto representado por una matriz de densidad $\rho(q'', q')$ (y por ende, un operador $\hat{\rho}$ asociado, conocido como *operador de densidad*), la función de Wigner está definida como [1, 2]:

$$W(q, p) = \int \left\langle q + \frac{1}{2}y \left| \frac{\hat{\rho}}{2\pi\hbar} \right| q - \frac{1}{2}y \right\rangle e^{-ipy/\hbar} dy. \quad (1)$$

Aquí, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ es la constante de Planck reducida. Es notable que esta ecuación es la transformada de Fourier de $\hat{\rho}$ con respecto a la posición. Cabe mencionar que, según la normalización empleada, la expresión para $W(q, p)$ podría tomar una forma ligeramente distinta, sin embargo, la elección de una u otra normalización depende de la convención de unidades empleada (por ejemplo, el uso de unidades atómicas donde $\hbar = 1$) o para simplificar el cálculo de las distribuciones marginales de probabilidad.

Puede interpretarse la Ec. (1) al asociarse con la descripción del movimiento de una partícula de una posición hacia otra ($q' \rightarrow q''$). Así, de manera análoga a la transición de un átomo en el nivel n' hacia el n'' , en el que realmente no importa cómo es el movimiento en dichos niveles sino el salto que se da entre ellos, este cambio de posición estaría definido por una distancia relativa $y \equiv q'' - q'$. De este modo, el elemento de matriz $\langle q'' | \hat{\rho} | q' \rangle$ representa la relación espacial entre dichos puntos [2], siendo $y = (q' + q'')/2$ el centro del salto, lo cual incita a pensar en las coordenadas q' y q'' como [2]:

$$q' = q - \frac{1}{2}y, \quad q'' = q + \frac{1}{2}y.$$

Dicho esto, queda una mejor comprensión de la definición de la función de Wigner, Ec. (1), que se puede entender como una representación del estado de un sistema cuántico en el espacio fase.

Si ahora se considera un estado puro, es decir, un sistema caracterizado completamente por un único vector de estado, con función de onda dependiente de la posición $\psi(q)$, con un operador de densidad asociado $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, esta ecuación se simplifica a:

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \psi^* \left(q + \frac{1}{2}y \right) \psi \left(q - \frac{1}{2}y \right) e^{-ipy/\hbar} dy. \quad (2)$$

Por supuesto, la función de Wigner, Ec. (1), puede generalizarse a n dimensiones [3, 4], extensión necesaria para describir sistemas con múltiples grados de libertad, como el movimiento en el espacio tridimensional. A lo largo del texto, las integrales se harán sobre todo el espacio y, a menos que se indique lo contrario, se trabajará con estados puros.

2.1. Operador de Wigner y el operador de paridad desplazada

Además de su definición integral, la función de Wigner $W(q, p)$ se puede expresar de una forma alternativa a través del operador de Wigner, $\hat{W}(q, p)$. Este operador, también conocido como el *operador de paridad desplazada* [1], es una herramienta útil en el cálculo y la interpretación de la función de Wigner.

La razón de este nombre reside en la forma en que el operador está construido. Se puede entender como una combinación del operador de desplazamiento y el operador de paridad.

El operador de paridad $\hat{\Pi}$ es un operador que invierte la posición y el momento de un sistema, reflejando el estado a través del origen, como si fuera un espejo. Se define de la siguiente manera:

$$\hat{\Pi} = \int dq | -q \rangle \langle q | = \int dp | p \rangle \langle -p | = \frac{1}{2\hbar} \int dk \int e^{\frac{i}{\hbar}(k\hat{q} + s\hat{p})} ds. \quad (3)$$

Por otro lado, el *operador de desplazamiento*, $\hat{D}(q, p) = e^{\frac{i}{\hbar}(p\hat{q} - q\hat{p})}$, tiene la función de desplazar el sistema hacia el punto (q, p) del espacio fase.

Combinando ambos operadores, es posible definir el operador de paridad desplazada, $\hat{\Pi}_{q,p}$, que no es más que el operador $\hat{\Pi}$ después de haber sido desplazado por $\hat{D}(q, p)$ hacia el punto (q, p) [5, 6], esto es:

$$\hat{\Pi}_{q,p} = \hat{D}(q, p) \hat{\Pi} \hat{D}^\dagger(q, p). \quad (4)$$

Debe hacerse mención de la estrecha relación del operador de Wigner con esta paridad. Puede mostrarse que \hat{W} es proporcional a $\hat{\Pi}_{q,p}$ (véase el Apéndice A). Si se expresa este operador en la base de posiciones, se obtiene la forma integral [1]:

$$\hat{W}(q, p) \equiv \int \left| q - \frac{1}{2}s \right\rangle e^{-iqp/\hbar} \left\langle q + \frac{1}{2}s \right| ds. \quad (5)$$

A pesar de tener una definición diferente, el efecto físico de ambos operadores es el mismo: la acción de reflexión alrededor de un punto (q, p) en el espacio fase cuántico. Por parte del operador de Wigner, esto se ilustra mediante [1]:

$$\hat{W}(q, p) |q'\rangle = |2q - q'\rangle, \quad \hat{W}(q, p) |p'\rangle = |2p - p'\rangle. \quad (6)$$

Estas relaciones muestran que el operador de Wigner toma un estado con posición q' y lo transforma en un estado con posición $2q - q'$, lo cual es precisamente la definición de una reflexión alrededor del punto q . Lo mismo ocurre con el momento.

La función de Wigner de un estado cuántico, representado por el operador de densidad $\hat{\rho}$ se calcula usando el operador de Wigner a través de la relación [1]:

$$W(q, p) = \text{Tr} \left[\frac{\hat{\rho}}{2\pi\hbar} \hat{W}(q, p) \right]. \quad (7)$$

Para un estado puro $|\psi\rangle$, donde $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, la expresión anterior se puede reescribir de forma equivalente usando el operador de paridad desplazada $\hat{\Pi}_{q,p}$ [5, 6]:

$$W(q, p) = \frac{2}{\hbar} \langle \psi | \hat{\Pi}_{q,p} | \psi \rangle = \frac{2}{\hbar} \langle \psi | \hat{D}(q, p) \hat{\Pi} \hat{D}^\dagger(q, p) | \psi \rangle. \quad (8)$$

La conexión entre estas dos expresiones se debe a la relación de proporcionalidad entre los operadores, $\hat{W}(q, p) = 4\pi\hat{\Pi}_{q,p}$. Esta relación se discute con mayor detalle en el Apéndice A.

La relación entre la función de Wigner en términos de $\hat{\Pi}_{q,p}$ tiene una interpretación física: La función de Wigner en el punto (q, p) mide la superposición entre el estado ψ con su reflejo en el espacio fase [5]. Esto se debe a que, primero, $\hat{\Pi}_{q,p}$ refleja el estado $|\psi\rangle$ y posteriormente, cuando ya se tiene este estado reflejado, se realiza el producto interno entre el estado reflejado y el original.

3. Propiedades de la función de Wigner

Tras haber dado la definición de la función de Wigner y los conceptos fundamentales de su construcción, es útil ahora analizar sus propiedades matemáticas fundamentales, las cuales la distinguen de otras distribuciones y, además, proporcionan una visión más profunda sobre su comportamiento en sistemas cuánticos.

3.1. Hermiticidad y realidad

La función de Wigner es una función real, es decir, $W(q, p) = W^*(q, p)$ [3], de modo que para un estado puro, debe ser una forma hermítica del estado $|\psi(q)\rangle$.

A pesar de que los estados cuánticos y los operadores son complejos, esta función siempre es real debido a que su definición es dada mediante una integral que involucra el producto de la función de onda con su complejo conjugado. Esto implica que su interpretación podría ser la de una densidad, aunque no necesariamente en el sentido clásico, ya que, no debe olvidarse que $W(q, p)$ puede adquirir valores negativos.

3.2. Proyección sobre q y p

Una propiedad que apoya la interpretación de la función de Wigner como un análogo de la densidad de probabilidad en el espacio fase es que sus proyecciones sobre los ejes de posición (q) o de momento (p) recuperan las distribuciones de probabilidad marginales.

Integrar esta función sobre cada valor posible de p resulta en la densidad de probabilidad de hallar la partícula en la posición q :

$$\int W(q, p) dp = |\psi(q)|^2 = \langle q | \hat{\rho} | q \rangle \equiv W(q). \quad (9)$$

Análogamente, la *densidad de probabilidad del momento* $|\psi(p)|^2$ se obtiene si se integra sobre cada valor posible de la posición q [2].

Esto quiere decir que la proyección de $W(q, p)$ sobre alguno de los ejes, q o p , da la distribución de probabilidad en esa variable. Estos valores coinciden con las predicciones estándar de la mecánica cuántica, es decir, las densidades $|\psi(q)|^2$ y $|\phi(p)|^2$ [4].

3.3. Normalización

Para que la función de Wigner pueda tomar un sentido “probabilístico”, también debe cumplirse la normalización de esta quasi-probabilidad [3, 4], es decir:

$$\int dq \int W(q, p) dp = \text{Tr}[\hat{\rho}] = 1. \quad (10)$$

Junto con el resultado de la Ec. (10), se tiene que $\text{Tr}[\hat{\rho}^2] \leq 1$, cumpliéndose la igualdad únicamente en el caso de estados puros (los cuales serán objeto de estudio en este trabajo), entonces, para estos estados: $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ [4].

3.4. Invarianzas

La función de Wigner, también cumple con ciertas características, como la *invarianza Galileana*, es decir, si la función de onda del sistema se desplaza espacialmente o es multiplicada por una fase, $W(q, p)$ se transforma de manera correspondiente [3].

Además, también goza de invarianza frente a reflexiones espaciales y temporales, de modo que si se invierten las coordenadas espaciales, o se toma el complejo conjugado de la función de onda, la función de Wigner también se transforma de manera semejante [4]. Formalmente, esto se puede ver en la Tabla 1:

Transformación en $\psi(q)$	Transformación en $W(q, p)$
$\psi(q) \rightarrow \psi(q + a)$	$W(q, p) \rightarrow W(q + a, p)$
$\psi(q) \rightarrow e^{ip'q/\hbar}\psi(q)$	$W(q, p) \rightarrow W(q, p - p')$
$\psi(q) \rightarrow \psi(-q)$	$W(q, p) \rightarrow W(-q, -p)$
$\psi(q) \rightarrow \psi^*(q)$	$W(q, p) \rightarrow W(q, -p)$

Tabla 1: La función de Wigner es una invariante de Galileo, lo que implica que obedece estas reglas de transformación.

3.5. Ecuación de movimiento clásica

Una propiedad importante de la función de Wigner es su capacidad para describir la evolución temporal de un sistema cuántico en el espacio fase. Para sistemas cuánticos que tienen un potencial no mayor a un polinomio de segundo orden, como el oscilador armónico cuántico o una partícula bajo la acción de una fuerza constante, la evolución temporal de la función de Wigner, $W(q, p, t)$, coincide con la ecuación de Liouville clásica, fundamental en mecánica estadística, la cual describe la conservación de la densidad de probabilidad a lo largo de las trayectorias del sistema en el espacio fase [4]:

$$\frac{\partial W(q, p)}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial W(q, p)}{\partial q} + \frac{\partial U(q)}{\partial q} \frac{\partial W(q, p)}{\partial p}. \quad (11)$$

En esta ecuación, la derivada temporal $\frac{\partial W(q, p)}{\partial t}$, representa la evolución de la función de Wigner en el tiempo. Aunque hasta ahora se ha

considerado la función de Wigner independiente de t , debe reconocerse que en general, el estado cuántico de un sistema puede cambiar, y por lo tanto, la función de Wigner también puede depender explícitamente del tiempo.

Particularmente, para una partícula libre, se tiene para el potencial $U(q) = 0$. En este caso, la ecuación de Liouville se simplifica a la ecuación de movimiento clásica para la función de Wigner [3]:

$$\frac{\partial W(q, p)}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial W(q, p)}{\partial q} = 0. \quad (12)$$

Aunque, en general, no se tratará con la función de Wigner dependiente del tiempo, más que de una manera superficial y en secciones específicas, hacer mención de su existencia es importante.

3.6. No positividad (cuasiprobabilidad)

La función de Wigner presenta valores negativos en ciertos casos [3, 4, 7–9], característica que la define formalmente como una distribución cuasi-probabilística [4, 8]. Este comportamiento se manifiesta claramente al analizar una propiedad fundamental: la traza del producto de dos operadores de densidad (que representan los estados del sistema).

Esta propiedad consiste en que, en particular, para dos estados puros ortogonales $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$, con operadores asociados $\hat{\rho}_{\psi_1}$ y $\hat{\rho}_{\psi_2}$, la traza es determinada por el producto de sus respectivas funciones de Wigner integrado sobre el espacio fase [2, 3]:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_{\psi_1} \hat{\rho}_{\psi_2}) = |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 = 2\pi\hbar \int dq \int W_{\psi_1}(q, p) W_{\psi_2}(q, p) dp. \quad (13)$$

Aquí, las distribuciones $W(q, p)$ son definidas como en la Ec. (1). La no-positividad de la función de Wigner puede hacerse notar al observar, debido a que los estados cuánticos deben cumplir la normalización a la unidad, es decir, $|\langle \psi | \psi \rangle|^2 = 1$, entonces:

$$\int dq \int W_{\psi_1}(q, p) W_{\psi_2}(q, p) dp = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\hbar}, & \text{si } \psi_1 = \psi_2 \\ 0, & \text{si } \psi_1 \neq \psi_2 \end{cases}. \quad (14)$$

Es prudente hacer énfasis en el significado de estos resultados: El primero implica que la concentración de esta probabilidad no puede ser

arbitraria, ya que tiene un valor finito. Esto es debido al principio de incertidumbre de Heisenberg, $\Delta q \Delta p \geq \hbar/2$; conocer simultáneamente, con exactitud, los valores de q y p implicaría una violación a este principio, pues se tendría $\Delta q \Delta p = 0$, además, la función de Wigner obtendría un valor mayor que $\frac{1}{2\pi\hbar}$, en particular, $W_\psi(q, p) = \delta(q - q_0)\delta(p - p_0)$, lo cual representa el conocimiento simultáneo, con exactitud, de los valores de q y p (un punto clásico) [3].

Por su parte, el resultado nulo, implica que $W(q, p)$ no puede ser positiva en todo punto del espacio fase, ya que, de no ser así, la función no podría anularse a menos que $\psi_1 = 0$ o $\psi_2 = 0$, de modo que solamente una combinación de valores positivos y negativos de la distribución de Wigner podría anular la Ec. (13) [3]. Esto refleja la naturaleza no clásica de esta distribución. No obstante, esto no implica que no existan funciones de Wigner que puedan ser positivas en cualquier lugar del espacio fase, por mencionar sólo un ejemplo, los estados coherentes, los cuales se tratarán con mayor detalle posteriormente.

El lector podría cuestionarse acerca del significado de las regiones en que $W(q, p) < 0$ o el motivo de que esto sea así. Estas son debidas a la superposición de estados y la naturaleza no clásica de los estados cuánticos, a través de reflejar la interferencia destructiva entre los componentes de la función de onda [7, 8, 10]. Esta propiedad permite pensar una superposición de estados cuánticos como una superposición en el espacio de fases [8].

3.7. Simetría bajo intercambios $q \rightleftarrows p$

Aunque la función de Wigner $W(q, p)$, Ec. (1), comúnmente se expresa partiendo de la representación de posición, es decir, utilizando eigenestados de posición, la formulación de la mecánica cuántica en el espacio fase, que busca un tratamiento más equiparable (o simétrico) para las variables de posición y momento, permite que esta función también pueda ser obtenida o expresada de manera equivalente utilizando eigenestados de momento.

La función de Wigner se puede expresar en términos de la transformada de Fourier de la función de onda, permitiendo así, intercambiar entre representaciones, ya sea en términos de $\psi(q)$ o $\phi(p)$ y sus respectivos conjugados [3]. De esta manera, la Ec. (2) puede expresarse en términos del momento como:

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \phi^* \left(p + \frac{1}{2}p' \right) \phi \left(p - \frac{1}{2}p' \right) e^{-iqp'/\hbar} dp'. \quad (15)$$

4. Estados cuánticos relevantes

Debido a que la función de Wigner, $W(q, p)$, permite representar estados cuánticos en el espacio fase de posiciones y momentos, es una herramienta muy útil para visualizar y comprender las propiedades de distintos estados. Algunos de los más relevantes, relacionados con la función de Wigner, son los estados de Fock, los cuales son elementos clave para la teoría cuántica de campos [8] y sirven como un pilar en la construcción de algunos otros, como los estados coherentes y los estados comprimidos, como se verá a continuación.

El análisis de la función de Wigner para cada uno de estos estados revela características distintivas en el espacio fase, mostrando cómo la representación visual puede ayudar a comprender sus propiedades fundamentales, su grado de no-clasicidad y la presencia de fenómenos cuánticos.

4.1. Estados de Fock

Un estado de Fock $|n\rangle$ (también conocido como *estado de número*), es un estado físico con una cantidad bien definida (n) de fotones (o, en general, bosones), en el que las amplitudes de los campos electromagnéticos no están bien definidas debido la no conmutación entre los operadores de creación (\hat{a}^\dagger) y aniquilación (\hat{a}) con el operador de número ($\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$) [7–9]. Esto es así ya que, si bien existe un número n de fotones en el sistema, la aplicación de alguno de estos dos operadores cambiará esta cantidad sucesivamente con cada aplicación.

Para un oscilador de masa unitaria y frecuencia angular ω , estos operadores de creación y aniquilación se definen como:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} + i\hat{p}), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} - i\hat{p}). \quad (16)$$

En donde \hbar es la constante de Planck reducida, la cual, aunque se mostrará explícitamente en las ecuaciones siguientes, para la ejecución de los códigos que se utilicen, se hará $\hbar = 1$. Además, estos operadores son no conmutativos entre sí, cumpliendo con la relación:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (17)$$

La acción que tienen los operadores de creación y aniquilación sobre los estados de Fock es [8, 9]:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (18)$$

Por supuesto, los operadores de posición (\hat{q}) y momento (\hat{p}) (también conocidos como *operadores de cuadratura*) pueden escribirse en términos de los de creación y aniquilación, a saber:

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad \hat{p} = i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (19)$$

El estado de vacío, $|0\rangle$, resulta de suma importancia, pues los estados de Fock pueden generarse a partir de este estado base mediante aplicaciones sucesivas del operador de creación [8, 10]:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (20)$$

La representación de los estados de Fock, en el espacio de posiciones, es dada por la función de onda [10, 11]:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} H_n \left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{\omega x^2}{2\hbar}}. \quad (21)$$

En donde $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite, los cuales describen las oscilaciones características de los estados de número, (Fig. 1) (notar que en esta figura se ha tomado $\omega = 1$, la cual, en general se tomará con ese valor a menos que se indique lo contrario), por otra parte, la Fig. 2 muestra la densidad de probabilidad $|\psi_n(q)|^2$ para algunos valores de n .

En general, la Ec. (21) describe la distribución espacial de estos estados. Estos son fundamentales para la construcción de otros estados, como los coherentes, que pueden interpretarse como una superposición ponderada de $|n\rangle$.

Los estados de Fock forman una base completa del espacio de Hilbert asociado a un oscilador armónico cuántico. El espacio de Fock proporciona una base ortonormal fundamental ($\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$) [7], así, en un sentido físico, la descripción cuántica de un campo electromagnético puede representarse mediante la expansión del operador de densidad en la base de estados de Fock, la cual incluye términos diagonales y no diagonales [7].

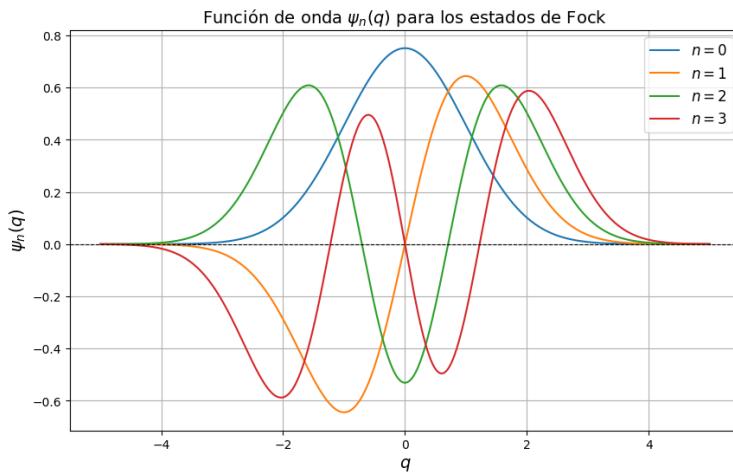


Figura 1: Función de onda para los cuatro primeros estados de Fock. Se ha tomado $\omega = \hbar = 1$.

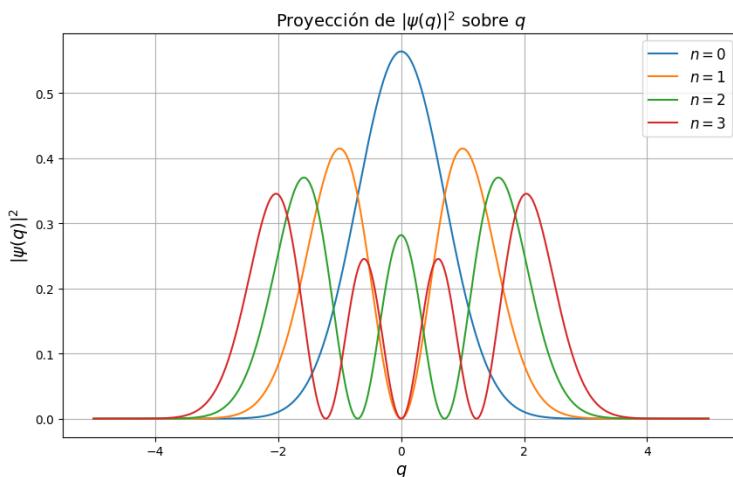


Figura 2: Densidad de probabilidad de la función de onda para los primeros cuatro estados de Fock. Se ha tomado $\omega = \hbar = 1$.

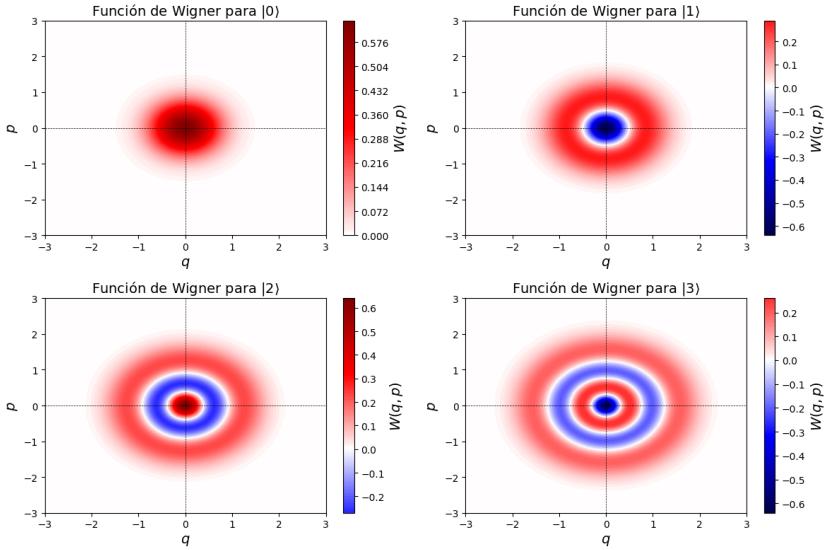


Figura 3: Función de Wigner para los primeros cuatro estados de Fock en el espacio fase. Notar que la primera (correspondiente al estado de vacío) es completamente positiva. Por otra parte, para todas las siguientes se observan patrones anulares debidos a regiones positivas y negativas equidistantes del origen. Conforme n incrementa, estos “anillos” también incrementan en cantidad, pero no en magnitud.

La función de Wigner asociada a los estados de Fock es tal que [8]:

$$W_n(\alpha) = \frac{2}{\pi} (-1)^n L_n(4|\alpha|^2) e^{-2|\alpha|^2}. \quad (22)$$

El hecho de que en esta ecuación aparezcan polinomios de Laguerre, $L_n(\xi)$ ¹, es lo que explica las fluctuaciones cuánticas de este tipo de estados, de manera que existen ciertas regiones en las que W adquiere valores negativos [8]. La Ec. (22) se puede visualizar gráficamente en las Fig. 3 y 4.

¹Los polinomios de Laguerre se definen mediante la fórmula de Rodrigues como: $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$.

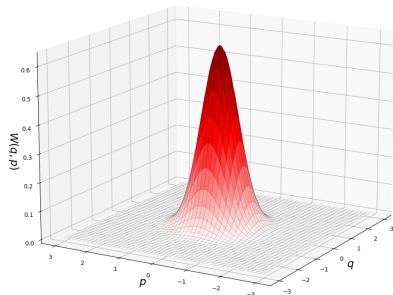
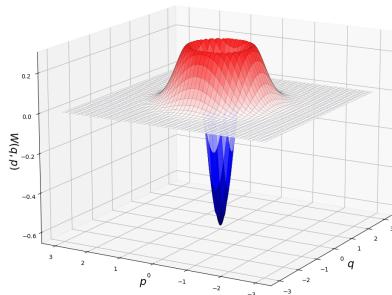
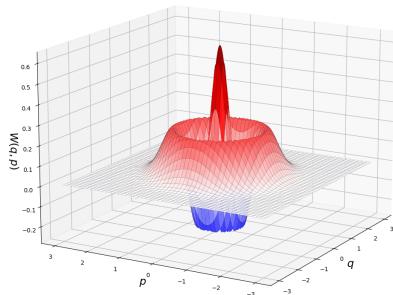
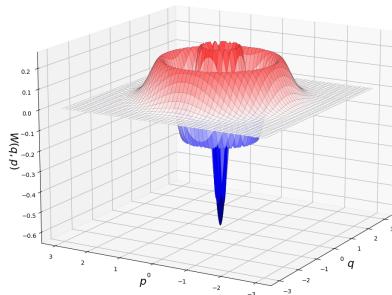
Función de Wigner para $|0\rangle$ Función de Wigner para $|1\rangle$ Función de Wigner para $|2\rangle$ Función de Wigner para $|3\rangle$ 

Figura 4: Función de Wigner para los cuatro primeros estados de Fock. En esta visión tridimensional puede verse de forma más clara que el patrón anular de la figura 2D corresponde a regiones positivas y negativas de la función de Wigner.

Particularmente, para el estado $|0\rangle$, la función de Wigner asociada es dada por:

$$W_0(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2}. \quad (23)$$

Es posible notar que esta última ecuación representa una función Gaussiana² (una función con la característica forma de campana simétrica y decaimiento exponencial rápido), la cual coincide con lo que se observa en las Fig. 3 y 4. Los campos fluctuantes en sistemas cuánticos mantienen una relación íntima con los estados de número.

Para el caso del campo electromagnético, es útil definir un *operador de campo genérico* $\hat{G} = \hat{g}\hat{a} + g^*\hat{a}^\dagger$ (donde g es una función dependiente de la posición). Si se considera \hat{G} como una componente de cualquiera de los campos (cuantizados) \hat{E} , \hat{B} o \hat{A} , se tendrá que [7, 8]:

$$\langle n|\hat{G}|n\rangle = 0. \quad (24)$$

Lo que implicaría que los campos \hat{E} y \hat{B} tienen un valor promedio nulo en un estado de número, sin embargo, presentan fluctuaciones significativas [2, 7]. Dichas fluctuaciones son resultado de las propiedades cuánticas del sistema.

4.2. Estados Coherentes

Ya se han mencionado las propiedades de la función de Wigner, $W(q, p)$, y algunas formas alternativas que toma para describir un estado cuántico en el espacio de fases. Ahora, es conveniente profundizar un poco en los *estados coherentes*, ya que, a menudo son usados en la óptica cuántica y juegan un papel relevante en la transición entre la mecánica cuántica y la clásica, permitiendo una representación cuasi-probabilística del estado en el espacio fase mediante la función de Wigner. Además, tenerlos en mente puede facilitar el entendimiento de las propiedades de esta cuasi-probabilidad sin que luzcan tan abstractas.

Una característica muy importante de los estados coherentes es que minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg [8, 9], además cuentan con la propiedad de mantener una fase bien definida durante un

²Matemáticamente, una función Gaussiana se define como $f(x) = ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}$, donde a es la altura del pico, b es la posición del centro y c es la desviación estándar.

periodo de tiempo determinado debido a que están formados por una cantidad indefinida de fotones, en contraste con los estados de Fock, los cuales poseen una fase completamente aleatoria [9].

Estos estados pueden describirse como un estado en el que el paquete de ondas del estado fundamental se ha desplazado en el espacio de fases (q, p) . Así, pueden generarse haciendo uso del *operador de desplazamiento* $\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$, aplicándolo sobre el estado de vacío, es decir, el estado $|n\rangle$ para n igual a cero [3, 8, 9, 12], esto es:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (25)$$

Este operador, $\hat{D}(\alpha)$, desplaza el estado cuántico en una cantidad y dirección α , de manera implícita, esto indica que $\alpha \in \mathbb{C}$. Estas características permiten pensarlos como una especie de puente entre la descripción clásica y cuántica de un sistema.

La acción del operador de desplazamiento sobre los operadores de creación y aniquilación es [8]:

$$\begin{aligned} \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) &= \hat{a} + \alpha, \\ \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) &= \hat{a}^\dagger + \alpha^*. \end{aligned} \quad (26)$$

En contraste con los estados de Fock, los cuales se utilizan para representar sistemas con cantidades discretas de energía, los estados coherentes, donde las fluctuaciones son mucho más reducidas, se vuelven una herramienta muy útil al tratar de conectar la mecánica cuántica con la clásica [2].

4.2.1. Construcción de los estados coherentes

Formalmente, un estado coherente $|\alpha\rangle$ se define como un eigenvalor del operador de aniquilación, \hat{a} [3, 7, 10, 12]:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (27)$$

En donde $\alpha \in \mathbb{C}$ describe tanto la amplitud como la fase del estado coherente [8], en concreto, se tiene que $\alpha = \frac{q+ip}{\sqrt{2}} = |\alpha|e^{i\theta}$, por supuesto, aquí θ representa la fase.

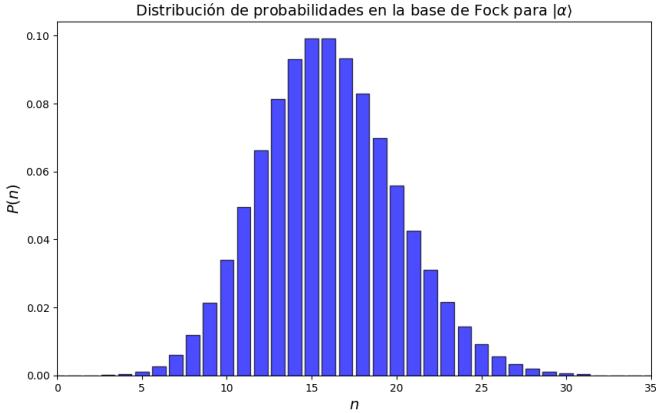


Figura 5: Distribución de probabilidad de un estado coherente con $|\alpha| = 4$ en la base de Fock. Es notable que esta distribución está centrada cerca de $|\alpha|^2 = 16$.

Los estados coherentes se describen como superposiciones de estados de número $|n\rangle$ ponderados por una distribución Poissoniana [7], lo que les permite representar campos con mínima dispersión de cuadraturas (es decir, $\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2}$, ver Ec. (19)) y energía fluctuante, lo que los convierte en los estados cuánticos más parecidos a las ondas clásicas [2].

Estos estados forman una base sobrecompleta en el espacio de Hilbert, lo que significa que, a pesar de que los elementos de la base no son ortogonales entre sí, son suficientes para cubrir el espacio, por lo que pueden usarse para representar cualquier estado del sistema cuántico [9].

En la Ec. (25) se muestra que estos estados son creados a partir de aplicar $\hat{D}(\alpha)$ al estado $|0\rangle$, de modo que, al desarrollarse, también pueden expresarse en términos de la base de estados de Fock, $|n\rangle$, [3, 10] de la siguiente manera:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (28)$$

Esta representación para $|\alpha\rangle$ permite ver que el número de fotones en un estado coherente no está definido de manera precisa (Fig. 5), sino que fluctúa alrededor de un valor promedio. En concreto, al calcular la varianza, se encuentra que dicho valor es $(\Delta n)^2 = |\alpha|^2$ [7, 8].

En la Sección 4.1 se mencionó que la representación cuántica de un campo electromagnético podía expresarse en términos de la base de Fock, la cual incluye términos diagonales y no diagonales, bien, pues por una parte, los términos diagonales $\langle n|\hat{\rho}|n\rangle$ indican la probabilidad de que el campo contenga una cantidad n de fotones, resultando en una representación útil para describir sistemas sin una fase bien definida, es decir, útiles para representar campos incoherentes (es decir, que no presentan coherencia) en los cuales los términos no diagonales de $\hat{\rho}$ tienden a cero [9], como pueden ser los sistemas en equilibrio térmico; por ejemplo, la luz incandescente o la radiación de cuerpo negro, cuya distribución de probabilidad sigue una distribución de Bose-Einstein y su varianza es igual al número promedio de fotones (\bar{n}) [8]. No obstante, los estados incoherentes no solo pueden representarse con estados de Fock, $|n\rangle$, sino también con una mezcla estadística de estados coherentes $|\alpha\rangle$ con una distribución Gaussiana, como la que brinda la representación $P(\alpha)$, también conocida como *representación de Glauber-Sudarshan* (se hablará de esto posteriormente, en la Sección 5.3.1).

Por otro lado, si los términos no diagonales tienen relevancia, entonces su análisis resulta indispensable para un estado coherente $|\alpha\rangle$ (donde $\alpha = \frac{q+ip}{\sqrt{2}}$) ya que, precisamente, los términos $\langle n|\hat{\rho}|m\rangle$, con $n \neq m$, contienen la información referente a la fase del sistema debido a que un estado coherente es una superposición de varios estados de número, de manera que $|\alpha\rangle$ tiene una fase bien definida debido a que α tiene una fase clara [2]. Esta coherencia hace que la representación de $\hat{\rho}$ en términos de estados de número sea complicada de trabajar ya que contiene una cantidad de coeficientes que tiende al infinito [9].

No está de más recalcar que, a diferencia de los estados coherentes, los estados de número tienen una fase indeterminada y carecen de términos no diagonales significativos en la representación del operador de densidad $\hat{\rho}$ [7]. El hecho de que los estados coherentes preserven una fase bien definida se refleja en la posibilidad de obtener un valor promedio no nulo para el campo electromagnético [2].

En concreto, al expresar el operador de densidad en la base de número como $\hat{\rho} = \sum_{n,m} \rho_{nm} |n\rangle \langle m|$, se tiene, efectivamente, una matriz, denominada como *matriz de densidad*. El hecho de que esta matriz contenga únicamente términos diagonales ($n = m$) resulta en una descripción matemática más sencilla, sin embargo, esto conlleva la pérdida de la información de fase que caracteriza a los estados coherentes [7].

4.2.2. Valor esperado del campo electromagnético

Como ya se ha mencionado, el campo electromagnético puede representarse utilizando estados $|n\rangle$ como base, o también a partir de estados $|\alpha\rangle$.

Sin embargo, a diferencia de los estados de número, los estados coherentes permiten obtener un valor promedio no nulo para el campo en un marco cuántico [2, 7]. Además, las fluctuaciones en estos estados son mínimas, lo que explica por qué el comportamiento quasi-clásico es dominante. El valor esperado del campo genérico \hat{G} (mencionado en la Ec. (24)) en un estado coherente se puede expresar como:

$$\langle \alpha | \hat{G} | \alpha \rangle = \alpha g + \alpha^* g^* = 2|\alpha| \operatorname{Re}(g) \cos \theta. \quad (29)$$

Prestando atención, puede notarse que esta ecuación tiene una forma semejante a la del campo clásico, mostrando una oscilación sinusoidal, lo que permite interpretar los estados coherentes como estados cuánticos muy cercanos a un comportamiento clásico [8]. Un ejemplo concreto es el operador de campo eléctrico monomodo polarizado linealmente, $\hat{E}_x(\mathbf{r}, t)$. Su valor esperado en un estado coherente muestra explícitamente la estructura de onda clásica:

$$\langle \alpha | \hat{E}_x(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle = 2|\alpha| \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \theta). \quad (30)$$

Aquí, el término entre paréntesis representa la amplitud de las fluctuaciones de vacío, donde V corresponde al volumen de cuantización, ϵ_0 es la permitividad del vacío y \mathbf{k} es el vector de onda que indica la dirección de propagación con frecuencia ω .

Los estados coherentes tienen una representación muy intuitiva en el espacio fase, ya que su función de Wigner asociada toma la forma de una distribución Gaussiana centrada en el punto $(\operatorname{Re}(\beta), \operatorname{Im}(\beta))$, en donde β representa al parámetro del estado coherente en cuestión [8]. A pesar de oscilar, esta representación permite ver con mayor facilidad su similitud con un sentido clásico de probabilidad.

Además de su capacidad para producir un valor esperado no nulo del campo electromagnético, los estados coherentes permiten representar el sistema de forma quasi-clásica, entendiendo esto como un comportamiento que se asemeja al límite clásico al presentar una distribución de probabilidad positiva y localizada, a través de la función de Wigner, como se ha mencionado anteriormente. En particular, para un estado coherente $|\beta\rangle$, dicha función es dada por [8]:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha-\beta|^2}. \quad (31)$$

Aquí α representa el punto en que se evalúa la función en el espacio fase. Esta función siempre es positiva y refleja las características cuasi-clásicas de los estados coherentes, tales como la minimización del principio de incertidumbre de Heisenberg y la ausencia de regiones negativas en su distribución, lo cual permite una interpretación casi directa como densidad de probabilidad (Fig. 6). La similitud de esta ecuación con la correspondiente al estado de vacío, $W_0(\alpha)$, Ec. (23), permite ver con claridad lo que se explica a través de la Ec. (25) acerca de que un estado coherente es un estado de vacío desplazado.

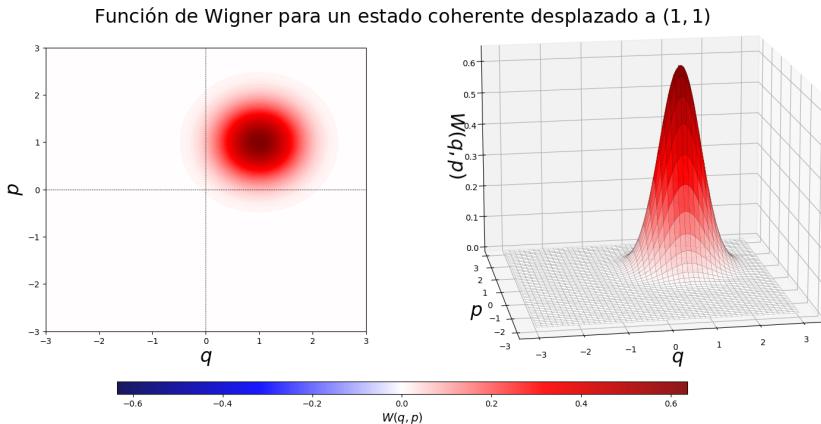


Figura 6: Función de Wigner para un estado coherente desplazado a $(1, 1)$ en el espacio fase. Al comparar con la correspondiente para un estado $|0\rangle$, puede notarse que un estado coherente es, en realidad, un estado de vacío desplazado.

Debido a que la Ec. (31) tiene un argumento negativo en la exponencial, ésta decaerá, de manera que el valor máximo que puede tomar es $\frac{2}{\pi}$. Sin embargo, este valor no es único, ya que, según la normalización empleada para W , este máximo puede ser distinto, pero en todos los casos, la situación es la misma: La función de Wigner no puede tomar valores arbitrariamente altos.

En este caso, cuando la función adquiere el valor máximo de $\frac{2}{\pi}$, se ha usado una normalización que es común cuando se trabaja con estados coherentes y cuadraturas del campo electromagnético, como en el marco de la óptica cuántica, en donde \hbar suele expresarse implícitamente. Una referencia bibliográfica de ello es [8].

4.2.3. Operadores de cuadratura

No está de más, hacer un énfasis breve acerca de lo que significan las cuadraturas del campo electromagnético, y es que son las componentes responsables de describir su comportamiento en términos de posición y momento (o variables análogas) en el espacio fase. En el contexto de la óptica cuántica —rama de la física que estudia los fenómenos en los que la naturaleza cuántica de la luz y su interacción con la materia son fundamentales— se suelen usar para describir las fluctuaciones del campo, como en el caso del estudio del oscilador armónico.

Si bien es cierto que un fotón no es una partícula con una posición bien definida, sino una excitación del campo electromagnético, resulta conveniente definir estas cuadraturas como un par de operadores que se encuentren a una distancia angular de $\frac{\pi}{2}$ entre sí y que sean proporcionales a \hat{a} y \hat{a}^\dagger , pero de manera que estos *operadores de cuadratura* se vuelvan adimensionales [8], a saber, estos son los que se han definido en la Ec. (19):

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}).$$

Algunos ejemplos físicos que coinciden con la descripción de los estados coherentes son los que se encuentran en la luz láser, en fenómenos de superfluidez y superconductividad, por lo que su estudio es muy importante en ramas como la óptica cuántica y la teoría de la información [8, 12].

La capacidad de estos estados para preservar la fase y presentar fluctuaciones mínimas análogas a las de una onda clásica contrasta con la naturaleza aleatoria de los estados incoherentes.

Las cuadraturas asociadas a la posición y el momento en la Ec. (19) se pueden entender como una manera de visualizar el estado cuántico en el espacio de fases, en el que la función de Wigner les da una representación cuasi-probabilística. Como ya se ha mencionado, en términos de estas, un estado coherente se puede expresar como $\alpha = \frac{\langle \hat{q} \rangle + i\langle \hat{p} \rangle}{\sqrt{2}}$ [8], lo que implica que se centra en el punto $(\langle \hat{q} \rangle, \langle \hat{p} \rangle)$.

Con base en lo anterior, es claro que tanto los estados coherentes como los estados de número constituyen elementos fundamentales para la representación de un estado cuántico en el espacio fase. A continuación se profundizará un poco más en las distinciones entre ellos.

4.2.4. Distinción entre estados coherentes e incoherentes

A pesar de que tanto un estado coherente como una mezcla incoherente de estados de número con una distribución de Poisson pueden presentar un valor de la función de correlación de segundo orden igual a la unidad, es decir, $g^2(0) = 1$ (definida a continuación), la diferencia fundamental radica, precisamente, en la coherencia de fase de los estados, ya que es esto lo que en verdad permite diferenciar entre un tipo y otro [9].

Función de correlación $g^2(\tau)$.

Es prudente mencionar que $g^2(0)$ es una medida de la probabilidad de encontrar dos fotones en un tiempo determinado en el mismo estado cuántico del campo electromagnético con respecto a encontrar uno solo. Esta medida se define como [9]:

$$g^2(0) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2} = 1 + \frac{V(n) - \bar{n}}{\bar{n}^2}. \quad (32)$$

En donde $V(n) = \langle (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2$.

De manera complementaria, $g^2(\tau)$ describe la probabilidad de detectarlos con un tiempo de retardo τ [8].

Ahora, la Ec. (32) describe la naturaleza del campo de la siguiente manera [2, 8, 9]:

- Si $g^2(0) > 1$, se trata de un campo con agrupamiento (*bunching*) en el que los fotones tienden a llegar en grupo, esto es $g^2(\tau) < g^2(0)$, es decir, es más probable que los fotones se detecten a la par que de manera separada, como en el caso de un campo térmico. Por ejemplo, la luz que emite un bombillo.
- Por otro lado, si $g^2(0) = 1$, se tiene un estado coherente en el que cada fotón se comporta de manera independiente y uniforme sin agruparse. En tal caso se habla de una distribución de Poisson, entonces $V(n) = \bar{n}$. Un ejemplo de esto es la luz láser.

- Pero si $g^2(0) < 1$, se tratará de un caso en que los fotones tienden a llegar de manera individual uno tras otro sin formar grupos (*antibunching*), algebraicamente $g^2(\tau) > g^2(0)$. Esto es una característica de la naturaleza cuántica del campo electromagnético. Dicho fenómeno sucede, por ejemplo, en sistemas que emiten un solo fotón a la vez, los cuales pueden representarse con los estados de número.

El valor dado por la Ec. (32) no es suficiente para distinguir entre un tipo de estados u otro, ya que aunque este parámetro refleja la distribución de fotones, no da información acerca de la fase, de modo que, a pesar de que un estado coherente y uno incoherente con distribución de Poisson comparten una distribución de probabilidad similar, el pasar del tiempo muestra que ese último tendrá un comportamiento más aleatorio.

Para diferenciar entre este par de tipos de estados, es necesario realizar mediciones que consideren la fase del campo, como las cuadraturas \hat{q} y \hat{p} [9]. Un ejemplo es la detección homodina, la cual puede estudiarse en múltiples bibliografías, un par de ellas pueden ser [8] y [9].

En un estado coherente, las incertidumbres de estas cuadraturas (Δq y Δp) resultan ser el valor mínimo permitido por la relación de incertidumbre de Heisenberg. Esto implica que el estado está máximamente localizado en el espacio fase, lo cual permite que la fase esté definida con la mayor precisión que la mecánica cuántica permite, a diferencia de una mezcla térmica (incoherente) donde la distribución se dispersa en todas direcciones, lo que implica la ausencia de una fase bien definida [9].

4.3. Estados Comprimidos

Los estados comprimidos representan una extensión de los estados coherentes [9], y son fundamentales en la descripción de sistemas cuánticos donde las fluctuaciones en una cuadratura, como la posición o el momento, necesitan minimizarse por debajo de las que se asocian con los estados coherentes. A diferencia de estos últimos que, como se ha visto, mantienen una incertidumbre que es igual en ambas cuadraturas y minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg, los estados comprimidos las redistribuyen entre las cuadraturas de manera que alguna de ellas puede reducirse por debajo del límite de Heisenberg a costa de aumentar las fluctuaciones en la cuadratura complementaria para respetar la relación de incertidumbre $\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ [2, 9]. Esto significa que, a diferencia de los estados coherentes, $\langle (\Delta q)^2 \rangle < \frac{\hbar}{2}$ ó $\langle (\Delta p)^2 \rangle < \frac{\hbar}{2}$.

De manera semejante a los estados coherentes, los cuales son estados de vacío desplazados (a través del operador $\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$), como lo muestra la Ec. (25), los estados comprimidos también son generados a partir de aplicar un operador a otros estados, solo que en este caso no se aplica al estado fundamental, $|0\rangle$, directamente, sino que, en general, a un estado coherente, $|\alpha\rangle$. Dicho operador, conocido como *operador de compresión* tiene una forma similar a $\hat{D}(\alpha)$, pues es un tipo de “generalización a dos fotones” de este [8]. La razón de esta analogía es que, mientras $\hat{D}(\alpha)$ es lineal en los operadores de creación y aniquilación, el exponente del operador de compresión depende cuadráticamente de ellos ($\hat{a}^{\dagger 2}$ y \hat{a}^2), lo que implica procesos de creación y aniquilación de pares. A saber:

$$\hat{S}(\xi) = e^{\frac{1}{2}(\xi^*\hat{a}^2 - \xi\hat{a}^{\dagger 2})}. \quad (33)$$

En donde $\xi = re^{i\theta}$ determina el grado de compresión que sufrirá el estado al que se aplique a través de la magnitud $r \in [0, \infty)$ y en dirección de $\theta \in [0, 2\pi]$, es decir, no es forzoso que la compresión se dé a lo largo de q o de p , sino que puede darse en cualquier dirección del espacio fase, la cual es determinada por este último parámetro y resulta ser una combinación lineal de las cuadraturas originales.

A diferencia de $\hat{D}(\alpha)$, que actúa creando o destruyendo fotones de manera individual, $\hat{S}(\xi)$ lo hace en pares de fotones correlacionados [8], lo cual puede observarse en el argumento de la función exponencial, que a diferencia del operador de desplazamiento, contiene \hat{a}^2 y $\hat{a}^{\dagger 2}$.

Para poder analizar cómo cambian las cuadraturas y propiedades de los fotones en este tipo de estados, es necesario observar qué sucede cuando $\hat{S}(\xi)$ (y también $\hat{S}^\dagger(\xi) = \hat{S}^{-1}(\xi) = \hat{S}(-\xi)$) se aplica sobre los operadores de creación y aniquilación [8]:

$$\begin{aligned} \hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi) &= \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh r, \\ \hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger\hat{S}(\xi) &= \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} e^{-i\theta} \sinh r. \end{aligned} \quad (34)$$

El operador de compresión puede aplicarse a un estado general $|\psi\rangle$ el cual se transforma en un nuevo estado $|\psi_s\rangle = \hat{S}(\xi)|\psi\rangle$ que mantiene propiedades de $|\psi\rangle$ pero con diferencias en las cuadraturas. Sin embargo, también puede aplicarse directamente sobre el estado fundamental, generando una redistribución del ruido cuántico, de manera que las fluctuaciones difieran en las cuadraturas, por ejemplo $\Delta q < \frac{1}{2}$ y $\Delta p > \frac{1}{2}$.

De esta manera, se puede obtener un estado comprimido más general al aplicar $\hat{D}(\alpha)$ sobre las Ecs. (34) y el estado de vacío, resultando en [8]:

$$|\alpha, \xi\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)|0\rangle. \quad (35)$$

Así, si $\xi = 0$, se obtiene un estado coherente.

De manera semejante a la Ec. (28), el operador de compresión también puede expresarse en términos de estados de Fock [8], sin embargo, esta expresión únicamente involucra términos pares debido a que $\hat{S}(\xi)$ los introduce (o aniquila) en pares. Así, el estado de vacío comprimido puede escribirse como [8]:

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (e^{i\theta} \tanh r)^m \frac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!} |2m\rangle. \quad (36)$$

Una forma simple de analizar este tipo de estados puede darse al notar que el operador $\hat{S}(\xi)$ reescalía la función de onda de acuerdo con [10]:

$$\psi_\xi(q) = e^{\xi/2} \psi_0(e^\xi q). \quad (37)$$

Por supuesto, este tipo de estados también tienen asociada una función de Wigner. A saber, esta función es:

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} \exp \left(-\frac{1}{2} X_1^2 e^{-2r} - \frac{1}{2} X_2^2 e^{2r} \right). \quad (38)$$

Donde:

$$X_1 = q \cos \theta + p \sin \theta, \quad X_2 = -q \sin \theta + p \cos \theta.$$

Un ejemplo de este tipo de estados puede visualizarse en las Fig. 7.

Función de Wigner para un estado comprimido

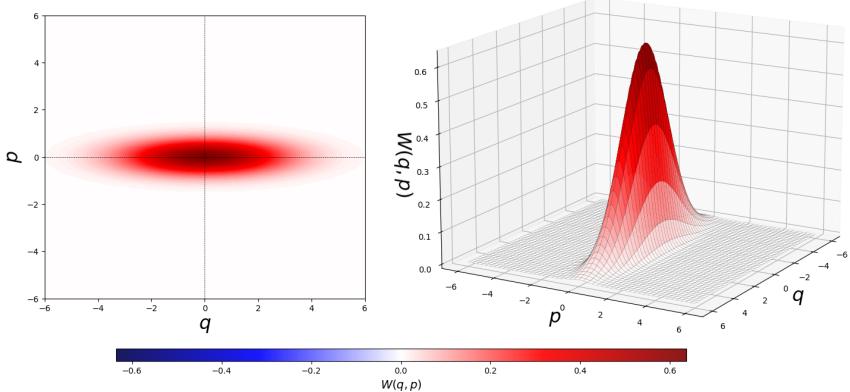


Figura 7: Función de Wigner para un estado comprimido con $r = 0,7$ y $\theta = \pi$. Puede notarse que es completamente positiva y, aunque podría estar fuera del origen, este ejemplo muestra que es un estado de vacío comprimido.

4.4. Estados de gato de Schrödinger

Este tipo de estados representan una superposición coherente de dos estados macroscópicamente distinguibles [8]. Fueron propuestos originalmente a partir del experimento mental de Erwin Schrödinger para ilustrar algunas de las peculiaridades de la mecánica cuántica, específicamente la superposición y el enredamiento.

Los estados de gato se expresan como una superposición de dos estados coherentes $|\alpha\rangle$ y $|-\alpha\rangle$ [6]. Estos también son conocidos como *estados coherentes pares* o *impares* y se diferencian en que para los primeros, la interferencia es constructiva, mientras que para los impares resulta ser destructiva, es decir, cumplen con [6]:

$$\begin{aligned} |\Psi_{par}\rangle &= |\alpha\rangle + |-\alpha\rangle & \Rightarrow & \Psi(q) = \psi_\alpha(q) + \psi_{-\alpha}(q), \\ |\Psi_{impar}\rangle &= |\alpha\rangle - |-\alpha\rangle & \Rightarrow & \Psi(q) = \psi_\alpha(q) - \psi_{-\alpha}(q). \end{aligned} \quad (39)$$

No obstante, a partir de ahora, únicamente se considerará el estado par, y se denotará simplemente como $|\Psi\rangle$. Algunas de las propiedades de este estado son la reducción de fluctuaciones cuadráticas por debajo del

nivel del vacío y oscilaciones no clásicas en la distribución del número de fotones [2].

Existe una diferencia entre los estados de gato de Schrödinger y una mezcla entre estados, como las formadas por $|\alpha\rangle$ y $|- \alpha\rangle$, debido al fenómeno de superposición cuántica, presente en los estados de gato de Schrödinger, y es que, al ser una combinación coherente, dan paso a fenómenos de interferencia cuántica, de la cual carece una mezcla clásica entre los estados mencionados. A diferencia de los sistemas clásicos, en los que las interferencias ocurren entre magnitudes físicas (como las ondas electromagnéticas), en los sistemas cuánticos, esta interferencia sucede entre amplitudes de probabilidad [7]. Esta puede observarse en su función de Wigner, en forma de productos cruzados entre sus respectivas funciones de onda, es decir, los productos $\psi_\alpha(q)\psi_{-\alpha}^*(q)$ y $\psi_{-\alpha}(q)\psi_\alpha^*(q)$ (ver Apéndice E.4).

La función de Wigner asociada a este tipo de estados es:

$$W_\Psi(q, p) = W_\alpha(q, p) + W_{-\alpha}(q, p) + W_{int}(q, p). \quad (40)$$

En donde:

$$\begin{aligned} W_\alpha(q, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar}((q-q_0)^2+(p-p_0)^2)}, \\ W_{-\alpha}(q, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar}((q+q_0)^2+(p+p_0)^2)}, \\ W_{int}(q, p) &= \frac{2}{\pi\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar}(q^2+p^2)} \cos\left(\frac{2}{\sqrt{\hbar}}(p\lambda - \mu q)\right). \end{aligned}$$

Donde $\lambda = \frac{q_0}{\sqrt{\hbar}}$ y $\mu = \frac{p_0}{\sqrt{\hbar}}$. Y gráficamente puede verse en la Fig. 8.

Función de Wigner para un estado de gato de Schrödinger

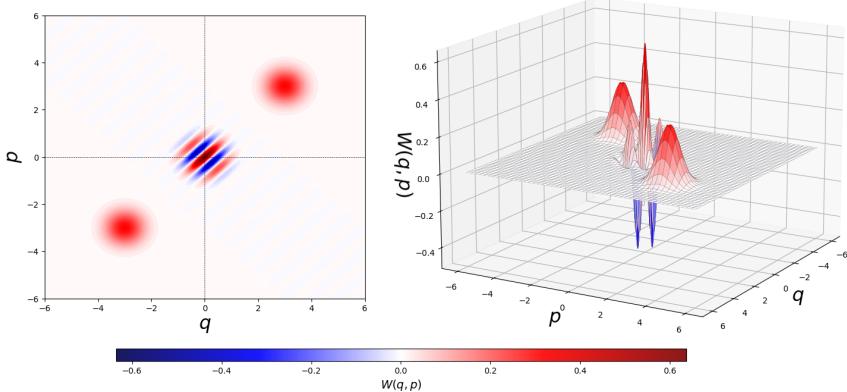


Figura 8: En la función de Wigner para un estado de gato de Schrödinger ya se notan algunas regiones negativas, lo cual se debe a las interferencias existentes entre $|\alpha\rangle$ y $|-\alpha\rangle$.

5. Función característica y ordenamiento de operadores

Antes de abordar la definición específica propuesta por Moyal, es fundamental establecer el contexto matemático que hace necesaria esta discusión. En la mecánica cuántica del espacio fase, la naturaleza no conmutativa de los operadores de posición y momento impide establecer una correspondencia única entre las funciones clásicas y los operadores cuánticos. Como consecuencia, surgen distintas reglas de correspondencia u “ordenamientos” de operadores. En esta sección se explorará cómo cada uno de estos ordenamientos está íntimamente ligado a una función característica específica y, por ende, da lugar a diferentes distribuciones de cuasi-probabilidad.

5.1. Función característica de Moyal

En contraste con la mecánica estadística clásica, en la que las distribuciones evolucionan siguiendo leyes deterministas, la mecánica cuántica involucra la necesidad de una visión más general, dentro de la cual el formalismo clásico queda contenido como un caso particular o límite. José

Enrique Moyal (1910–1998) precisa que esta necesidad apunta hacia los procesos estadísticos dinámicos (estocásticos) [13]. Esto se debe a que, en la mecánica cuántica, la evolución temporal de las distribuciones de probabilidad no tiene por qué ser determinista debido a la imposibilidad de definir distribuciones conjuntas de variables dinámicas no conmutativas, tales como la posición y el momento.

Moyal argumenta que, aunque la medición simultánea de variables no conmutativas (como q y p) es imposible, es conceptualmente válido asociarles distribuciones estadísticas en el espacio fase. De esta manera, propone que la mecánica cuántica podría interpretarse directamente como una teoría estadística, en la que las distribuciones clásicas pertenecen a un caso particular de esta [13].

Esta característica sale a relucir en los estados coherentes, cuyas distribuciones asociadas en el espacio fase son Gaussianas, bien definidas, y permiten calcular valores esperados de operadores cuánticos de manera directa. Estos estados son un buen ejemplo de cómo las herramientas estadísticas pueden ser útiles incluso en sistemas con restricciones cuánticas.

Moyal también propuso que, además de la Ec. (1), en donde la función de Wigner se obtiene con una transformada de Fourier de los elementos de la matriz de densidad $\rho(q, q')$, o de la Ec. (15), que es análoga a esta pero en términos de p en lugar de q , la función de Wigner puede obtenerse a partir de su *función característica*, la cual describe el estado $\hat{\rho}$ mediante una función de dos variables, [3, 13].

Si se considera esta función, $C(\sigma, \tau)$, como la transformada de Fourier de $W(q, p)$, es decir:

$$C(\sigma, \tau) = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{C}(\sigma, \tau)] = \int dq \int e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma q + \tau p)} W(q, p) dp, \quad (41)$$

entonces se puede obtener la función de Wigner como [3]:

$$W(q, p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^2 \int d\sigma \int e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma q + \tau p)} C(\sigma, \tau) d\tau. \quad (42)$$

A pesar de que la función característica de Moyal, Ec. (41), es una herramienta poderosa, esta formulación contiene términos dependientes de las variables recíprocas de posición y momento (σ, τ) (asociadas al espacio de Fourier), lo cual podría hacer que su interpretación física directa se complique, ya que, precisamente, la idea es lograr visualizar el

estado de manera similar a como se visualiza una densidad de probabilidad clásica, labor que es más directa a través de las variables (q, p) , por lo que pasar a este espacio se facilita si se hace uso de la transformada de Fourier, Ec. (42).

En el contexto de la óptica cuántica, resulta bastante útil introducir la función característica en términos de los operadores de creación, \hat{a}^\dagger , y aniquilación, \hat{a} . No obstante, son sensibles al orden con el que sean aplicados a un sistema, de manera que es menester hacer mención de los distintos resultados que se obtienen al usar un orden u otro.

5.2. Ordenamiento de operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger

Como se mencionó en la sección 4.2, los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger no commutan entre sí, consecuentemente, el orden en que se aplican tiene un papel fundamental en la mecánica cuántica.

Esta situación conduce a tener que reconocer varios tipos de ordenamientos de operadores, conocidos como el *orden normal*, el *anti-normal* y el *orden de Weyl* (el cual es simétrico). Esto debido a que, como es sabido, en la mecánica cuántica, *el orden de los factores sí altera el producto*. Esto significa que es posible asociar una función clásica $A(q, p)$ con un operador $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ de diferentes maneras [2, 3, 8, 10, 12]:

- **Orden normal (Ordenamiento de Glauber - Sudarshan, o simplemente P)**: Los operadores de creación \hat{a}^\dagger se colocan a la izquierda, mientras que los de aniquilación, \hat{a} a la derecha, sin olvidar el operador de número $(\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{n})$. Este ordenamiento se atribuye a Glauber-Sudarshan.
- **Orden anti-normal (Ordenamiento de Husimi, o simplemente Q)**: Atribuido a Husimi, en el cual, inversamente al *ordenamiento de Glauber-Sudarshan*, los operadores de aniquilación se colocarían a la izquierda, mientras que los de creación a la derecha, recordando que, para una función de onda ψ , se tiene: $\hat{a}\hat{a}^\dagger\psi = (n + 1)\psi$.
- **Orden simétrico (ordenamiento de Weyl)**: Promedia de manera simétrica los operadores \hat{q} y \hat{p} , por lo que se tratará con mayor detalle ya que resulta ser particularmente importante para la función de Wigner debido a que evita singularidades que sí podrían aparecer en las anteriores.

Estos ordenamientos dan lugar a diferentes cuasidistribuciones (P , Q y W , respectivamente), por lo que debe tenerse especial cuidado al definir operadores a partir de funciones clásicas [12].

En la práctica, es útil obtener la distribución de probabilidad (o cuasiprobabilidad, como P , Q o W) mediante una *función característica*, debido a que una función característica contiene toda la información necesaria sobre el estado cuántico del sistema para reconstruir la función de densidad de probabilidad mediante una transformada de Fourier inversa. Esto es posible ya que, en general, una función de densidad $\rho(x)$ está completamente definida si se conocen todos los momentos de la variable aleatoria x (valor esperado, varianza, asimetría, curtosis, etc.) [8].

5.3. Función característica de distintos ordenamientos

Dado que los operadores de creación y aniquilación no comutan, existen distintas reglas de asociación que dan lugar a diferentes descripciones estadísticas del mismo estado cuántico. A continuación, se analizan las funciones características asociadas a los tres ordenamientos principales y sus respectivas cuasidistribuciones.

5.3.1. Ordenamiento normal (Glauber-Sudarshan)

Para el caso del ordenamiento normal, la descripción del operador de densidad $\hat{\rho}$ se realiza en términos de una cuasidistribución de probabilidad expresada como una integral sobre todos los estados coherentes caracterizados por el parámetro complejo α . Estos estados coherentes $|\alpha\rangle$, que cumplen la Ec. (27), permiten construir dicha representación, conocida como *representación $P(\alpha)$* o representación de Glauber-Sudarshan, denominada así en honor a los físicos Roy J. Glauber (1925–2018) y George Sudarshan (1931–2018):

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha. \quad (43)$$

Aquí, $d^2\alpha$ representa las variables de integración correspondientes a las partes real e imaginaria de α .

Es posible notar que en la Ec. (43), $P(\alpha)$ toma un comportamiento análogo a una función de probabilidad clásica, ya que permite ponderar cada estado en la expansión del operador $\hat{\rho}$.

Esta cuasidistribución es útil para describir sistemas cuánticos que presentan características cuasi-clásicas (es decir, que admiten una descripción probabilística positiva), como los estados coherentes, en los que toma el valor de una delta de Dirac (reflejando una incertidumbre mínima) o estados de luz térmica, como la de una lámpara incandescente, en los que adquiere la forma de una Gaussiana. Para estos estados, esta representación toma valores positivos [2, 3, 8].

En general, permite identificar cuándo un sistema se comporta de forma más clásica ($P(\alpha) \geq 0$), en tal caso, los campos cuantizados de este tipo pueden simularse con una descripción clásica tratando la amplitud compleja de dichos campos como una variable aleatoria estocástica con probabilidad P [9].

Por el contrario, cuando su comportamiento es el de un sistema puramente cuántico (donde $P(\alpha) < 0$ o es singular), como los estados comprimidos (en los que la incertidumbre de alguna de las cuadraturas, posición o momento, se reduce por debajo de los valores del estado de vacío mientras que la otra aumenta), o los estados de número, en los que toma una forma que requiere derivadas de una delta de Dirac (esta derivada de δ es también llamada *distribución templada* o, por su término en inglés, *tempered distribution*), la cual es más singular que la propia δ [8], por lo que su interpretación física podría volverse complicada. Debido a esto, su utilidad para representar este tipo de estados se ve reducida.

A diferencia de la función de Wigner, que se asocia con el ordenamiento simétrico (o de Weyl), $P(\alpha)$ está ligada al **ordenamiento normal**, de manera que, en términos de una variable $\eta \in \mathbb{C}$, la función característica asociada es:

$$\chi_N(\eta) = \text{Tr}[\hat{\rho}e^{\eta\hat{a}^\dagger}e^{-\eta^*\hat{a}}]. \quad (44)$$

Como se mencionó anteriormente, si se aplica una transformada de Fourier a la función característica, puede recuperarse la distribución. Para este ordenamiento:

$$\begin{aligned} \chi_N(\eta) &= \int P(\alpha)\langle\alpha|e^{\eta\hat{a}^\dagger}e^{-\eta^*\hat{a}}|\alpha\rangle d^2\alpha, \\ &= \int P(\alpha)e^{\eta\alpha^*-\eta^*\alpha}d^2\alpha. \end{aligned} \quad (45)$$

$$\implies P(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\eta^*\alpha-\eta\alpha^*} \chi_N(\eta) d^2\eta.$$

5.3.2. Ordenamiento antinormal (Husimi)

Análogamente a lo anterior, si se hace uso del **ordenamiento antinormal**, es posible obtener la *representación* Q (de Husimi), que es siempre positiva [8], lo cual puede verse en su definición: $Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle$. No obstante, a pesar de ser siempre positiva y no tener singularidades, no puede tomarse como una distribución de probabilidad clásica, ya que los estados $|\alpha\rangle$ siguen la incertidumbre de Heisenberg, por lo que tiene una “anchura mínima”, lo cual no permite capturar toda la información cuántica del estado si es que este presenta un comportamiento puramente cuántico, como el “antibunching” o el “squeezing”, o simplemente presenta efectos no clásicos.

La representación Q también es útil para representar estados caóticos y coherentes, aunque es menos precisa que P , ya que como se comentó, para estos últimos, P adquiere forma de una delta de Dirac, mientras que Q lo hace como una Gaussiana suavizada [9], reflejando cierta imprecisión en comparación con la primera, sin embargo, resulta de utilidad para estados en los que P no existe en un sentido práctico, como los estados comprimidos, en los que Q adquiere la forma de una Gaussiana elíptica [8].

Bajo este ordenamiento, la función característica adquiere la forma:

$$\chi_A(\eta) = \text{Tr}[\hat{\rho} e^{-\eta^* \hat{a}} e^{\eta \hat{a}^\dagger}]. \quad (46)$$

Así, si se aplica un procedimiento similar al utilizado en la Ec. (45) se obtendrá:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\eta^* \alpha - \eta \alpha^*} \chi_A(\eta) d^2\eta. \quad (47)$$

5.3.3. Ordenamiento simétrico (Weyl)

El *orden de Weyl*, utilizado en la definición de la función de Wigner, promedia de manera simétrica las permutaciones de \hat{q} y \hat{p} . Por ejemplo, el producto clásico $q \cdot p$ puede ser convertido en un operador cuántico simétrico, expresado como $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{2} (\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q})$ [8]. En general, si $A(\hat{q}, \hat{p})$ es una función bajo el orden de Weyl, entonces:

$$\hat{A}(\hat{q}, \hat{p}) = \int A(\hat{q}, \hat{p}) W(q, p) dq dp. \quad (48)$$

Al ser simétrico con respecto a los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger y no tener preferencia por uno u otro, el orden de Weyl puede ser visto como un promedio entre el ordenamiento normal y antinormal.

Para este caso, la función característica correspondiente, se define como:

$$\chi(\eta) = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{D}(\eta)] = \text{Tr}[\hat{\rho}e^{\eta\hat{a}^\dagger - \eta^*\hat{a}}]. \quad (49)$$

Las funciones características (45) y (47) pueden relacionarse haciendo uso de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff³, obteniendo:

$$\chi(\eta) = \chi_N e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2}. \quad (50)$$

A pesar de que en la Ec. (50) aparece $\chi_N(\eta)$, relacionada con la representación P , es asociada con el ordenamiento simétrico de los operadores y es un elemento clave para la definición de la función de Wigner, de manera que esta puede obtenerse al aplicar la transformada [3, 9], a saber:

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= \frac{1}{\pi^2} \int e^{\eta^*\alpha - \eta\alpha^*} \chi(\eta) d^2\eta, \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int e^{\eta^*\alpha - \eta\alpha^*} \chi_N(\eta) e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} d^2\eta. \end{aligned} \quad (51)$$

Cabe resaltar que tanto $C(q, p)$ (Ec. (41)), como $\chi(\eta)$ (Ec. (49)), describen a la matriz de densidad $\hat{\rho}$, con la diferencia de que lo hacen en distintas bases. Son como “*los dos lados de una misma moneda*”.

Mientras que $C(\sigma, \tau)$ permite representar a $W(q, p)$ en términos de desplazamientos en el espacio fase a través de las variables conjugadas de (q, p) , la función $\chi(\eta)$ lo hace en términos de un promedio simétrico de estas variables originales (debido a que los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger se relacionan con ellas), es decir, se deriva del ordenamiento simétrico (o de Weyl), con lo cual se logran evitar singularidades. No obstante, existe una relación entre estas dos representaciones, la cual se puede obtener al sustituir los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger (Ec. (16)) en la función característica de Moyal (Ec. (41)), de manera que se encontrará la relación entre la variable η que aparece en la Ec. (49). Esto puede verse con mayor detalle en el Apéndice D.

³Esta fórmula establece que para dos operadores \hat{A} y \hat{B} , si el conmutador $[\hat{A}, \hat{B}]$ conmuta con ambos operadores, entonces la exponencial de la suma se factoriza como: $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}$.

5.4. Dinámica y dependencia temporal

Hasta ahora se ha hablado acerca de la función de Wigner asociada con distintos tipos de estados e incluso distintos ordenamientos de los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger ; sin embargo, esto se ha hecho sin considerar la dinámica de esta función, ya que no se ha introducido algún parámetro que involucre al tiempo.

Ahora, para tener una perspectiva general de esto, puede considerarse que, en la Ec. (1), las funciones de onda son dependientes del tiempo. Bajo este supuesto, y haciendo uso de la ecuación de Schrödinger, es posible mostrar que la derivada temporal de la función de Wigner es tal que [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(q, p)}{\partial t} &= \frac{\partial W_T}{\partial t} + \frac{\partial W_U}{\partial t} \\ &= -\frac{p}{m} \frac{\partial W(q, p)}{\partial q} + \sum_{s=0}^{\infty} (-\hbar^2)^s \frac{1}{(2s+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2s} \frac{\partial^{2s+1} U(q)}{\partial q^{2s+1}} \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{2s+1} W(q, p). \end{aligned} \quad (52)$$

Los detalles algebraicos de este resultado pueden revisarse en el Apéndice F.

Es notable que, en esta última ecuación, el primer término (correspondiente a $\frac{\partial W_T}{\partial t}$) no es dependiente de \hbar , mientras que el segundo (correspondiente a $\frac{\partial W_U}{\partial t}$) sí. Esto puede interpretarse como que el primero representa la contribución de la energía cinética, a través del movimiento de la función de Wigner en el espacio de posiciones, mientras que el segundo se asocia con las correcciones cuánticas.

5.4.1. Ejemplo: Oscilador Armónico

Como es sabido, el oscilador armónico es ampliamente utilizado para modelar sistemas tanto clásicos como cuánticos. En el caso cuántico, se describe por un potencial cuadrático de la forma $U(q) = \frac{1}{2}m\omega^2q^2$. Esta característica matemática implica que, debido a que el potencial es un polinomio de segundo orden, todas las derivadas de orden superior a dos que aparecen en la suma de la Ec. (52) son nulas.

En consecuencia, todos los términos de corrección cuántica (los que dependen de potencias de \hbar) desaparecen. Esto significa que, para el oscilador armónico, la función de Wigner evoluciona siguiendo exactamente

la ecuación de Liouville clásica, sin dispersión cuántica. Físicamente, esto implica que la distribución de probabilidad en el espacio fase simplemente “fluye” siguiendo las trayectorias clásicas de las partículas.

La función de Wigner inicial $W(q, p, 0)$ puede construirse a partir de los estados propios $|n\rangle$, como se definió en la Ec. (22):

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} (-1)^n L_n(4|\alpha|^2) e^{-2|\alpha|^2}.$$

En donde $\alpha = (q + ip)/\sqrt{2}$. Dado que la evolución es clásica, la forma de la distribución se preserva y simplemente experimenta una rotación en el espacio fase con frecuencia angular ω . Las trayectorias clásicas que dictan esta rotación están dadas por [4]:

$$\begin{aligned} q_0 &= q \cos(\omega t) - \frac{p}{m\omega} \sin(\omega t), \\ p_0 &= p \cos(\omega t) + m\omega q \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Así, para un oscilador de masa unitaria y frecuencia $\omega = 1$, la función de Wigner asociada será [4]:

$$W(q, p, t) = W(q \cos(t) - p \sin(t), p \cos(t) + q \sin(t), 0) \quad (53)$$

Este resultado muestra que, para potenciales cuadráticos, la “nube” de probabilidad orbita el origen del espacio fase igual que lo haría un sistema clásico.

6. Conexión entre la mecánica cuántica y clásica

Como se mencionó en la sección 5.1, es válido asociar distribuciones estadísticas a observables que, en general, son no conmutativas entre sí, de manera que, por ejemplo, una función $G(r, s)$, en la que las variables r y s no conmutan, puede asociarse a un operador simétricamente ordenado, en el que su valor esperado será tal que $\langle G(r, s) \rangle = \langle \psi | G(\hat{r}, \hat{s}) | \psi \rangle$ [13].

En el caso específico de una función clásica $A(q, p)$, definida en el espacio fase, también es posible asociar un operador cuántico $\hat{A}(q, p)$, a través de la *transformada de Weyl* [4], la cual también utiliza una representación simétricamente ordenada, como puede notarse en su definición:

$$A(q, p) = \int \left\langle q + \frac{z}{2} \left| \hat{A} \right| q - \frac{z}{2} \right\rangle e^{-ipz/\hbar} dz. \quad (54)$$

Esta transformada mapea funciones clásicas en el espacio fase a operadores cuánticos y viceversa, lo cual puede ser útil para ver una conexión entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica. Además, cuenta con una propiedad importante, y es que, si se tienen dos funciones clásicas $A(q, p)$ y $B(q, p)$ asociadas a los operadores \hat{A} y \hat{B} , respectivamente, entonces [3]:

$$Tr[\hat{A}\hat{B}] = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dq \int A(q, p)B(q, p) dp. \quad (55)$$

Se observa que se recupera la propiedad de la Ec. (10) a través de la Ec. (55) si se toma cierta definición para las funciones, por ejemplo $\hat{A} = \hat{\rho}$ y $\hat{B} = \hat{I}$ [3].

Por otra parte, si $A(q, p)$ continúa siendo una función clásica definida en el espacio fase y $\hat{B} = \hat{\rho}$, entonces, para un sistema que sea descrito por la distribución de probabilidad $W(q, p)$ (asociada a la matriz de densidad $\hat{\rho}$), el valor esperado de la función A es tal que [3]:

$$\langle A \rangle = Tr[\hat{\rho}\hat{A}] = \int dq \int W(q, p)A(q, p) dp. \quad (56)$$

La forma algebraica de este valor esperado puede obtenerse naturalmente, sin requerir el uso de la función característica de Moyal [1], a

partir de colocar de manera estratégica tres veces el operador \hat{I} , (usando la identidad $\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{iqp/\hbar}$) dentro de $Tr[\hat{\rho}\hat{A}] = \int \langle q_1|\hat{\rho}\hat{A}|q_1\rangle dq_1$ y realizar un cambio de variable definido por las diferencias de posiciones y momentos iniciales y finales [1].

En la Ec. (56), es posible observar una analogía con el promedio de una cantidad física representada por $A(q, p)$ y distribución de probabilidad $W(q, p)$.

La función de Wigner (Ec. (1)) se encuentra definida en eigenestados de posición; no obstante, en la formulación de la mecánica cuántica del espacio fase existe cierta simetría en $W(q, p)$ (y también en $A(q, p)$), de modo que es posible expresar cualquiera de las dos en términos de eigenestados, ya sean de posición o momento.

Es prudente mencionar que no basta con que $W(q, p)$ cumpla con las propiedades descritas anteriormente (en la Sección 3) sino que dicha función también debe corresponder a un operador de densidad válido en la mecánica cuántica, es decir, que $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$, $Tr[\hat{\rho}] = 1$ y que sus eigenvalores $\lambda_i \in [0, 1]$.

De la revisión previa, es notable que el uso de la traza de los operadores es bastante útil, de modo que, como se mencionó en la Sección 2.1, a través de ella, y el operador $\hat{W}(q, p)$ (Ec. (5)), puede obtenerse la función de Wigner asociada a un operador que no necesariamente sea $\hat{\rho}$ [1]. Por ejemplo, para $\hat{A}(q, p)$:

$$W_{\hat{A}}(q, p) = Tr[\hat{A}\hat{W}(q, p)]. \quad (57)$$

En cambio, si se trata de $\hat{\rho}$:

$$W(q, p) = Tr \left[\frac{\hat{\rho}}{2\pi\hbar} \hat{W}(q, p) \right]. \quad (58)$$

Para las últimas dos ecuaciones se observa que si $2\pi\hbar\hat{A} = \hat{\rho}$, estas se igualan.

6.1. El Límite Cuántico-Clásico

Una condición que, más que deseable, es menester para observar una conexión entre las teorías clásica y cuántica de la mecánica es que en el límite cuando $\hbar \rightarrow 0$, la función de Wigner $W(q, p)$ se asemeje a una verdadera distribución de probabilidades en el espacio fase, ya que esto reflejaría el comportamiento clásico del sistema.

Si se revisa la Ec. (52), el segundo sumando tiene una dependencia directa de \hbar , mientras que el primero no, así, en el límite en que $\hbar \rightarrow 0$, los términos del segundo sumando se anulan y se recupera la ecuación de Liouville clásica, la cual describe la evolución temporal de la densidad de probabilidad de un sistema clásico (Ec. (12)).

$$\frac{\partial W(q, p)}{\partial t} = \frac{\partial W_T}{\partial t} + \frac{\partial W_U}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(q, p)}{\partial t} &= \frac{\partial W_T}{\partial t} + \frac{\partial W_U}{\partial t} \\ &= -\frac{p}{m} \frac{\partial W(q, p)}{\partial q} + \sum_{s=0}^{\infty} (-\hbar^2)^s \frac{1}{(2s+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2s} \frac{\partial^{2s+1} U(q)}{\partial q^{2s+1}} \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{2s+1} W(q, p). \\ &\implies \lim_{\hbar \rightarrow 0} \left(\frac{\partial W(q, p)}{\partial t} \right) = -\frac{p}{m} \frac{\partial W(q, p)}{\partial q}. \end{aligned} \quad (59)$$

7. Conclusiones

En este trabajo se ha explorado la formulación de la mecánica cuántica en el espacio fase a través de la función de Wigner, evidenciando que esta herramienta constituye mucho más que una simple curiosidad matemática ya que representa un puente conceptual entre el formalismo abstracto de operadores y la intuición geométrica de la mecánica clásica. Si bien la función de Wigner logra una descripción conjunta de la posición y el momento, superando la restricción habitual de elegir una única representación, su naturaleza de cuasi-probabilidad surge como consecuencia del principio de incertidumbre de Heisenberg. A diferencia de las densidades clásicas, la función de Wigner puede adquirir valores negativos en regiones donde la interferencia cuántica es dominante. Este comportamiento, aunque podría pensarse como una inconsistencia, en realidad es un indicativo de la naturaleza no clásica de un estado, como se observó detalladamente en los estados de Fock y los estados de gato de Schrödinger.

El análisis de los distintos estados físicos reveló un panorama contrastante en el espacio fase. Por un lado, los estados coherentes y los estados comprimidos exhiben funciones de Wigner positivas y localizadas que minimizan la relación de incertidumbre, comportándose como los análogos más cercanos a las partículas clásicas. Por otro lado, los

estados de número y las superposiciones macroscópicas revelan estructuras oscilatorias complejas y regiones negativas que imposibilitan una interpretación probabilística clásica directa, confirmando que la función de Wigner puede fungir como un detector de la coherencia y las correlaciones cuánticas.

También se estableció la conexión fundamental entre las distribuciones de cuasi-probabilidad y el ordenamiento de operadores. En particular, la función de Wigner es la representación asociada al ordenamiento simétrico (o de Weyl), distinguiéndose de las representaciones P de Glauber-Sudarshan (orden normal) y Q de Husimi (orden antinormal). Esta correspondencia enfatiza que la elección de una distribución en el espacio fase no es arbitraria, sino que dicta las reglas de cálculo para los valores esperados de los observables físicos y la aplicación de los operadores.

Finalmente, el estudio de la dinámica y la evolución temporal reafirmó la consistencia del formalismo. Para sistemas con potenciales cuadráticos, como el oscilador armónico, la evolución de la función de Wigner sigue exactamente la ecuación de Liouville clásica, preservando la forma de la distribución a lo largo de las trayectorias del espacio fase. Además, se mostró que en el límite $\hbar \rightarrow 0$, las correcciones cuánticas se desvanecen, recuperando la descripción estadística de la mecánica clásica. Esto lleva a notar que la función de Wigner es una herramienta muy poderosa para visualizar fenómenos cuánticos de una manera intuitiva, mediante la posibilidad de analizar la transición clásico-cuántica y comprender la estructura de la información en el espacio fase.

Apéndices:

A. Relación entre $\hat{W}(q, p)$ y $\hat{\Pi}_{q,p}$

En la sección 2.1 se ha mencionado que:

$$\hat{W}(q, p) = 4\pi\hat{\Pi}_{q,p}.$$

Pero, ¿cómo es que surge esta relación? Pues, si se considera que [1]:

$$W(q, p) = \text{Tr} \left[\frac{\hat{\rho}}{2\pi\hbar} \hat{W}(q, p) \right].$$

Entonces, para un estado puro $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, se tendrá:

$$W(q, p) = \text{Tr} \left[\frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{2\pi\hbar} \hat{W}(q, p) \right] = \frac{1}{2\pi\hbar} \text{Tr} \left[|\psi\rangle\langle\psi| \hat{W}(q, p) \right].$$

Ahora, usando el hecho de que $\text{Tr} \left[|\psi\rangle\langle\psi| \hat{C} \right] = \langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle$, entonces:

$$W = \frac{1}{2\pi\hbar} \langle\psi|\hat{W}(q, p)|\psi\rangle.$$

Por otra parte, en términos del operador de paridad desplazado $\hat{\Pi}_{q,p}$, se tiene:

$$W(q, p) = \frac{2}{\hbar} \langle\psi|\hat{\Pi}_{q,p}|\psi\rangle.$$

Al igualar estas expresiones se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\hbar} \langle\psi|\hat{W}(q, p)|\psi\rangle &= \frac{2}{\hbar} \langle\psi|\hat{\Pi}_{q,p}|\psi\rangle, \\ \langle\psi|\hat{W}(q, p)|\psi\rangle &= 4\pi \langle\psi|\hat{\Pi}_{q,p}|\psi\rangle. \\ \implies \hat{W}(q, p) &= 4\pi\hat{\Pi}_{q,p}. \end{aligned} \tag{60}$$

B. Operadores de Bopp

Es posible utilizar representaciones algebraicas del operador de Wigner, mencionado en la sección 5, que podrían simplificar los cálculos. Una de las herramientas más útiles para ello son los *Operadores de Bopp* —nombrados así en honor al físico alemán Fritz Bopp (1909–1987)— los

cuales permiten expresar la función de Wigner asociada a una función clásica $A(q, p)$ sin necesidad de recurrir a una representación integral.

Estos operadores sustituyen las variables cuánticas \hat{q} y \hat{p} de la siguiente manera:

$$\hat{q} \rightarrow \left(q - \frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} \right), \quad \hat{p} \rightarrow \left(p + \frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} \right). \quad (61)$$

Los cuales conducen a una expresión resultante para $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ tal que:

$$W_{\hat{A}}(q, p) = \hat{A} \left(q - \frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p}, p + \frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} \right) 1. \quad (62)$$

En donde los operadores de Bopp actúan, primero, entre sí, y posteriormente sobre el número 1 [1].

C. Convenciones para $W(q, p)$

En la literatura existen diversas convenciones para la definición de la función de Wigner, las cuales son utilizadas a conveniencia según el contexto en el que se apliquen. A continuación se mencionan algunas de las que son mencionadas por algunos de los autores de las referencias bibliográficas del presente texto.

- La definición principal (la que se ha priorizado en este trabajo), es decir, la Ec. (1):

$$W(q, p) = \int \left\langle q + \frac{1}{2} y \left| \frac{\hat{p}}{2\pi\hbar} \right| q - \frac{1}{2} y \right\rangle e^{-ipy/\hbar} dy,$$

es, también, utilizada por autores como Ben Benjamin [1] y Wolfgang Schleich [2].

Algunas de las convenciones utilizadas varían únicamente en el sentido de la normalización, por ejemplo:

- W. Case [4] utiliza la convención:

$$W(q, p) = \frac{1}{\hbar} \int \psi \left(x + \frac{1}{2} y \right) \psi^* \left(x - \frac{1}{2} y \right) e^{-ipy/\hbar} dy. \quad (63)$$

Otros autores difieren en el signo que se utiliza en el argumento de la función exponencial en la definición de la transformada de Fourier que se ha utilizado:

- C. Gerry y P. Knight [8] utilizan:

$$W(q, p) = \int \left\langle q + \frac{1}{2}x \left| \frac{\hat{\rho}}{2\pi\hbar} \right| q - \frac{1}{2}x \right\rangle e^{ipx/\hbar} dx. \quad (64)$$

O también pueden variar en los puntos en que se evalúa la función, de manera que:

- Los autores de la referencia [3] utilizan:

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \langle q - y | \hat{\rho} | q + y \rangle e^{i2py/\hbar} dy. \quad (65)$$

- Luis de la Peña [7] usa:

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \langle x + z | \hat{\rho} | x - z \rangle e^{-i2pz/\hbar} dz. \quad (66)$$

D. Relación entre las funciones características $C(\sigma, \tau)$ y $\chi(\eta)$.

Una función característica codifica la descripción completa de un estado cuántico, tal como lo hace la matriz de densidad $\hat{\rho}$. Por lo tanto, son representaciones equivalentes que preservan la misma información física. En este caso particular, se tiene la función característica de Moyal (Ec. (41)):

$$C(\sigma, \tau) = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{C}(\sigma, \tau)] = \int dq \int e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma q + \tau p)} W(q, p) dp.$$

En donde se tiene $\hat{C}(\sigma, \tau) = e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma \hat{q} + \tau \hat{p})}$, y la función característica asociada al ordenamiento simétrico de los operadores de creación y aniquilación (Ec. 49):

$$\chi(\eta) = \text{Tr}[\hat{\rho} e^{\eta \hat{a}^\dagger - \eta^* \hat{a}}].$$

La primera representa al estado en el espacio de las variables conjugadas de la posición y el momento (σ, τ) , mientras que la segunda lo hace a través de una relación con los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger . No obstante, el argumento de las funciones exponenciales de cada una de estas funciones características, es decir:

$$\frac{i}{\hbar}(\sigma\hat{q} + \tau\hat{p}) \quad \text{y} \quad \eta\hat{a}^\dagger - \eta^*\hat{a},$$

sugiere una conexión entre las variables (σ, τ) y η . De manera que, si se definen η y η^* como:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(-\tau + i\sigma), \quad \eta^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(-\tau - i\sigma),$$

se puede llegar a que $\frac{i}{\hbar}(\sigma\hat{q} + \tau\hat{p}) = \eta\hat{a}^\dagger - \eta^*\hat{a}$, y por lo tanto:

$$C(\sigma, \tau) = \chi(\eta).$$

E. Cálculo de las funciones de Wigner para distintos estados

E.1. Estados de Fock

Aquí se muestran con mayor detalle dos formas para obtener la función de Wigner para los estados de Fock (Ec. 22). Una corresponde al uso de la función de onda para estos estados (Ec. 21), mientras que la otra se realiza usando el operador de desplazamiento.

E.1.1. Usando la función de onda

Considerando la función de onda para estos estados (Ec. 21):

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{1}{\pi\hbar} \right)^{1/4} H_n \left(\frac{1}{\sqrt{\hbar}} x \right) e^{-\frac{x^2}{2\hbar}}.$$

En esta expresión, $H_n(\xi)$ denota los **polinomios de Hermite** de n -ésimo orden⁴.

⁴Los polinomios de Hermite se definen como: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$.

En la definición de la función de Wigner, 1:

$$W(q, p) = \int \left\langle q + \frac{1}{2}y \left| \frac{\hat{\rho}}{2\pi\hbar} \right| q - \frac{1}{2}y \right\rangle e^{-ipy/\hbar} dy$$

En donde $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n|$, entonces se tendrá:

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \left\langle q + \frac{1}{2}y \left| n \right\rangle \right\langle n \left| q - \frac{1}{2}y \right\rangle e^{-ipy/\hbar} dy.$$

El bracket será:

$$\begin{aligned} & \left\langle q + \frac{1}{2}y \left| n \right\rangle \right\langle n \left| q - \frac{1}{2}y \right\rangle = \psi_n \left(q + \frac{y}{2} \right) \psi_n^* \left(q - \frac{y}{2} \right) \\ & = \left(\frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{1}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \right)^2 H_n \left(\frac{1}{\sqrt{\hbar}} \left(q + \frac{y}{2} \right) \right) \times \\ & \quad \times H_n \left(\frac{1}{\sqrt{\hbar}} \left(q - \frac{y}{2} \right) \right) e^{-\frac{1}{2\hbar} \left(q + \frac{y}{2} \right)^2} e^{-\frac{1}{2\hbar} \left(q - \frac{y}{2} \right)^2} \\ & = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} \right) H_n \left(\frac{1}{\sqrt{\hbar}} \left(q + \frac{y}{2} \right) \right) H_n \left(\frac{1}{\sqrt{\hbar}} \left(q - \frac{y}{2} \right) \right) e^{-\frac{1}{\hbar} \left(q^2 + \frac{y^2}{4} \right)}. \\ \implies & W_n(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} \right) H_n \left(\frac{1}{\sqrt{\hbar}} \left(q + \frac{y}{2} \right) \right) \times \\ & \quad \times H_n \left(\frac{1}{\sqrt{\hbar}} \left(q - \frac{y}{2} \right) \right) e^{-\frac{1}{\hbar} \left(q^2 + \frac{y^2}{4} \right)} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} dy. \quad (67) \end{aligned}$$

Con este resultado para $W_n(q, p)$ y tomando en cuenta que para $n = 0$, los polinomios de Hermite son $H_0(x) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} W_0(q, p) & = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} e^{-\frac{1}{\hbar} \left(q^2 + \frac{y^2}{4} \right)} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} dy \\ & = \frac{1}{2\pi\hbar} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} \right) \left(2\sqrt{\pi\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar} \left(q^2 + p^2 \right)} \right) \\ & = \frac{1}{\pi\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar} \left(q^2 + p^2 \right)}. \end{aligned} \quad (68)$$

Ahora, para $n = 1$ se tiene que $H_1(x) = 2x$, entonces la Ec. 67 dará:

$$\begin{aligned}
W_1(q, p) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{\hbar}} \left(q + \frac{y}{2} \right) \right) \\
&\quad \times \left(\frac{2}{\sqrt{\hbar}} \left(q - \frac{y}{2} \right) \right) e^{-\frac{1}{\hbar}(q^2 + \frac{y^2}{4})} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} dy \\
&= \frac{1}{(\pi\hbar)^{3/2}} \int \left(q^2 - \frac{y^2}{4} \right) e^{-\frac{1}{\hbar}(q^2 + \frac{y^2}{4})} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} dy \\
&= \frac{1}{(\pi\hbar)^{3/2}} \left(\int q^2 e^{-\frac{1}{\hbar}(q^2 + \frac{y^2}{4})} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} dy - \int \frac{y^2}{4} e^{-\frac{1}{\hbar}(q^2 + \frac{y^2}{4})} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} dy \right) \\
&= \frac{1}{(\pi\hbar)^{3/2}} \left(2\sqrt{\pi\hbar}q^2 e^{-\frac{1}{\hbar}(q^2 + p^2)} + \sqrt{\pi\hbar}(2p^2 + \hbar) e^{-\frac{1}{\hbar}(q^2 + p^2)} \right). \\
\implies W_1(q, p) &= \frac{-1}{\pi\hbar} (\hbar - 2(q^2 + p^2)) e^{-\frac{1}{\hbar}(q^2 + p^2)}. \tag{69}
\end{aligned}$$

De manera semejante, para $n = 2$, dado que $H_2(x) = 4x^2 - 2$, entonces:

$$\begin{aligned}
W_2(q, p) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} \right) \left(\frac{4}{\sqrt{\hbar}} \left(q + \frac{y}{2} \right)^2 - 2 \right) \times \\
&\quad \times \left(\frac{4}{\sqrt{\hbar}} \left(q - \frac{y}{2} \right)^2 - 2 \right) e^{-\frac{1}{\hbar}(q^2 + \frac{y^2}{4})} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} dy \\
&= \frac{1}{16(\pi\hbar)^{3/2}} \int \left(\frac{(y - 2q)^2}{\hbar} - 2 \right) \left(\frac{(y + 2q)^2}{\hbar} - 2 \right) e^{-\frac{1}{\hbar}(q^2 + \frac{y^2}{4})} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} dy
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16(\pi\hbar)^{3/2}} \int \left(\frac{(y^2 - 4q^2)^2}{\hbar^2} - \frac{2(y - 2q)^2}{\hbar} - \frac{2(y + 2q)^2}{\hbar} + 4 \right) \times e^{-\frac{1}{\hbar}(q^2 + \frac{y^2}{4})} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} dy$$

$$= \frac{1}{16(\pi\hbar)^{3/2}} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4).$$

Las cuatro integrales que deben resolverse dan como resultado:

$$I_1 = 8e^{-\frac{p^2+q^2}{\hbar}} \sqrt{\frac{\pi}{\hbar}} \left(\frac{4(p^2 + q^2)^2 - 4(3p^2 + q^2)\hbar + 3\hbar^2}{\hbar} \right),$$

$$I_2 = -8\sqrt{\frac{\pi}{\hbar}} e^{-\frac{p^2+q^2}{\hbar}} (-2(p - iq)^2 + \hbar),$$

$$I_3 = -8\sqrt{\frac{\pi}{\hbar}} e^{-\frac{p^2+q^2}{\hbar}} (-2(p + iq)^2 + \hbar),$$

$$I_4 = 8e^{-\frac{p^2+q^2}{\hbar}} \sqrt{\pi\hbar}.$$

Por lo tanto, al sustituirlas, se obtiene:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{16(\pi\hbar)^{3/2}} \left(\frac{16}{\hbar} \sqrt{\frac{\pi}{\hbar}} (2q^4 + 2p^4 + 4q^2p^2 - 4q^2\hbar - 4p^2\hbar + \hbar^2) e^{-\frac{1}{\hbar}(q^2 + p^2)} \right). \\ \implies W_2(q, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar}(q^2 + p^2)} \left(\frac{1}{\hbar^2} (2q^4 + 2p^4 + 4q^2p^2 - 4q^2\hbar - 4p^2\hbar + \hbar^2) \right). \end{aligned}$$

De esta última expresión puede notarse que aparecen los polinomios de Laguerre con argumento igual a $\frac{2}{\hbar}(q^2 + p^2)$, entonces:

$$W_2(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar}(q^2 + p^2)} L_2 \left(\frac{2}{\hbar}(q^2 + p^2) \right). \quad (70)$$

Siguiendo con esto, la función de Wigner para el n -ésimo estado de Fock puede escribirse como:

$$W_n(q, p) = \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar}(q^2 + p^2)} L_n \left(\frac{2}{\hbar}(q^2 + p^2) \right). \quad (71)$$

E.1.2. Usando el operador de desplazamiento $\hat{D}(\eta)$

Como se mencionó anteriormente, también puede obtenerse la función de Wigner para los estados de Fock haciendo uso del operador $\hat{D}(\eta)$. Partiendo de la definición para $W(\alpha)$ dada en la Ec. 51 y recordando que $\chi(\eta) = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{D}(\eta)] = \text{Tr}[\hat{\rho}e^{\eta\hat{a}^\dagger - \eta^*\hat{a}}]$:

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\eta^*\alpha - \eta\alpha^*} \chi(\eta) d^2\eta = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\eta^*\alpha - \eta\alpha^*} \langle \psi | \hat{D}(\eta) | \psi \rangle d^2\eta.$$

Para el caso en que $|\psi\rangle = |n\rangle$, y usando la fórmula Baker-Campbell-Hausdorff se tendrá que:

$$\langle \psi | \hat{D}(\eta) | \psi \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} \langle n | e^{\eta\hat{a}^\dagger - \eta^*\hat{a}} | n \rangle.$$

Si se expanden las exponenciales en una serie de potencias:

$$e^{\eta\hat{a}^\dagger} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\eta^l}{l!} (a^\dagger)^l,$$

$$e^{-\eta^*\hat{a}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\eta^*)^m}{m!} \hat{a}^m.$$

$$\implies \langle n | \hat{D}(\eta) | n \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\eta^*)^m \eta^l}{m! l!} \langle n | (\hat{a}^\dagger)^l \hat{a}^m | n \rangle.$$

Por ortogonalidad, esta ecuación es no nula únicamente cuando se tiene $m = l$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \implies \langle n | \hat{D}(\eta) | n \rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\eta^*)^m \eta^m}{(m!)^2} \langle n | (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^m | n \rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\eta|^2)^m}{(m!)^2} \langle n | (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^m | n \rangle. \end{aligned}$$

Pero:

$$\langle n | (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^m | n \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } n < m \\ \frac{n!}{(n-m)!}, & \text{si } n \geq m \end{cases}$$

Por lo que se puede utilizar el coeficiente binomial, definido como $C(n, m) = \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$, entonces:

$$\langle n | \hat{D}(\eta) | n \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\eta|^2)^m}{m!} \binom{n}{m},$$

sin embargo, esto puede simplificarse más si se observa que ahora se puede escribir en términos de los polinomios de Laguerre:

$$L_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} \frac{(-1)^m}{m!} x^m$$

$$\implies \langle n | \hat{D}(\eta) | n \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} L_n(|\eta|^2).$$

De manera que la función de Wigner se puede calcular como:

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\eta^* \alpha - \eta \alpha^*} e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} L_n(|\eta|^2) d^2\eta. \quad (72)$$

Ahora, si se considera $\eta = \frac{-i(x+iy)}{2} = \frac{y}{2} - i\frac{x}{2}$, entonces $d^2\eta = \frac{1}{4}dxdy$ y, además, $\eta^* \alpha - \eta \alpha^* = i(\lambda x + \mu y)$, donde $\alpha = \lambda + i\mu$, por lo que:

$$W_n(\alpha) = \frac{1}{4\pi^2} \int e^{i\lambda x} e^{i\mu y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}\right)} L_n\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}\right) dxdy. \quad (73)$$

Así, para $n = 0$, $L_0(x) = 1$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} W_0(\alpha) &= \frac{1}{4\pi^2} \int e^{i\lambda x} e^{-\frac{x^2}{8}} dx \int e^{i\mu y} e^{-\frac{y^2}{8}} dy \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left(2\sqrt{2\pi}e^{-2\lambda^2}\right) \left(2\sqrt{2\pi}e^{-2\mu^2}\right) \end{aligned}$$

$$\implies W_0(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2}. \quad (74)$$

Ahora, si se quiere obtener $W(q, p)$, podría tomarse $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$ y se obtendría:

$$W_0(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-(q^2 + p^2)}. \quad (75)$$

Cabe mencionar que, esta ecuación difiere con la Ec. (68) debido a que, en este contexto se usa una normalización distinta (más útil en el contexto de la óptica cuántica) y se usa la convención de $\hbar = 1$, sin embargo, ambas son representaciones validas para $W(q, p)$.

Para $n = 1$, $L_1(x) = 1 - x^2$, por lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} W_0(\alpha) &= \frac{1}{4\pi^2} \int e^{i\lambda x} e^{i\mu y} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4})} \left(1 - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}\right)\right) dx dy \\ &= \frac{1}{4\pi^2} (I_1 + I_2 + I_3). \end{aligned}$$

En donde la primer integral es:

$$I_1 = \int e^{i\lambda x} e^{-\frac{x^2}{8}} dx \int e^{i\mu y} e^{-\frac{y^2}{8}} dy$$

$$= (2\sqrt{2\pi}e^{-2\lambda^2}) (2\sqrt{2\pi}e^{-2\mu^2})$$

$$I_1 = 8\pi e^{-2|\alpha|^2}.$$

La segunda será:

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{4} \int x^2 e^{i\lambda x} e^{-\frac{x^2}{8}} dx \int e^{i\mu y} e^{-\frac{y^2}{8}} dy \\ &= -\frac{1}{4} (8\sqrt{2\pi}e^{-2\lambda^2}(1 - 4\lambda^2)) (2\sqrt{2\pi}e^{-2\mu^2}) \\ I_2 &= -8\pi e^{-2\alpha^2}(1 - 4\lambda^2). \end{aligned}$$

Finalmente, de manera análoga a I_2 , la tercera resultará:

$$I_3 = -8\pi e^{-2\alpha^2} (1 - 4\mu^2)$$

Sumando las tres integrales, y simplificando términos, la función $W_1(\alpha)$ será tal que:

$$W_1(\alpha) = -\frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} (1 - 4|\alpha|^2).$$

$$W_1(q, p) = -\frac{2}{\pi} e^{-(q^2+p^2)} (1 - 2(q^2 + p^2)). \quad (76)$$

De manera semejante, para $n = 2$, el polinomio de Laguerre es $L_2(|\alpha|^2) = \frac{1}{2} ((|\alpha|^2)^2 - 4|\alpha|^2 + 2)$ y como $|\alpha|^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$, entonces:

$$L_2\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}\right) = \frac{x^4}{32} + \frac{x^2y^2}{16} + \frac{x^4}{32} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 1.$$

Por lo que, al sustituir esto en la Ec. 73, deberán resolverse 6 integrales. Una vez resueltas, sumadas y simplificando términos, se encuentra que:

$$W_2(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} (8(\lambda^4 + 2\lambda^2\mu^2 + \mu^4) - 8(\lambda^2 + \mu^2) + 1).$$

Estos tres resultados (para $n = 0, 1, 2$) también pueden relacionarse con los polinomios de Laguerre si se nota que, a diferencia de la ecuación 73, el argumento debe ser $4|\alpha|^2 = 2(q^2 + p^2)$, es decir, para este caso:

$$W_2(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} L_2(4|\alpha|^2).$$

$$W_2(q, p) = \frac{2}{\pi} e^{-(q^2+p^2)} L_2(2(q^2 + p^2)). \quad (77)$$

Sucesivamente, para el n -ésimo estado se tendrá que:

$$W_n(\alpha) = \frac{2}{\pi} (-1)^n e^{-2|\alpha|^2} L_n(4|\alpha|^2).$$

$$W_n(q, p) = \frac{2}{\pi} (-1)^n e^{-(q^2+p^2)} L_n(2(q^2 + p^2)). \quad (78)$$

E.2. Estados Coherentes

En esta sección se presenta con mayor detalle el procedimiento correspondiente al cálculo de la función de Wigner para estados coherentes.

E.2.1. Usando la función $\chi(\eta)$

Como se mencionó en la sección 5.2, es útil obtener una función de cuasiprobabilidad haciendo uso de la función característica; recordando que para el caso particular de la función de Wigner, esta función está relacionada con el ordenamiento simétrico de los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger (Ec. 51):

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\eta^* \alpha - \eta \alpha^*} \chi(\eta) d^2 \eta = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\eta^* \alpha - \eta \alpha^*} e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} \chi_N(\eta) d^2 \eta.$$

Pero, en una base de estados coherentes $|\beta\rangle$, la cual, aunque sus elementos no son ortogonales, es una base sobrecompleta, y por lo tanto $\int |\beta\rangle \langle \beta| d^2 \beta = \mathbb{I}$, entonces:

$$\chi_N(\eta) = \text{Tr}[\hat{\rho} e^{\eta \hat{a}^\dagger} e^{-\eta^* \hat{a}}] = \langle \beta | e^{\eta \hat{a}^\dagger} e^{-\eta^* \hat{a}} | \beta \rangle = e^{\eta \beta^* - \eta^* \beta}.$$

De manera que, al sustituirlo en la definición dada en la ecuación previa:

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= \frac{1}{\pi^2} \int e^{\eta^* \alpha - \eta \alpha^*} e^{\eta \beta^* - \eta^* \beta} e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} d^2 \eta \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int e^{\eta^* (\alpha - \beta) - \eta (\alpha^* - \beta^*) - \frac{1}{2}|\eta|^2} d^2 \eta. \end{aligned}$$

Existe una identidad para la resolución de una integral Gaussiana de este tipo, mencionada en la Ref. [9]:

$$\int e^{\eta x + \eta^* y - z |\eta|^2} d^2 \eta = \frac{\pi}{z} e^{\frac{xy}{z}}. \quad (79)$$

Si se identifica que:

$$x = \alpha - \beta, \quad y = -(\alpha^* - \beta^*), \quad z = \frac{1}{2},$$

entonces, al simplificar, se obtiene como resultado la ecuación 31:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha-\beta|^2}.$$

E.2.2. Usando la función de onda

Ahora se mostrarán los cálculos realizados para W_α usando la definición de la Ec. (1), a saber:

$$W(q, p) = \int \left\langle q + \frac{1}{2}y \left| \frac{\hat{p}}{2\pi\hbar} \right| q - \frac{1}{2}y \right\rangle e^{-ipy/\hbar} dy.$$

En la que se usará la función de onda de los estados coherentes dada por:

$$\psi_\alpha(x) = \left(\frac{1}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{1}{\pi\hbar}(x-\sqrt{2\hbar}\operatorname{Re}(\alpha))^2 + i\sqrt{\frac{2}{\hbar}}\operatorname{Im}(\alpha)x}. \quad (80)$$

Considerando $\alpha = \lambda + i\mu$, y $\hat{p} = |\beta\rangle\langle\beta|$, entonces:

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \psi_\alpha \left(q + \frac{y}{2} \right) \psi_\alpha^* \left(q - \frac{y}{2} \right) e^{-ipy/\hbar} dy, \quad (81)$$

el producto $\psi_\alpha \left(q + \frac{y}{2} \right) \psi_\alpha^* \left(q - \frac{y}{2} \right)$ del integrando es (haciendo $A = \frac{1}{\hbar}$):

$$\begin{aligned} & \psi_\alpha \left(q + \frac{y}{2} \right) \psi_\alpha^* \left(q - \frac{y}{2} \right) = \\ & = \sqrt{\frac{A}{\pi}} e^{-\frac{A}{2} \left(\left(q + \frac{y}{2} \right) - \sqrt{\frac{2}{A}}\lambda \right)^2 + i\sqrt{2A}\mu \left(q + \frac{y}{2} \right)} e^{-\frac{A}{2} \left(\left(q - \frac{y}{2} \right) - \sqrt{\frac{2}{A}}\lambda \right)^2 - i\sqrt{2A}\mu \left(q - \frac{y}{2} \right)}, \end{aligned} \quad (82)$$

pero el argumento de las exponenciales puede simplificarse:

$$\begin{aligned} & -\frac{A}{2} \left(\left(q + \frac{y}{2} \right) - \sqrt{\frac{2}{A}}\lambda \right)^2 + i\sqrt{2A}\mu \left(q + \frac{y}{2} \right) \\ & -\frac{A}{2} \left(\left(q - \frac{y}{2} \right) - \sqrt{\frac{2}{A}}\lambda \right)^2 - i\sqrt{2A}\mu \left(q - \frac{y}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= -A \left(q^2 + \frac{y^2}{4} - 2\sqrt{\frac{2}{A}}q\lambda + \frac{2\lambda^2}{A} \right) + i\sqrt{2A}\mu y,$$

por lo tanto, la integral puede escribirse como:

$$W_\alpha(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \sqrt{\frac{A}{\pi}} e^{-A\left(q^2 + \frac{y^2}{4} - 2\sqrt{\frac{2}{A}}q\lambda + \frac{2\lambda^2}{A}\right) + i\sqrt{2A}\mu y} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} dy.$$

Al resolverse se llega a:

$$W_\alpha(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{A}{\pi}} \left(2\sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-Aq^2 + 2\sqrt{2A}q\lambda - 2(\lambda^2 + \mu^2) - \frac{p^2}{A\hbar^2} + 2\sqrt{\frac{2}{A}}\frac{p\mu}{\hbar}} \right),$$

nuevamente, el argumento de la función exponencial puede simplificarse:

$$\begin{aligned} & -Aq^2 + 2\sqrt{2A}q\lambda - 2(\lambda^2 + \mu^2) - \frac{p^2}{A\hbar^2} + 2\sqrt{\frac{2}{A}}\frac{p\mu}{\hbar} \\ & = -A \left(q - \sqrt{\frac{2}{A}}\lambda \right)^2 - \frac{1}{A\hbar^2} (p - \sqrt{2A}\mu\hbar)^2. \end{aligned}$$

Por lo que, si se hacen $q_0 = \sqrt{\frac{2}{A}}\lambda$ y $p_0 = \sqrt{2A}\mu\hbar$, como $A = \frac{1}{\hbar}$, entonces:

$$W_\alpha(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar}((q-q_0)^2 + (p-p_0)^2)}. \quad (83)$$

E.3. Estados Comprimidos

Ahora es turno de mostrar el desarrollo para calcular la función de Wigner asociada a los estados comprimidos, los cuales, como se mencionó en la sección 4.3 son generados a partir de aplicar el operador $\hat{S}(\xi)$ a un estado de vacío.

Recordando que:

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\eta^* \alpha - \eta \alpha^*} \chi(\eta) d^2\eta.$$

Entonces, para $\hat{\rho} = |\xi\rangle\langle\xi|$ se tendrá, para este caso, que $\chi_\xi(\eta) = \langle\xi|\hat{D}(\eta)|\xi\rangle$, pero $|\xi\rangle = \hat{S}(\xi)|0\rangle$, y como $\hat{S}(\xi) = e^{\frac{1}{2}(\xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^\dagger)}$ entonces la función característica quedará como:

$$\chi_\xi(\eta) = \langle 0 | \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{D}(\eta) \hat{S}(\xi) | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{S}^\dagger(\xi) e^{\eta \hat{a}^\dagger - \eta^* \hat{a}} \hat{S}(\xi) | 0 \rangle.$$

Pero la acción de $\hat{S}(\xi)$ y $\hat{S}^\dagger(\xi)$ sobre los operadores de creación y aniquilación es dada por la Ec. (34), por lo tanto:

$$\begin{aligned} \hat{S}^\dagger(\xi) e^{\eta \hat{a}^\dagger - \eta^* \hat{a}} \hat{S}(\xi) &= \hat{D}_\xi \\ &= e^{\eta(\hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} e^{-i\theta} \sinh r) - \eta^*(\hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh r)} \\ &= e^{\eta_\xi \hat{a}^\dagger - \eta_\xi^* \hat{a}}, \end{aligned}$$

en donde $\eta_\xi(\eta) = \eta \cosh r + \eta^* e^{i\theta} \sinh r$, de manera que:

$$\begin{aligned} \chi_\xi(\eta) &= \langle 0 | e^{\eta_\xi \hat{a}^\dagger - \eta_\xi^* \hat{a}} | 0 \rangle = e^{-\frac{1}{2} |\eta_\xi|^2} \\ &= e^{-\frac{1}{2} (|\eta|^2 \cosh(2r) + \frac{1}{2} (\eta^2 e^{-i\theta} + (\eta^*)^2 e^{i\theta}) \sinh(2r))}. \end{aligned}$$

Así, si $\eta = \lambda + i\mu$, $\alpha = x + iy$ y se elige el caso en el que $\theta = 0$, entonces esta función puede simplificarse a:

$$\begin{aligned} \chi_\xi(\eta) &= e^{-\frac{1}{2} |\eta|^2 \cosh(2r) - \frac{1}{4} (\eta^2 e^{-i\theta} + (\eta^*)^2 e^{i\theta}) \sinh(2r)} \\ &= e^{-\frac{1}{2} (\lambda^2 + \mu^2) \cosh(2r) - \frac{1}{2} (\lambda^2 - \mu^2) \sinh(2r)} \\ &= e^{-\frac{1}{2} (\lambda^2 e^{2r} + \mu^2 e^{-2r})}. \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que $\eta^* \alpha - \eta \alpha^* = i2(\lambda y - \mu x)$, entonces la función de Wigner se calcula como:

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= \frac{1}{\pi^2} \int e^{i2(\lambda y - \mu x)} e^{-\frac{1}{2} (\lambda^2 e^{2r} + \mu^2 e^{-2r})} d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int e^{i2\lambda y} e^{-\frac{1}{2} \lambda^2 e^{2r}} d\lambda \int e^{-i2\mu x} e^{-\frac{1}{2} \mu^2 e^{-2r}} d\mu \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(e^{-r - 2e^{-2r} y^2} \sqrt{2\pi} \right) \left(e^{r - 2e^{2r} x^2} \sqrt{2\pi} \right). \\ \implies W_\xi(\alpha) &= \frac{2}{\pi} e^{-2(e^{2r} x^2 - e^{-2r} y^2)}. \end{aligned} \tag{84}$$

Aquí se ha presentado un desarrollo algebraico para obtener la función $W_\xi(\alpha)$, sin embargo, existe una forma más simple de llegar a este

resultado, el cual es a través de considerar que el operador $\hat{S}(\xi)$ reescalía la función de onda de acuerdo con $\psi_\xi(q) = e^{\xi/2}\psi_0(e^\xi q)$ (Ec. 37), entonces, para la definición dada en la Ec. (1) se tendrá que:

$$\begin{aligned} W_\xi(q, p) &= \int \left\langle q + \frac{1}{2}y \left| \hat{S} \frac{\hat{\rho}}{2\pi\hbar} \hat{S}^\dagger \right| q - \frac{1}{2}y \right\rangle e^{-ipy/\hbar} dy \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int \left\langle e^\xi \left(q + \frac{1}{2}y \right) \left| \hat{\rho} \right| e^\xi \left(q - \frac{1}{2}y \right) \right\rangle e^\xi e^{-ipy/\hbar} dy. \end{aligned}$$

Es decir: $W_\xi(q, p) = W_0(e^\xi q, e^{-\xi} p)$, con lo que, usando el resultado de la ecuación 23 se tendrá:

$$W_\xi(q, p) = \frac{2}{\pi} e^{-(e^{2\xi} q^2 + e^{-2\xi} p^2)}. \quad (85)$$

E.4. Estados de Gato de Schrödinger

Finalmente, llega el turno de calcular la función de Wigner asociada a los estados del tipo de gato de Schrödinger. Para esto es conveniente recordar la función de onda de un estado coherente coherente $|\alpha\rangle$, así, nuevamente haciendo $A = \frac{1}{\hbar}$:

$$\psi_\alpha(q) = \left(\frac{A^2}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{A^2}{2} \left(q - \frac{\lambda}{A} \right)^2 + iA\mu q}.$$

Mientras que para el caso en que el estado sea $|-\alpha\rangle$ se tendrá:

$$\psi_{-\alpha}(q) = \left(\frac{A^2}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{A^2}{2} \left(q + \frac{\lambda}{A} \right)^2 - iA\mu q}.$$

Ahora, este tipo de estados, los cuales se denotarán como $|\Psi\rangle$, tienen la particularidad de que:

$$|\Psi\rangle = |\alpha\rangle + |-\alpha\rangle \implies \Psi(q) = \psi_\alpha(q) + \psi_{-\alpha}(q).$$

De esta manera, su función de Wigner asociada será tal que:

$$W_{\Psi}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \Psi\left(q + \frac{y}{2}\right) \Psi^*\left(q - \frac{y}{2}\right) e^{-ipy/\hbar} dy.$$

Por lo tanto, en el integrando apareceran las funciones de onda:

$$\begin{aligned} & \Psi\left(q + \frac{y}{2}\right) \Psi^*\left(q - \frac{y}{2}\right) \\ &= \left(\psi_{\alpha}\left(q + \frac{y}{2}\right) + \psi_{-\alpha}\left(q - \frac{y}{2}\right) \right) \left(\psi_{\alpha}^*\left(q + \frac{y}{2}\right) + \psi_{-\alpha}^*\left(q - \frac{y}{2}\right) \right) \\ &= \psi_{\alpha}\left(q + \frac{y}{2}\right) \psi_{\alpha}^*\left(q - \frac{y}{2}\right) + \psi_{\alpha}\left(q + \frac{y}{2}\right) \psi_{-\alpha}^*\left(q - \frac{y}{2}\right) \\ & \quad + \psi_{-\alpha}\left(q + \frac{y}{2}\right) \psi_{\alpha}^*\left(q - \frac{y}{2}\right) + \psi_{-\alpha}\left(q + \frac{y}{2}\right) \psi_{-\alpha}^*\left(q - \frac{y}{2}\right) \\ \implies & W_{\Psi}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \left(\psi_{\alpha}\left(q + \frac{y}{2}\right) \psi_{\alpha}^*\left(q - \frac{y}{2}\right) + \psi_{\alpha}\left(q + \frac{y}{2}\right) \psi_{-\alpha}^*\left(q - \frac{y}{2}\right) \right. \\ & \quad \left. + \psi_{-\alpha}\left(q + \frac{y}{2}\right) \psi_{\alpha}^*\left(q - \frac{y}{2}\right) + \psi_{-\alpha}\left(q + \frac{y}{2}\right) \psi_{-\alpha}^*\left(q - \frac{y}{2}\right) \right) e^{-ipy/\hbar} dy. \end{aligned}$$

De esta relación puede identificarse que, para los sumandos que contienen los subíndices α y $-\alpha$ se obtienen directamente las funciones de Wigner:

$$\begin{aligned} W_{\alpha}(q, p) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int \psi_{\alpha}\left(q + \frac{y}{2}\right) \psi_{\alpha}^*\left(q - \frac{y}{2}\right) e^{-ipy/\hbar} dy \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar}((q-q_0)^2 + (p-p_0)^2)}, \end{aligned} \tag{86}$$

$$\begin{aligned} W_{-\alpha}(q, p) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int \psi_{-\alpha}\left(q + \frac{y}{2}\right) \psi_{-\alpha}^*\left(q - \frac{y}{2}\right) e^{-ipy/\hbar} dy \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar}((q+q_0)^2 + (p+p_0)^2)}. \end{aligned} \tag{87}$$

Mientras que los dos sumandos restantes (los términos cruzados) se pueden identificar con la interferencia cuántica particular de los estados del tipo de gato de Schrödinger, así, su función de Wigner asociada será:

$$W_{int} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \left(\psi_\alpha \left(q + \frac{y}{2} \right) \psi_{-\alpha}^* \left(q - \frac{y}{2} \right) + \psi_{-\alpha} \left(q + \frac{y}{2} \right) \psi_\alpha^* \left(q - \frac{y}{2} \right) \right) e^{-ipy/\hbar} dy.$$

El producto de las funciones de onda del primer sumando es:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha \left(q + \frac{y}{2} \right) \psi_{-\alpha}^* \left(q - \frac{y}{2} \right) &= \frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{A^2}{2} \left(\left(q + \frac{y}{2} \right) - \frac{\lambda}{A} \right)^2 + iA\mu \left(q + \frac{y}{2} \right)} \\ &\quad \times e^{-\frac{A^2}{2} \left(\left(q - \frac{y}{2} \right) + \frac{\lambda}{A} \right)^2 + iA\mu \left(q - \frac{y}{2} \right)} \\ &= \frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{-A^2 \left(q^2 + \left(\frac{y}{2} - \frac{\lambda}{A} \right)^2 \right) + i2A\mu q}, \end{aligned}$$

mientras que para el segundo se tendrá:

$$\begin{aligned} \psi_{-\alpha} \left(q + \frac{y}{2} \right) \psi_\alpha^* \left(q - \frac{y}{2} \right) &= \frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{A^2}{2} \left(\left(q + \frac{y}{2} \right) + \frac{\lambda}{A} \right)^2 - iA\mu \left(q + \frac{y}{2} \right)} \\ &\quad \times e^{-\frac{A^2}{2} \left(\left(q - \frac{y}{2} \right) - \frac{\lambda}{A} \right)^2 - iA\mu \left(q - \frac{y}{2} \right)} \\ &= \frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{-A^2 \left(q^2 + \left(\frac{y}{2} + \frac{\lambda}{A} \right)^2 \right) - i2A\mu q}. \end{aligned}$$

Ahora, dado que $W_{int}(q, p)$ está conformada por una suma de dos productos de funciones de onda, entonces se tendrán 2 integrales que resolver, las cuales serán:

$$\begin{aligned} W_{int1}(q, p) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int \psi_\alpha \left(q + \frac{y}{2} \right) \psi_{-\alpha}^* \left(q - \frac{y}{2} \right) e^{-ipy/\hbar} dy \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int \frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{-A^2 \left(q^2 + \left(\frac{y}{2} - \frac{\lambda}{A} \right)^2 \right)} e^{i(2A\mu q - py/\hbar)} dy \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \left(\frac{A}{\sqrt{\pi}} \right) \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{A} \right) e^{-\left(\left(\frac{p}{A\hbar} \right)^2 + A^2 q^2 + i2 \left(\frac{p\lambda}{A\hbar} - A\mu q \right) \right)} \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} e^{-\left(A^2 q^2 + \left(\frac{p}{A\hbar} \right)^2 + i \left(\frac{p\lambda}{A\hbar} - A\mu q \right) \right)}, \end{aligned} \tag{88}$$

y para la segunda integral:

$$\begin{aligned}
W_{int_2}(q, p) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int \psi_{-\alpha} \left(q + \frac{y}{2} \right) \psi_{\alpha}^* \left(q - \frac{y}{2} \right) e^{-ipy/\hbar} dy \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \int \frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{-A^2 \left(q^2 + \left(\frac{y}{2} + \frac{\lambda}{A} \right)^2 \right)} e^{-i(2A\mu q + py/\hbar)} dy \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \left(\frac{A}{\sqrt{\pi}} \right) \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{A} \right) e^{-\left(\left(\frac{p}{A\hbar} \right)^2 + A^2 q^2 - i2\left(\frac{p\lambda}{A\hbar} - A\mu q \right) \right)} \\
&= \frac{1}{\pi\hbar} e^{-\left(A^2 q^2 + \left(\frac{p}{A\hbar} \right)^2 - i\left(\frac{p\lambda}{A\hbar} - A\mu q \right) \right)}.
\end{aligned} \tag{89}$$

Entonces, al sumar estos resultados se obtiene que:

$$W_{int_1}(q, p) + W_{int_2}(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} e^{-\left(A^2 q^2 + \left(\frac{p}{A\hbar} \right)^2 \right)} \left(e^{-i2\left(\frac{p\lambda}{A\hbar} - A\mu q \right)} + e^{i2\left(\frac{p\lambda}{A\hbar} - A\mu q \right)} \right),$$

pero como $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$, entonces esto se simplifica a:

$$\begin{aligned}
W_{int}(q, p) &= W_{int_1}(q, p) + W_{int_2}(q, p) \\
&= \frac{2}{\pi\hbar} e^{-\left(A^2 q^2 + \left(\frac{p}{A\hbar} \right)^2 \right)} \cos \left(2 \left(\frac{p\lambda}{A\hbar} - A\mu q \right) \right),
\end{aligned} \tag{90}$$

por lo que, si se recuerda que $A = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}$, $q_0 = \frac{\lambda}{A}$ y $p_0 = A\mu\hbar$, entonces

$$\begin{aligned}
W_{int}(q, p) &= \frac{2}{\pi\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar}(q^2 + p^2)} \cos \left(\frac{2}{\sqrt{\hbar}} (p\lambda - \mu q) \right) \\
&= 2W_0(q, p) \cos \left(\frac{2}{\sqrt{\hbar}} (p\lambda - \mu q) \right).
\end{aligned} \tag{91}$$

finalmente, la función de Wigner de los estados de gato de Schrödinger es:

$$W_{\Psi}(q, p) = W_{\alpha}(q, p) + W_{-\alpha}(q, p) + W_{int}(q, p). \tag{92}$$

F. Evolución temporal

Partiendo de derivar la función de Wigner con respecto a t :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{-ipy/\hbar} \left(\frac{\partial \psi^*(q - y/2)}{\partial q} \psi(q + y/2) + \frac{\partial \psi(q + y/2)}{\partial q} \psi^*(q - y/2) \right) dy, \quad (93)$$

y considerando que de la ecuación de Schrödinger se tiene:

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar}{i2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{i\hbar} U(x) \psi(x, t),$$

entonces al sustituir y simplificar, se tendrá:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{-ipy/\hbar} \left[\frac{\hbar}{i2m} \left(\frac{\partial^2 \psi^*(q - \frac{y}{2})}{\partial q^2} \psi\left(q + \frac{y}{2}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial^2 \psi\left(q + \frac{y}{2}\right)}{\partial q^2} \psi^*\left(q - \frac{y}{2}\right) \right) + \frac{1}{i\hbar} \left(U\left(q + \frac{y}{2}\right) \psi\left(q + \frac{y}{2}\right) \psi^*\left(q - \frac{y}{2}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. - U\left(q - \frac{y}{2}\right) \psi\left(q + \frac{y}{2}\right) \psi^*\left(q - \frac{y}{2}\right) \right) \right] dy, \end{aligned}$$

pero esto se puede escribir como:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W_T}{\partial t} + \frac{\partial W_U}{\partial t},$$

en donde, debido a que $\hbar = \frac{\hbar}{2\pi}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_T}{\partial t} = & \frac{1}{i4\pi m} \int e^{-ipy/\hbar} \left(\frac{\partial^2 \psi^*(q - y/2)}{\partial q^2} \psi(q + y/2) \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 \psi(q + y/2)}{\partial q^2} \psi^*(q - y/2) \right) dy. \quad (94) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_U}{\partial t} = \frac{2\pi}{i\hbar^2} \int e^{-ipy/\hbar} & \left(U(q+y/2) - U(q-y/2) \right) \\ & \times \psi(q+y/2)\psi^*(q-y/2)dy. \quad (95)\end{aligned}$$

Pero se tiene:

$$\frac{\partial^2 \psi^*(q-y/2)}{\partial y \partial q} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi^*(q-y/2)}{\partial q^2}.$$

Por lo tanto, la integral del primer término de la Ec. (94) será:

$$\begin{aligned}\int e^{-ipy/\hbar} \frac{\partial^2 \psi^*(q-y/2)}{\partial q^2} \psi(q+y/2)dy \\ = -2 \int e^{-ipy/\hbar} \frac{\partial^2 \psi^*(q-y/2)}{\partial y \partial q} \psi(q+y/2)dy,\end{aligned}$$

al integrar por partes, el resultado de esta integral es:

$$\begin{aligned}-\frac{2ip}{\hbar} \int e^{-ipy/\hbar} \frac{\partial \psi^*(q-y/2)}{\partial q} \psi(q+y/2)dy \\ + \int e^{-ipy/\hbar} \frac{\partial \psi^*(q-y/2)}{\partial q} \frac{\partial \psi(q+y/2)}{\partial q} dy, \quad (96)\end{aligned}$$

ahora, para la integral del segundo término de la Ec. (94), dado que:

$$\frac{\partial^2 \psi(q+y/2)}{\partial y \partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(q+y/2)}{\partial q^2},$$

entonces:

$$\begin{aligned}\int e^{-ipy/\hbar} \frac{\partial^2 \psi(q+y/2)}{\partial q^2} \psi^*(q-y/2)dy \\ = 2 \int e^{-ipy/\hbar} \frac{\partial^2 \psi(q+y/2)}{\partial y \partial q} \psi^*(q-y/2)dy,\end{aligned}$$

al integrar por partes, el resultado de la integral será:

$$\begin{aligned}\frac{2ip}{\hbar} \int e^{-ipy/\hbar} \frac{\partial \psi(q+y/2)}{\partial q} \psi^*(q-y/2)dy \\ + \int e^{-ipy/\hbar} \frac{\partial \psi^*(q-y/2)}{\partial q} \frac{\partial \psi(q+y/2)}{\partial q} dy. \quad (97)\end{aligned}$$

Pero la Ec. (94) contiene una resta de integrales (omitiendo la constante $\frac{1}{i4\pi m}$), a saber:

$$\int e^{-ipy/\hbar} \frac{\partial^2 \psi^*(q - y/2)}{\partial q^2} \psi(q + y/2) dy - \int e^{-ipy/\hbar} \frac{\partial^2 \psi(q + y/2)}{\partial q^2} \psi^*(q - y/2) dy, \quad (98)$$

cuyos resultados están dados por las Ecs. (96), para la primera, y (97) para la segunda, de manera que al restarse se obtiene:

$$-\frac{2ip}{\hbar} \int e^{-ipy/\hbar} \left(\frac{\partial \psi^*(q - y/2)}{\partial q} \psi(q + y/2) + \frac{\partial \psi(q + y/2)}{\partial q} \psi^*(q - y/2) \right) dy,$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial W_T}{\partial t} = -\frac{i4\pi p}{\hbar} \frac{\partial}{\partial x} \int e^{-ipy/\hbar} \psi^* \left(q - \frac{y}{2} \right) \psi \left(q + \frac{y}{2} \right) dy = -\frac{p}{m} \frac{\partial W(q, p)}{\partial x}. \quad (99)$$

Por otra parte, si se considera que, de la Ec. (95), es posible desarrollar la función $U(x)$ en una serie de Taylor, de manera que:

$$U(q + y/2) = U(q) + \frac{y}{2} U'(q) + \frac{1}{2!} \left(\frac{y}{2} \right)^2 U''(q) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n U(q)}{\partial q^n} \left(\frac{y}{2} \right)^n,$$

$$U(q - y/2) = U(q) - \frac{y}{2} U'(q) + \frac{1}{2!} \left(\frac{y}{2} \right)^2 U''(q) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n U(q)}{\partial q^n} \left(-\frac{y}{2} \right)^n,$$

entonces:

$$U(q + y/2) - U(q - y/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n U(q)}{\partial q^n} \left(\left(\frac{y}{2} \right)^n - \left(-\frac{y}{2} \right)^n \right).$$

Pero de aquí puede notarse que, para n par, $(\frac{y}{2})^n - (-\frac{y}{2})^n = 0$, mientras que para n impar, los términos se suman, es decir, se obtiene $(\frac{y}{2})^n - (-\frac{y}{2})^n = 2(\frac{y}{2})^n$, por lo que se puede hacer $n = 2s + 1$, con lo que:

$$U(q + y/2) - U(q - y/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)!} \frac{\partial^{2s+1}U(q)}{\partial q^{2s+1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2s} y^{2s+1}.$$

Ahora, multiplicar n veces la función $e^{-ipy/\hbar}$ por y equivale a derivarla n veces con respecto a p , es decir:

$$y^n e^{-ipy/\hbar} = (i\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial p^n} e^{-ipy/\hbar},$$

así, considerando estos resultados y la condición que se obtuvo, los posibles valores que toma n , es decir $n = 2s+1$, y por lo tanto $(i\hbar)^{2s+1} = (-1)^s i\hbar^{2s+1}$, entonces la Ec. (95) será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_U}{\partial t} &= \frac{2\pi}{i\hbar^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s i\hbar^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{\partial^{2s+1}U(q)}{\partial q^{2s+1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2s} \\ &\quad \times \frac{\partial^{2s+1}}{\partial p^{2s+1}} \int e^{-ipy/\hbar} \psi^* \left(q - \frac{y}{2}\right) \psi \left(q + \frac{y}{2}\right) dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto, al considerar la definición de la función de Wigner (Ec. (1)) esto será:

$$= \sum_{s=0}^{\infty} (-\hbar^2)^s \frac{1}{(2s+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2s} \frac{\partial^{2s+1}U(q)}{\partial q^{2s+1}} \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{2s+1} W(q, p). \quad (100)$$

Esto conduce, finalmente, a que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(q, p)}{\partial t} &= -\frac{p}{m} \frac{\partial W(q, p)}{\partial x} \\ &+ \sum_{s=0}^{\infty} (-\hbar^2)^s \frac{1}{(2s+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2s} \frac{\partial^{2s+1}U(q)}{\partial q^{2s+1}} \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{2s+1} W(q, p). \quad (101) \end{aligned}$$

G. Códigos para las gráficas

En esta sección se comparten los códigos (escritos en Python) que se usaron para realizar las gráficas del presente trabajo. En general, las paqueterías que se han importado son las siguientes:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import hermite
from math import factorial
from scipy.special import genlaguerre
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from scipy.special import factorial
```

Figura 1: Función de onda para un estado de Fock.

```
# Función de onda para un estado de Fock
def funcionDeOnda_Fock(n, x):
    Hn = hermite(n)
    normalizacion = 1 / np.sqrt(np.pi) * 2**n * factorial(n)
    return normalizacion * Hn(x) * np.exp(-x**2 / 2)

x = np.linspace(-5, 5, 500)

# Graficar las funciones de onda para diferentes valores de n
plt.figure(figsize = (10, 6))
for n in range(4):
    psi_n = funcionDeOnda_Fock(n, x)
    plt.plot(x, psi_n, label = f'$n = {n}$')

plt.title("Función de onda $\psi_n(x)$ para los estados de Fock")
plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("$\psi_n(x)$")
plt.axhline(0, color = 'black', linewidth = 0.8, linestyle = '--')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Figura 2: Densidad de probabilidad de los estados de Fock.

```

# Función de onda en el espacio de posición
def funcionDeOnda_Fock(n, x):
    Hn = hermite(n)
    normalizacion = 1 / np.sqrt(np.sqrt(np.pi) * 2**n * factorial(n))
    return normalizacion * Hn(x) * np.exp(-x**2 / 2)

x = np.linspace(-5, 5, 500)

# Graficar las distribuciones de probabilidad para diferentes valores de n
plt.figure(figsize = (10, 6))
for n in range(4):
    psi_n = funcionDeOnda_Fock(n, x)
    plt.plot(x, psi_n**2, label = f'n = {n}$')

plt.title('Proyección de $|\psi(q)|^2$ sobre $q$')
plt.xlabel('$q$')
plt.ylabel('$|\psi(q)|^2$')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

```

Figura 3: Función de Wigner para estados de Fock en 2D.

```

plt.figure(figsize=(12, 8))

# Graficar en 2D para diferentes valores de n
for n in range(4):
    W = W_fock[n]
    plt.subplot(2, 2, n + 1)
    plt.contourf(Q, P, W, levels=100, cmap="inferno", vmin=W_min, vmax=W_max)
    plt.title(f"Función de Wigner para $| {n} \rangle$")
    plt.xlabel("$q$")
    plt.ylabel("$p$")
    plt.colorbar(label="$W(q, p)$")
    plt.axhline(0, color="black", linestyle="--", linewidth=0.5)
    plt.axvline(0, color="black", linestyle="--", linewidth=0.5)

plt.tight_layout()
plt.show()

```

Figura 4: Función de Wigner para estados de Fock en R3.

```

fig = plt.figure(figsize=(20, 20))

# Graficar en 3D para diferentes valores de n
for n in range(4):
    W = W_fock[n]

    ax = fig.add_subplot(2, 2, n + 1, projection='3d')
    surf = ax.plot_surface(Q, P, W, cmap="inferno", edgecolor='black',
                           lw=0.1, alpha=0.9, vmin=W_min, vmax=W_max)

    ax.set_title(f"Función de Wigner para ${n} \\\rangle $", fontsize=20)
    ax.set_xlabel("$q$", fontsize=18)
    ax.set_ylabel("$p$", fontsize=18)
    ax.set_zlabel("$W(q, p)$", fontsize=18)
    if n == 0 or n == 2:
        ax.view_init(15, 210) # Ángulo de vista
    if n == 1 or n == 3:
        ax.view_init(15, 210) # Ángulo de vista

plt.tight_layout()
plt.show()

```

Figura 5: Distribución de probabilidades de un estado coherente en la base de Fock.

```

# Distribución de probabilidades en la base de Fock
def coherent_fock_distribution(alpha, n_max):
    n = np.arange(n_max + 1)
    probabilidades = np.abs(alpha**n / np.sqrt(factorial(n)))**2 * np.exp(-np.abs(alpha)**2)
    return n, probabilidades

# Parámetros del estado coherente
alpha = 4
n_max = 35

n, probabilidades = coherent_fock_distribution(alpha, n_max)

plt.figure(figsize = (10, 6))
plt.bar(n, probabilidades, color = "blue", alpha = 0.7, edgecolor = "black")
plt.title("Distribución de probabilidades en la base de Fock para ${alpha} \\\rangle$")
plt.xlabel("$n$")
plt.ylabel("$P(n)$")
plt.xlim(0, n_max)
plt.show()

```

Figura 6: Función de Wigner para un estado coherente desplazado.

```

def wigner_fock_state(n, q, p):
    alpha_squared = q**2 + p**2
    Ln = genlaguerre(n, 0)
    W = (2 / np.pi) * ((-1)**n) * Ln(4 * alpha_squared) * np.exp(-2 * alpha_squared)
    return W

def wigner_coherent(q, p, beta_re, beta_im):
    alpha_sq = (q - beta_re)**2 + (p - beta_im)**2
    return (2 / np.pi) * np.exp(-2 * alpha_sq)

def wigner_squeezed(q, p, r, theta):
    X1 = q * np.cos(theta) + p * np.sin(theta)
    X2 = -q * np.sin(theta) + p * np.cos(theta)
    return (2 / np.pi) * np.exp(-0.5 * (X1**2 * np.exp(-2 * r) + X2**2 * np.exp(2 * r)))

q = np.linspace(-3, 3, 1000)
p = np.linspace(-3, 3, 1000)
Q, P = np.meshgrid(q, p)

W_fock = [wigner_fock_state(n, Q, P) for n in range(4)]
W_coherent = [wigner_coherent(Q, P, beta_re, beta_im)
               for beta_re, beta_im in [(0, 0), (1, 1), (-1, 2), (2, -1)]]
W_squeezed = [wigner_squeezed(Q, P, 0.7, np.pi)]

W_min = min(W.min() for W in W_fock + W_coherent + W_squeezed)
W_max = max(W.max() for W in W_fock + W_coherent + W_squeezed)

W = W_coherent[1]

fig = plt.figure(figsize=(16, 7))

# Gráfica 2D
ax1 = fig.add_subplot(1, 2, 1)
contour = ax1.contourf(Q, P, W, levels=100, cmap="seismic", vmin=W_min, vmax=W_max)
ax1.set_xlabel("$q$", fontsize=23)
ax1.set_ylabel("$p$", fontsize=23)
ax1.axhline(0, color="black", linestyle="--", linewidth=0.5)
ax1.axvline(0, color="black", linestyle="--", linewidth=0.5)

# Gráfica 3D
ax2 = fig.add_axes([0.3, 0, 0.9, 1.1], projection='3d')
surf = ax2.plot_surface(Q, P, W, cmap="seismic", edgecolor="black", lw=0.1, alpha=0.9,
                        vmin=W_min, vmax=W_max)
ax2.set_xlabel("$q$", fontsize=23)
ax2.set_ylabel("$p$", fontsize=23)
ax2.set_zlabel("$W(q, p)$", fontsize=23)
ax2.view_init(15, 260)

text1 = 'Función de Wigner para un estado coherente desplazado a $(1,1)$'

fig.suptitle(text1, fontsize=23)
fig.subplots_adjust(bottom=0.2, wspace=0.3)
cbar_ax = fig.add_axes([0.2, 0.05, 0.6, 0.03])
cbar_ax.set_xlabel("$W(q, p)$", fontsize=14)
fig.colorbar(surf, cax=cbar_ax, orientation='horizontal', label="$W(q, p)$")

plt.show()

```

Figura 7: Función de Wigner para un estado comprimido.

```

def wigner_fock_state(n, q, p):
    alpha_squared = q**2 + p**2
    Ln = genlaguerre(n, 0)
    W = (2 / np.pi) * ((-1)**n) * Ln(4 * alpha_squared) * np.exp(-2 * alpha_squared)
    return W

def wigner_coherent(q, p, beta_re, beta_im):
    alpha_sq = (q - beta_re)**2 + (p - beta_im)**2
    return (2 / np.pi) * np.exp(-2 * alpha_sq)

def wigner_squeezed(q, p, r, theta):
    X1 = q * np.cos(theta) + p * np.sin(theta)
    X2 = -q * np.sin(theta) + p * np.cos(theta)
    return (2 / np.pi) * np.exp(-0.5 * (X1**2 * np.exp(-2 * r) + X2**2 * np.exp(2 * r)))

q = np.linspace(-6, 6, 600)
p = np.linspace(-6, 6, 600)
Q, P = np.meshgrid(q, p)

W_fock = [wigner_fock_state(n, Q, P) for n in range(4)]
W_coherent = [wigner_coherent(Q, P, beta_re, beta_im)
               for beta_re, beta_im in [(0, 0), (1, 1), (-1, 2), (2, -1)]]
W_squeezed = [wigner_squeezed(Q, P, 0.7, np.pi)]

W_min = min(W.min() for W in W_fock + W_coherent + W_squeezed)
W_max = max(W.max() for W in W_fock + W_coherent + W_squeezed)

W = W_squeezed[0]

fig = plt.figure(figsize=(16, 7))

# Gráfica 2D
ax1 = fig.add_subplot(1, 2, 1)
contour = ax1.contourf(Q, P, W, levels=100, cmap="seismic", vmin=W_min, vmax=W_max)
ax1.set_xlabel("$q$", fontsize=23)
ax1.set_ylabel("$p$", fontsize=23)
ax1.axhline(0, color="black", linestyle="--", linewidth=0.5)
ax1.axvline(0, color="black", linestyle="--", linewidth=0.5)

# Gráfica 3D
ax2 = fig.add_axes([0.3, 0, 0.9, 1.1], projection='3d')
surf = ax2.plot_surface(Q, P, W, cmap="seismic", edgecolor="black", lw=0.1, alpha=0.9,
                        vmin=W_min, vmax=W_max)
ax2.set_xlabel("$q$", fontsize=23)
ax2.set_ylabel("$p$", fontsize=23)
ax2.set_zlabel("$W(q, p)$", fontsize=23)
ax2.view_init(15, 30)

fig.suptitle('Función de Wigner para un estado comprimido', fontsize=23)
fig.subplots_adjust(bottom=0.2, wspace=0.3)
cbar_ax = fig.add_axes([0.2, 0.05, 0.6, 0.03])
cbar_ax.set_xlabel("$W(q, p)$", fontsize=14)
fig.colorbar(surf, cax=cbar_ax, orientation='horizontal', label="$W(q, p)$")

plt.show()

```

Figura 8: Función de Wigner para un estado de gato de Schrödinger.

```

def wigner_fock_state(n, q, p):
    alpha_squared = q**2 + p**2
    Ln = genlaguerre(n, 0)
    W = (2 / np.pi) * ((-1)**n) * Ln(4 * alpha_squared) * np.exp(-2 * alpha_squared)
    return W

def wigner_coherent(q, p, beta_re, beta_im):
    alpha_sq = (q - beta_re)**2 + (p - beta_im)**2
    return (2 / np.pi) * np.exp(-2 * alpha_sq)

def wigner_squeezed(q, p, r, theta):
    X1 = q * np.cos(theta) + p * np.sin(theta)
    X2 = -q * np.sin(theta) + p * np.cos(theta)
    return (2 / np.pi) * np.exp(-0.5 * (X1**2 * np.exp(-2 * r) + X2**2 * np.exp(2 * r)))

def W_Pos(q, p, q0, p0):
    alpha_sq = (q-q0)**2 + (p-p0)**2
    return (1 / np.pi) * np.exp(-2*alpha_sq)

def W_Neg(q, p, q0, p0):
    alpha_sq = (q+q0)**2 + (p+p0)**2
    return (1 / np.pi) * np.exp(-2*alpha_sq)

def W_int(q, p, q0, p0):
    arg_cos = 2 * (p*q0 - q*p0)
    return (2 / np.pi) * np.exp(-2*(q**2 + p**2)) * np.cos(arg_cos)

q = np.linspace(-6, 6, 600)
p = np.linspace(-6, 6, 600)
Q, P = np.meshgrid(q, p)

q0 = 3.0
p0 = 3.0

W_fock = [wigner_fock_state(n, Q, P) for n in range(4)]
W_coherent = [wigner_coherent(Q, P, beta_re, beta_im)
              for beta_re, beta_im in [(0, 0), (1, 1), (-1, 2), (2, -1)]]
W_squeezed = [wigner_squeezed(Q, P, 0.7, np.pi)]
W_cat = W_Pos(Q, P, q0, p0) + W_Neg(Q, P, q0, p0) + W_int(Q, P, q0, p0)

W_min = min(W.min() for W in W_fock + W_coherent + W_squeezed)
W_max = max(W.max() for W in W_fock + W_coherent + W_squeezed)

W = W_cat

fig = plt.figure(figsize=(16, 7))

# Gráfica 2D
ax1 = fig.add_subplot(1, 2, 1)
contour = ax1.contourf(Q, P, W, levels=100, cmap="seismic", vmin=W_min, vmax=W_max)
ax1.set_xlabel("$q$)", fontsize=23)
ax1.set_ylabel("$p$)", fontsize=23)
ax1.axhline(0, color="black", linestyle="--", linewidth=0.5)
ax1.axvline(0, color="black", linestyle="--", linewidth=0.5)

# Gráfica 3D
ax2 = fig.add_axes([0.3, 0, 0.9, 1.1], projection='3d')
surf = ax2.plot_surface(Q, P, W, cmap="seismic", edgecolor="black", lw=0.1, alpha=0.9,
                        vmin=W_min, vmax=W_max)

```

```

ax2.set_xlabel("$q$", fontsize=23)
ax2.set_ylabel("$p$", fontsize=23)
ax2.set_zlabel("$W(q, p)$", fontsize=23)
ax2.view_init(15, 30)

fig.suptitle('Función de Wigner para un estado de gato de Schrödinger', fontsize=23)
fig.subplots_adjust(bottom=0.2, wspace=0.3)
cbar_ax = fig.add_axes([0.2, 0.05, 0.6, 0.03])
cbar_ax.set_xlabel("$W(q, p)$", fontsize=14)
fig.colorbar(surf, cax=cbar_ax, orientation='horizontal', label="$W(q, p)$")

plt.show()

```

Referencias

- [1] Jonathan S. Ben-Benjamin, Moochan B. Kim, Wolfgang P. Schleich, William B. Case, and Leon Cohen. Working in phase-space with wigner and weyl. *Fortschr. Phys.*, 65(6-8):1600092, 2017.
- [2] W. P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. Wiley-VCH, Weinheim, 2001.
- [3] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, and E. P. Wigner. Distribution functions in physics: Fundamentals. *Phys. Rep.*, 106(3):121–167, 1984.
- [4] W. B. Case. Wigner functions and weyl transforms for pedestrians. *Am. J. Phys.*, 76(10):937–946, 2008.
- [5] Antoine Royer. Wigner function as the expectation value of a parity operator. *Phys. Rev. A*, 15:449–450, Feb 1977.
- [6] K. Wódkiewicz. Nonlocality of the schrödinger cat. *New J. Phys.*, 2:21.1–21.8, 2000.
- [7] L. de la Peña. *Introducción a la mecánica cuántica*. Fondo de Cultura Económica, Ciudad de México, 3 edition, 2006.
- [8] C. C. Gerry and P. L. Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [9] D. F. Walls and G. J. Milburn. *Quantum Optics*. Springer, Berlin, 2 edition, 2008.
- [10] U. Leonhardt. *Measuring the Quantum State of Light*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [11] David J. Griffiths and Darrell F. Schroeter. *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 3 edition, 2018.
- [12] K. E. Cahill and R. J. Glauber. Density operators and quasiprobability distributions. *Phys. Rev.*, 177(5):1882–1902, 1969.
- [13] J. E. Moyal. Quantum mechanics as a statistical theory. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 45:99–124, 1949.