UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Posgrado en Ciencias (Física)

Propuesta de Investigación Doctoral

Fenómenos fuera de equilibrio en sistemas multimodo espín-bosón

Propuesto por: **M. en C. Ricardo Herrera Romero**

Matrícula: **2221801209**

Para sustentar el **Examen Predoctoral**

Asesor: **Dr. Miguel Angel Bastarrachea Magnani**

Coordinador: **Dr. Orlando Guzmán López**

05 de noviembre de 2025

Iztapalapa, Ciudad de México

Índice

1. Introducción **2**
1.1. Sistemas abiertos y dinámica fuera del equilibrio 5
1.2. Modelos de interacción espín–bosón en sistemas abiertos y fuera del equilibrio 6

2. Objetivos **6**

3. Metodología **7**
3.1. Diagonalización numérica exacta y análisis espectral 7
3.2. Aproximaciones analíticas: del régimen adiabático a la GRWA 8
3.3. Métodos para sistemas multimodo y no markovianos 9
3.4. Extensión a sistemas abiertos y fuera del equilibrio 10

4. Resultados esperados **10**

5. Avances **11**
5.1. Modelo de Rabi de dos qubits con interacciones qubit-qubit 11
5.2. Estudio de técnicas para dinámicas no markovianas en átomos gigantes . 15

6. Bibliografía **15**

7. Calendario de actividades **20**

1. Introducción

Los modelos de interacción espín–bosón describen cómo los sistemas cuánticos intercambian energía e información con su entorno mediante el acoplamiento entre grados de libertad discretos y continuos [1].El término “espín” alude a sistemas con un número finito de niveles, en particular a los de dos niveles —como átomos, qubits superconductores [2] o puntos cuánticos [3]—, mientras que “bosón” se refiere a modos del campo electromagnético (fotones) [4], vibraciones en redes cristalinas (fonones) [5] o excitaciones colectivas en otros medios.

Históricamente, el concepto de acoplamiento espín–bosón surgió de forma paralela en distintas ramas de la física. En la década de 1950, en física del estado sólido, se investigó cómo las vibraciones atómicas (fonones) afectaban a las impurezas en cristales [6]. Posteriormente, el modelo fue adoptado en óptica cuántica [4] y en física atómica [7] para describir la interacción entre átomos y el campo electromagnético. La denominación formal de “modelo espín–bosón” se consolidó en los años setenta y ochenta [1, 5], cuando se reconoció que estos problemas, pese a su diversidad física, compartían una estructura algebraica común: sistemas con grados de libertad discretos acoplados a osciladores bosónicos. El origen de estos desarrollos puede rastrearse hasta el trabajo de Isidor Isaac Rabi, quien en 1936 propuso un modelo cuántico para describir el acoplamiento coherente entre un átomo de dos niveles y un modo del campo electromagnético [8].

El átomo en una aproximación de dos niveles —equivalente a un qubit— se describe mediante un estado base y un excitado $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ cuya dinámica está gobernada por el álgebra de Pauli (es decir, la de SU(2) para espín $1/2$) $\{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$, que satisface las relaciones de conmutación $[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\,\epsilon_{ijk}\,\hat{\sigma}_k$. El campo electromagnético, por su parte, se representa mediante un oscilador armónico con operadores de creación y aniquilación $\hat{a}^\dagger$ y $\hat{a}$, que obedecen el álgebra de Heisenberg-Weyl $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. El Hamiltoniano correspondiente es

$$\hat{H}_{\text{Rabi}} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + g\left(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-\right)\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right), \tag{1.1}$$

donde ω es la frecuencia del modo del campo, ω_0 la separación energética entre los niveles atómicos y g el parámetro de acoplamiento. Los operadores $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$ y $\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$ describen las transiciones de excitación y desexcitación, respectivamente, mientras que $\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ expresa la diferencia de población. Además, $\hat{\sigma}_\pm = (\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y)/2$ siendo los operadores escalera. Los términos rotantes $(\hat{\sigma}_-\hat{a} + \hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger)$ representan procesos que conservan el número total de excitaciones: la emisión o absorción de un fotón acompañada de una transición atómica. Al aplicar la aproximación de onda rotante (*Rotating Wave Approximation* o RWA) [9], se eliminan los términos contrarrotantes $(\hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_-\hat{a})$, válida solo en el régimen de acoplamiento débil $(g \ll \omega, \omega_0)$. Esta aproximación conduce al modelo de Jaynes–Cummings [4], que describe analíticamente el intercambio coherente de energía entre el qubit y el campo [10]. Los avances experimentales recientes han permitido explorar los regímenes ultrafuerte $(g/\omega \gtrsim 0.1)$ y fuerte profundo $(g/\omega \gtrsim 1)$, donde la RWA deja de ser válida [11].

Un paso natural para extender el modelo es considerar varios qubits acoplados colectiva-

mente a un mismo modo del campo. El caso de dos qubits [12] se describe mediante:

$$\hat{H}_{\text{Rabi dos qubits}} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_{01}}{2}\hat{\sigma}_z^1 + \frac{\omega_{02}}{2}\hat{\sigma}_z^2 + \frac{g}{2}\left(\hat{\sigma}_x^1 + \hat{\sigma}_x^2\right)(\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \tag{1.2}$$

Aquí, los estados de los dos qubits pueden escribirse en la base de espín total $|J, M\rangle$ [13], que separa un subespacio simétrico triplete ($J = 1$) y un singlete antisimétrico ($J = 0$). Cuando las frecuencias atómicas son similares $\omega_{01} \approx \omega_{02}$, el sistema es invariante bajo permutación y puede describirse dentro del subespacio simétrico $J = 1$. En esta representación, los operadores individuales se reemplazan por operadores de pseudoespín colectivos $\hat{J}_\alpha^{1,2} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_\alpha^1 + \hat{\sigma}_\alpha^2)$, obteniendo:

$$\hat{H}_{\text{Rabi dos qubits}} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z^{1,2} + g\hat{J}_x^{1,2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \eta_x\left(\hat{J}_x^{1,2}\right)^2 + \eta_z\left(\hat{J}_z^{1,2}\right)^2. \tag{1.3}$$

Estos operadores satisfacen el álgebra $\mathrm{SU}(2)$ y permiten tratar el conjunto de qubits como una entidad efectiva con espín $J = 1$. Los términos $\eta_z(\hat{J}_z^{1,2})^2$ y $\eta_x(\hat{J}_x^{1,2})^2$ generan interacciones efectivas entre los qubits que determinan cómo se correlacionan y cooperan entre sí. El componente longitudinal, $\eta_z(\hat{J}_z^{1,2})^2$, actúa como una interacción tipo *Ising* [14]. Físicamente, esto significa que cada qubit "siente" el estado del otro: si $\eta_z < 0$, ambos tienden a alinearse en la misma dirección del eje z, como pequeños imanes que se atraen. Si $\eta_z > 0$, ocurre lo contrario: prefieren orientarse de forma opuesta, generando correlaciones de tipo antiferromagnético. Por su parte, el término transversal $\eta_x(\hat{J}_x^{1,2})^2$ introduce una interacción de intercambio coherente [15, 16]. En este caso, un qubit puede transferir parte de su excitación al otro, lo que se traduce en oscilaciones colectivas y en la formación de estados entrelazados.

La generalización a N qubits con interacciones entre ellos y múltiples modos del campo [17] conduce al modelo de Dicke multimodo con interacciones:

$$\hat{H}_{\text{General}} = \sum_k \left(\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z^j + \sum_k \frac{g_k}{\sqrt{N}}\hat{\sigma}_x^j\left(\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k\right)\right] + \frac{1}{N}\sum_{i=x,y,z}\eta_i \hat{\sigma}_i^j \hat{\sigma}_i^j\right). \tag{1.4}$$

Esta extensión no solo busca incluir más grados de libertad, sino capturar la compleja competencia entre coherencia, correlaciones y acoplamiento colectivo [18]. El desafío aquí es formular una descripción suficientemente general que unifique los distintos regímenes de interacción y permita identificar fenómenos nuevos que surgen más allá de los límites tradicionales del modelo de Dicke [19].

Bajo la aproximación de onda larga [20], donde todos los qubits interactúan de manera idéntica con el campo, el Hamiltoniano puede reescribirse como:

$$\hat{H}_{\text{Dicke}} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{2g}{\sqrt{N}}\hat{J}_x(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \frac{1}{N}\sum_{i=x,y,z}\eta_i \hat{J}_i^2. \tag{1.5}$$

El modelo de Dicke predice transiciones de fase cuánticas (*Quantum Phase Transitions* o QPT) [14, 21] y transiciones de fase cuánticas en estados excitados (*Excited State Quantum Phase Transitions* o ESQPT) [22]. Las QPT ocurren a temperatura cero y corresponden a

cambios abruptos en la estructura del estado base cuando un parámetro del Hamiltoniano, como el acoplamiento luz–materia, supera un valor crítico [23]. Las ESQPT extienden este concepto a niveles excitados, distinguiendo entre distintos regímenes dinámicos del espectro [24]. En el régimen normal, el campo bosónico no presenta fotones promedio, mientras que al cruzar el acoplamiento crítico el sistema entra en la fase superradiante, caracterizada por una emisión colectiva coherente y una ocupación macroscópica del modo del campo [25]. Esta colectividad surge porque los qubits se acoplan de manera indistinguible al mismo modo del campo, comportándose como un único pseudoespín total que amplifica la respuesta conjunta del sistema [18]. El fenómeno ha sido observado experimentalmente en circuitos superconductores [2] y en cavidades ópticas con gases atómicos [26].

Se puede generalizar el modelo de Dicke de tal suerte que los términos rotantes y contrarrotantes se ponderan de manera desigual mediante un parámetro de anisotropía ξ [27]:

$$\hat{H}_{\text{Anisotrópico}} = \omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \omega_0\hat{J}_z + \frac{\gamma}{\sqrt{N}}\left[\hat{a}\hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{J}_- + \xi\left(\hat{a}\hat{J}_- + \hat{a}^\dagger\hat{J}_+\right)\right] + \frac{1}{N}\sum_{i=x,y,z}\eta_i\hat{J}_i^2. \tag{1.6}$$

En mi trabajo de maestría estudié el Hamiltoniano (1.6), analizando su diagrama de fases y la aparición de QPT y ESQPT [28]. Posteriormente identifiqué los modos de excitación colectiva del sistema [29].

Los llamados átomos gigantes [30] son una extensión natural de los modelos espín–bosón, como los de Rabi y Dicke. En lugar de acoplarse a un solo punto del campo electromagnético, estos sistemas permiten que un único qubit o átomo artificial interactúe con el mismo campo en varios puntos del espacio. Esa simple diferencia cambia por completo la física del sistema: las señales del campo que llegan a cada punto pueden interferir entre sí, provocando retardos y patrones de acoplamiento que dependen de la distancia entre las conexiones. Como resultado, aparecen efectos no locales y nuevas estructuras en el espectro [31]. En la práctica, los átomos gigantes se implementan sobre todo en circuitos superconductores, donde qubits tipo transmon [32] (osciladores superconductores basados en uniones Josephson) se conectan en varios puntos a una guía de onda o a cavidades ópticas [33, 34].Cuando la separación entre los puntos de acoplamiento es comparable con la longitud de onda del campo, se rompe la aproximación de punto [35], y el emisor puede experimentar retardos e interferencias con su propia radiación. En este régimen, la interacción deja de ser puramente local y el sistema puede formar estados ligados del campo y el átomo, conocidos como Estados Ligados Dentro del Continuo (*Bound States in the Continuum* o BIC) y Estados Ligados Fuera del Continuo o (*Bound States out of the Continuum* o BOC) [36]. Físicamente, un BIC ocurre cuando las ondas emitidas por el átomo en distintos puntos interfieren destructivamente en la dirección de fuga, impidiendo que la energía se disipe. Es decir, la excitación queda “atrapada” aunque esté dentro del rango de energías del continuo radiativo. En cambio, un BOC corresponde a un estado confinado fuera de ese continuo, más parecido a una trampa real en el espectro [37]. Ambos casos reflejan cómo la no–localidad y el retardo introducen memoria en el entorno y rompen la dinámica markoviana, es decir, con memoria: la emisión ya no es un proceso simple e irreversible, sino un intercambio coherente y persistente entre el átomo y el campo.

1.1. Sistemas abiertos y dinámica fuera del equilibrio

Hasta este punto, los modelos descritos pueden considerarse sistemas cerrados, es decir, aquellos que no intercambian energía ni información con un entorno externo, y cuya evolución está gobernada por la ecuación de Schrödinger de manera unitaria. Sin embargo, los sistemas físicos reales rara vez son aislados: interactúan inevitablemente con un ambiente, lo que introduce pérdidas, ruido y procesos irreversibles. En consecuencia, su evolución deja de ser unitaria, pues el entorno genera decoherencia y pérdida de energía, modificando la dinámica interna del sistema [38, 39].

En este contexto, los sistemas abiertos proporcionan un marco más realista para el estudio de fenómenos cuánticos contemporáneos. Modelos como los de Rabi y Dicke adquieren relevancia al permitir analizar la dinámica combinada de bombeo y disipación [40-43], donde el entorno deja de ser un mero agente perturbador para convertirse en un elemento activo de la dinámica misma.

El intercambio de energía con el entorno puede clasificarse, de manera general, en tres mecanismos principales: (i) el bombeo coherente, en el cual la energía se transfiere de forma controlada mediante una fuente externa que preserva la fase cuántica (por ejemplo, un láser resonante); (ii) el bombeo incoherente, de naturaleza térmica o estocástica, que introduce fluctuaciones y ruido; y (iii) la disipación, asociada a los procesos de pérdida de energía o información hacia el entorno. Aunque la disipación no debe confundirse con el bombeo incoherente, ambos pueden coexistir y, en ciertos regímenes, incluso cooperar para estabilizar coherencia cuántica en estados estacionarios fuera del equilibrio [44].

La evolución en el tiempo de estos sistemas se describe generalmente con ecuaciones maestras, que permiten seguir cómo cambia el estado cuántico promedio (representado por el operador densidad). El caso más conocido es la ecuación maestra de Lindblad, que es válida cuando el sistema está débilmente acoplado al entorno y éste no conserva memoria del pasado, lo que se conoce como una dinámica markoviana [45, 46]. Este tipo de descripción incluye de forma controlada los procesos de pérdida y de inyección de energía, y permite estudiar cómo el sistema alcanza estados estables que no son de equilibrio térmico, sino configuraciones mantenidas por un flujo constante de energía entre el sistema y su entorno.

Cuando la conexión entre el sistema y su entorno es muy fuerte, o cuando ambos evolucionan a velocidades comparables, el entorno deja de “olvidar” lo que pasó antes. En lugar de responder solo al estado actual del sistema, empieza a devolverle parte de la información y energía que recibió en el pasado. A esto se le llama efecto no markoviano [39]. En este tipo de dinámica, el sistema conserva una memoria cuántica, es decir, una huella de sus estados anteriores que influye en cómo evoluciona con el tiempo. Estudiar estos efectos es importante para entender cómo se mantienen o se pierden las coherencias cuánticas cuando la interacción con el entorno ya no puede considerarse débil.

1.2. Modelos de interacción espín–bosón en sistemas abiertos y fuera del equilibrio

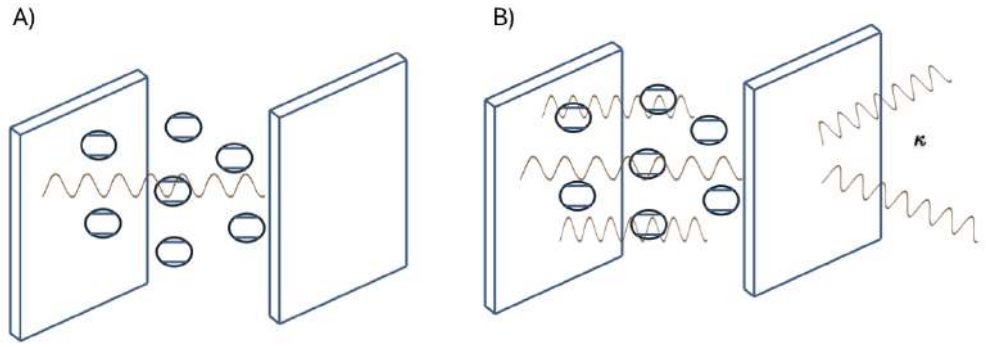

Figura 1: Ilustración del modelo de Dicke. A) N átomos de dos niveles (qubits) interactúan con un único modo electromagnético. B) N átomos (qubits) interactúan con múltiples modos, incorporando bombeo y disipación κ.

La extensión de los modelos espín–bosón al régimen abierto ha permitido estudiar cómo se comportan los sistemas cuánticos cuando pueden intercambiar energía con su entorno [47, 48]. En este caso, la interacción con el entorno no solo introduce pérdidas o disipación, sino que también puede generar comportamientos completamente nuevos que no aparecen en sistemas cerrados. La competencia entre los tres procesos —acoplamiento, disipación y bombeo— puede dar lugar a transiciones de fase disipativas, donde el campo adquiere una ocupación grande y aparecen correlaciones cuánticas persistentes [40, 49]. En algunos casos, la interacción con el entorno incluso puede estabilizar oscilaciones coherentes o patrones periódicos en el tiempo, conocidos como cristales de tiempo disipativos [50, 51].

En sistemas cerrados, la fase superradiante del modelo de Dicke no ha podido observarse directamente debido a la conservación del número total de excitaciones. Sin embargo, en sistemas abiertos —como los realizados con condensados de Bose–Einstein acoplados a cavidades ópticas [43, 52] o circuitos QED superconductores [34]—, la disipación y el bombeo externo actúan como mecanismos de control que permiten alcanzar y sostener regímenes superradiantes.

En conjunto, el desafío y la motivación central de esta proyecto radican en ampliar la descripción de los modelos espín–bosón hacia configuraciones más generales y realistas, integrando acoplamientos multimodo y multiqubit en condiciones abiertas.

2. Objetivos

El objetivo central de esta investigación doctoral es establecer un marco teórico para comprender los modelos de interacción espín–bosón en sistemas multimodo abiertos y fuera del equilibrio. Este objetivo se aborda progresivamente, comenzando con el modelo

de Rabi de dos qubits, pasando por átomos gigantes hasta el modelo de Dicke multimodo y abierto.

- Caracterizar las técnicas de estudio para el Hamiltoniano generalizado y sus casos particulares: multimodo, multiqubit, cerrado y abierto.
- Estudiar el modelo de átomos gigantes acoplados a guias de onda determinando los retardos temporales y la formación de estados ligados.
- Formular el modelo de Rabi abierto y al de átomos gigantes dentro del marco de la ecuación maestra de Lindblad, identificando regímenes estacionarios y condiciones para la aparición de transiciones disipativas.
- Extender los análisis anteriores al modelo de Dicke multiqubit y multimodo abierto.

3. Metodología

En esta sección se presentan las herramientas que se emplearán para abordar los objetivos de esta propuesta doctoral.

3.1. Diagonalización numérica exacta y análisis espectral

La diagonalización numérica exacta del Hamiltoniano nos permite validar cualquier aproximación analítica y para explorar en distintos regimenes de acoplamiento [12, 53]. Esta técnica es aplicable a una amplia gama de modelos, incluyendo Rabi, Dicke y sus extensiones multimodo.

Construcción del Espacio de Hilbert y Truncamiento: El espacio de Hilbert total de estos sistemas es el producto tensorial del espacio de los espines (o pseudoespines colectivos) y el espacio de Fock de los modos bosónicos. Dado que el espacio bosónico es de dimensión infinita, es esencial implementar un truncamiento en la base de Fock, $|n\rangle$, conservando un número de estados n_{max} [54, 55] tal que los resultados de interés (energías, valores esperados de observables) hayan convergido dentro de una precisión deseada.

Base Colectiva para Sistemas Multiqubit: Para sistemas con N qubits idénticos que interactúan de manera colectiva con el campo, como en el modelo de Dicke, la dinámica se restringe al subespacio de Dicke, caracterizado por el espín total $J = N/2$. Esta base colectiva, $|J, M\rangle$ con $M = -J, -J+1, \ldots, J$, reduce la dimensión del subespacio espín de 2^N a $2J + 1 = N + 1$. Físicamente, esto captura la simetría de permutación del sistema cuando los qubits son indistinguibles, permitiendo el estudio de efectos colectivos como la superradiancia sin la necesidad de diagonalizar un espacio exponencialmente grande.

Cálculo de Observables y Dinámica Temporal: Una vez diagonalizado el Hamiltoniano en un espacio de Hilbert convergente, no solo se obtiene el espectro de energías, sino que también se pueden calcular valores esperados de cualquier operador en los autoestados. Además, la evolución temporal de un estado arbitrario $|\psi(0)\rangle$ se puede obtener mediante

$|\psi(t)\rangle = \sum_k c_k e^{-iE_k t}|E_k\rangle$, donde $c_k = \langle E_k|\psi(0)\rangle$. Esto es crucial para estudiar dinámicas de relajación y procesos de decoherencia en sistemas cerrados [56, 57].

3.2. Aproximaciones analíticas: del régimen adiabático a la GRWA

Se emplearan aproximaciones analíticas para complementar los resultados numéricos y obtener intuición física sobre los fenómenos observados.

Aproximación Adiabática: Esta aproximación es válida cuando la frecuencia del modo bosónico es mucho mayor que la frecuencia de los espines. En este régimen, el oscilador bosónico responde tan rápidamente que puede considerarse siempre en equilibrio con la configuración instantánea de los espines. En otras palabras, el campo "sigue" de forma casi inmediata los cambios del sistema de espines. Desde el punto de vista matemático, la aproximación se implementa aplicando una transformación unitaria de tipo desplazamiento,

$$\hat{U} = \exp\Big[\beta(\hat{a}^\dagger - \hat{a})\Big], \tag{3.1}$$

donde $\beta = g/\omega$. Esta transformación desplaza los estados del oscilador a posiciones que dependen del estado de los espines, generando así estados de Fock desplazados [58]. Esta aproximación captura la física del estado base, incluyendo las transiciones de fase cuántica, y proporciona una descripción intuitiva de cómo el campo se ajusta a las configuraciones de los espines [59].

Aproximación Generalizada de Onda Rotante (*Generalized Rotating Wave Approximation* o GRWA): La GRWA [53] extiende la aproximación adiabática para incluir de manera controlada los efectos de interacción entre los estados del espín, que se vuelven relevantes cuando la frecuencia de los espines ya no puede considerarse despreciable. En este régimen, el oscilador bosónico continúa adaptándose rápidamente al espín, pero pueden ocurrir transiciones entre configuraciones con diferente número de excitaciones, las cuales se vuelven importantes para describir con precisión el espectro. El procedimiento comienza aplicando la transformación unitaria,

$$\hat{U} = \exp\Big[\beta\hat{O}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})\Big], \tag{3.2}$$

donde $\hat{O}$ es un operador asociado al espín (por ejemplo, $\hat{J}_x$ en el modelo de Dicke) y $\beta = g/\omega$. Este tipo de transformación genera un estado compuesto en el que el espín y el campo bosónico se comportan como una entidad acoplada, de manera similar a un *polarón*, es decir, una partícula (el espín) acompañada por una deformación en su entorno (el campo). Luego de la transformación, el Hamiltoniano se reescribe en una forma más simple dividiendo el espacio en bloques que conservan aproximadamente el número total de excitaciones. Dentro de cada bloque, se mantiene una interacción efectiva entre el espín y el oscilador que captura las correcciones más importantes ignoradas por la aproximación adiabática. De este modo, la GRWA permite describir con mayor precisión la energía y la estructura de los estados del sistema, especialmente en el régimen intermedio de acoplamiento, donde ni las aproximaciones débiles ni las puramente adiabáticas son suficientes [60]. Además, su formulación es general y puede aplicarse tanto al modelo de Rabi como a extensiones colectivas como el modelo de Dicke [61].

Enfoque Variacional del estado base: Para optimizar la descripción del estado base en sistemas espín-bosón, implementamos un enfoque variacional que combina las transformaciones unitarias con la minimización de la energía [62]. Partiendo de la Ec. (3.2), consideramos el parámetro β como una variable y minimizamos la energía del estado base con respecto a este parámetro mediante: $\partial E_{\text{GS}}/\partial\beta = 0$. Este procedimiento permite encontrar el valor óptimo de β que mejor describe el acoplamiento efectivo entre los espines y el campo en el estado base, superando las limitaciones de elecciones fijas como $\beta = g/\omega$ [53, 63]. Para capturar correlaciones cuánticas más sutiles en el estado base, consideramos adicionalmente una transformación de compresión (*squeezing*) del campo bosónico:

$$\hat{V} = \exp\left[\lambda(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})\right], \tag{3.3}$$

donde λ es el parámetro de compresión. Cuando el acoplamiento entre el espín y el campo es muy fuerte, el campo ya no solo "se desplaza" como en la transformación de polaron, sino que sus propias fluctuaciones cambian: una cuadratura se comprime y la otra se estira. Esto ocurre porque el intercambio continuo de excitaciones entre el espín y el campo altera la forma del vacío, haciendo que ya no parezca un campo libre sino uno "deformado" por la interacción [64]. Por eso, usar una transformación de compresión describe mejor el estado base: no solo tiene en cuenta el desplazamiento promedio del campo, sino también cómo el acoplamiento fuerte modifica las fluctuaciones [11]. La optimización simultánea de ambos parámetros mediante:$\partial E_{\text{GS}}/\partial\beta = 0$ y $\partial E_{\text{GS}}/\partial\lambda = 0$, proporciona la descripción variacional más completa del estado base [60].

3.3. Métodos para sistemas multimodo y no markovianos

La extensión de los modelos espín-bosón hacia configuraciones multimodo y sistemas con estructura espacial extendida, como los átomos gigantes, requiere de técnicas que capturen efectos no markovianos y la formación de estados ligados [31, 37, 39].

Función espectral y densidad de estados: En sistemas multimodo, la interacción entre el espín y el entorno bosónico se caracteriza mediante la función espectral $J(\omega)$ [39], que encapsula información crucial sobre la densidad de estados del continuo bosónico y la fuerza de acoplamiento para cada modo de frecuencia ω. La forma específica de $J(\omega)$ depende de la estructura del entorno bosónico (guías de onda, cristales fotónicos, vibraciones de red, etc.) [65] y contiene información sobre: (i) La distribución de modos disponibles para el intercambio de energía. (ii) Los regímenes donde la aproximación markoviana es válida o se rompe. Para sistemas con estructura espacial extendida, como los átomos gigantes que se acoplan en múltiples puntos, la función espectral efectiva se modifica debido a efectos de interferencia, desarrollando ceros y máximos que pueden utilizarse para analizar la respuesta del sistema [31].

Transformada de Laplace y análisis de estados ligados:

Para describir la dinámica temporal en sistemas multimodo, especialmente cuando los efectos del entorno no pueden aproximarse por un decaimiento exponencial simple, se emplea la transformada de Laplace. Este método permite expresar la evolución temporal

del sistema de forma analítica y separar las distintas contribuciones físicas que intervienen en la dinámica [37]. En este contexto, aparecen dos comportamientos relevantes: (i) *Estados ligados fuera del continuo* [66], que se manifiestan como polos aislados en el plano complejo y representan excitaciones confinadas que permanecen localizadas indefinidamente. (ii) *Estados ligados dentro del continuo* [67], que emergen cuando la interferencia destructiva entre distintos canales de emisión impide la radiación, confinando la energía cerca del emisor.

Este enfoque ofrece una visión clara de cómo la estructura espectral del entorno determina los procesos de confinamiento y transferencia de excitaciones en sistemas cuánticos abiertos.

3.4. Extensión a sistemas abiertos y fuera del equilibrio

Ecuación Maestra de Lindblad: Este formalismo se emplea como herramienta para estudiar la dinámica y los estados estacionarios de sistemas espín–bosón en presencia de pérdidas y bombeo [39, 45]. En su forma general, la ecuación maestra de Lindblad para el operador densidad $\hat{\rho}$ se expresa como

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_k \mathcal{D}[\hat{L}_k]\hat{\rho}, \tag{3.4}$$

donde

$$\mathcal{D}[\hat{L}_k]\hat{\rho} = \hat{L}_k\hat{\rho}\hat{L}_k^\dagger - \tfrac{1}{2}\{\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k, \hat{\rho}\} \tag{3.5}$$

describe los canales de disipación. Estos están caracterizados por los operadores de salto $\hat{L}_k$, que representan los procesos mediante los cuales el sistema intercambia energía o información con su entorno (como la emisión espontánea de un fotón, la pérdida de una excitación en un modo bosónico o la desexcitación de un qubit) [39].

Este formalismo permite describir cómo los modos bosónicos —como los fotones de una cavidad o los fonones en un medio— intercambian energía con los grados de libertad de espín, y cómo este intercambio da lugar a procesos de relajación, pérdida de coherencia o autoorganización cuántica [44]. A partir de la ecuación maestra es posible calcular observables relevantes, como poblaciones, coherencias y correlaciones entre el campo y los emisores [39], así como explorar regímenes no triviales inducidos por la disipación [40]. Entre ellos destacan las transiciones de fase disipativas [38], la formación de estados estacionarios no térmicos y la emergencia de comportamientos colectivos como la superradiancia o el atrapamiento de excitaciones [18]. Este enfoque proporciona una descripción completa de la dinámica fuera del equilibrio en los modelos de Rabi, Dicke y de átomos gigantes, integrando en un mismo marco los efectos cuánticos y las interacciones con el entorno.

4. Resultados esperados

A continuación se describen los resultados esperados organizados sistemáticamente según el plan de trabajo propuesto:

- **Modelo de Rabi de dos qubits con interacciones materiales.** Se estudiará cómo las interacciones η_x y η_z modifican el espectro energético, el entrelazamiento y el número medio de fotones en el sistema. El análisis se realizará mediante diagonalización numérica exacta y se contrastará con las aproximaciones GRWA para evaluar su validez en regímenes de acoplamiento ultrafuerte y ultrafuerte profundo.
- **Átomos gigantes y dinámica no markoviana.** Se caracterizará la formación de estados ligados en guías de onda, determinando su longitud de localización en regímenes de acoplamiento fuerte. Este análisis permitirá identificar condiciones experimentales para el confinamiento de luz en configuraciones extendidas de emisores.
- **Sistemas abiertos y dinámica disipativa.** Mediante la ecuación maestra de Lindblad se identificarán transiciones de fase disipativas y regímenes estacionarios no térmicos en los modelos de Rabi y Dicke. Este enfoque permitirá describir los procesos coherentes y disipativos en sistemas cuánticos abiertos.
- **Extensión multimodo y efectos colectivos.** Se estudiará la generalización de los modelos anteriores a configuraciones multimodo, analizando cómo la estructura espectral del entorno bosónico afecta las propiedades del sistema. Esto incluirá el análisis de efectos de interferencia y la competencia entre localización y deslocalización en sistemas extendidos.

5. Avances

En esta sección presento los primeros avances de mi investigación doctoral: el estudio del modelo de Rabi de dos qubits con interacciones materiales, y el estudio teórico para abordar sistemas abiertos mediante el estudio de átomos gigantes y dinámicas no markovianas.

5.1. Modelo de Rabi de dos qubits con interacciones qubit-qubit

Consideramos un sistema compuesto por dos qubits idénticos, cada uno con frecuencia de transición ω_0, acoplados a un modo único del campo electromagnético de frecuencia ω. La dinámica del sistema está gobernada por el Hamiltoniano dado en la Ec. (1.3):

$$\hat{H}_{\text{Rabi dos qubits}} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z^{1,2} + g \hat{J}_x^{1,2} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \eta_x \left(\hat{J}_x^{1,2} \right)^2 + \eta_z \left(\hat{J}_z^{1,2} \right)^2 .$$

Espectro energético y validación de la GRWA: Para caracterizar las propiedades del sistema, comenzamos por analizar su espectro de energías. Dado que el espacio de Hilbert del modo bosónico es de dimensión infinita, es necesario implementar un truncamiento en la base de Fock. En todos nuestros cálculos, utilizamos un número de corte $n_{\text{max}} = 30$, el cual garantiza la convergencia de los niveles de baja energía que son el centro de este estudio. La diagonalización numérica exacta con este truncamiento sirve como referencia para validar nuestras aproximaciones analíticas. La validación sistemática revela que la

GRWA proporciona una descripción bastante aproximada del espectro del sistema. Como muestra la Figura 2, la GRWA no solo reproduce la estructura general de niveles, sino que también captura detalles que emergen en el régimen de acoplamiento fuerte ($g/\omega \gtrsim 0.5$), donde la aproximación de onda rotante (RWA) convencional deja de ser válida.

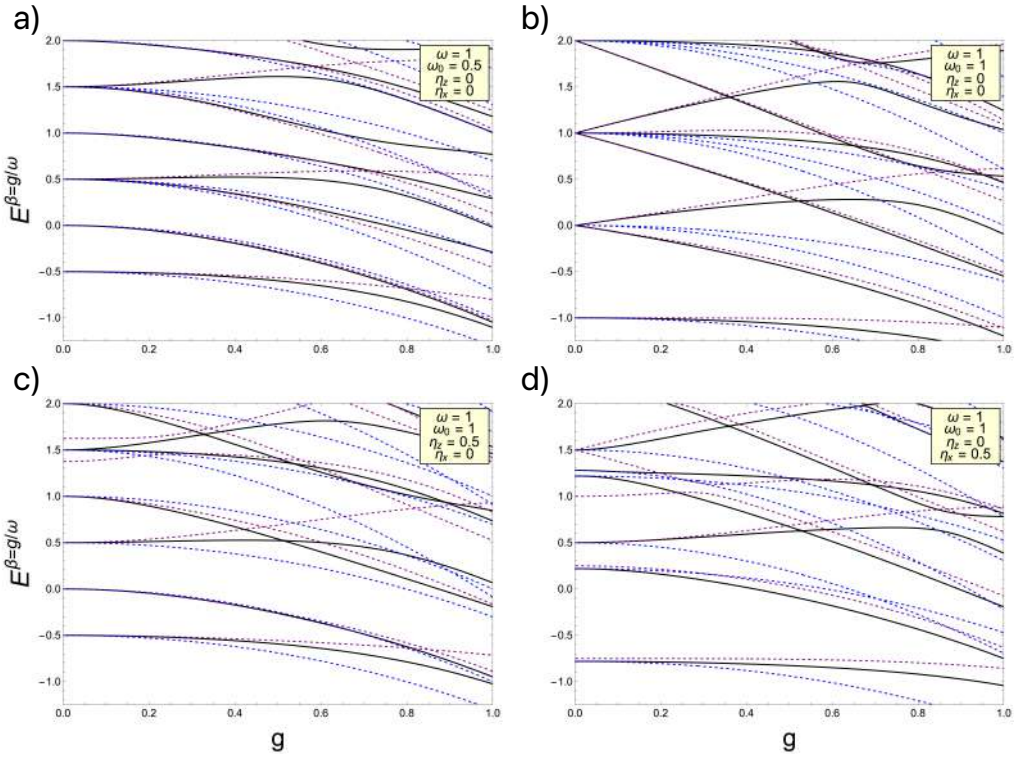

Figura 2: Espectro energético del modelo de Rabi de dos qubits. Las líneas negras sólidas representan la diagonalización numérica exacta. (a) Caso no resonante $\omega_0 = \omega/2$; (b) Caso resonante $\omega = \omega_0$; (c) Resonante con $\eta_z = 0.5$; (d) Resonante con $\eta_x = 0.5$. La GRWA (línea púrpura discontinua) muestra excelente acuerdo con los resultados exactos incluso en presencia de interacciones materiales.

La aproximación GRWA mantiene su precisión incluso cuando incluimos interacciones entre los qubits (η_x y η_z), demostrando que puede describir sistemas donde los qubits interactúan entre sí modificando la dinámica colectiva.

Es importante distinguir entre los casos resonante ($\omega = \omega_0$) y no resonante ($\omega_0 = \omega/2$): (i) En resonancia, el intercambio de energía entre qubits y campo es máximo, facilitando fenómenos colectivos como la superradiancia. (ii) Fuera de resonancia, el desajuste entre frecuencias compite con el acoplamiento, lo que permite el control de sistemas experimentales donde la resonancia perfecta no siempre se alcanza.

Enfoque variacional para el estado base: Desarrollamos un enfoque variacional para mejorar la descripción del estado base del sistema. Partiendo de la transformación (3.2) y realizando la GRWA, obtenemos la energía del estado base:

$$E^{\beta}_{\text{GRWA,GS}} = -\omega_0 e^{-\frac{\beta^2}{2}} + \frac{1}{2}\left[(\omega\beta - 2g)\beta + \eta_x + \frac{\eta_z}{2}\left(e^{-2\beta^2} + 3\right)\right], \tag{5.1}$$

donde el parámetro β se determina minimizando la energía:

$$\beta = \frac{g}{\omega + \omega_0 e^{-\frac{\beta^2}{2}} - \eta_z e^{-2\beta^2}}. \tag{5.2}$$

Como muestra la Figura (3), este tratamiento variacional (línea azul sólida) mejora sustancialmente la precisión respecto a aproximaciones más simples (línea púrpura discontinua).

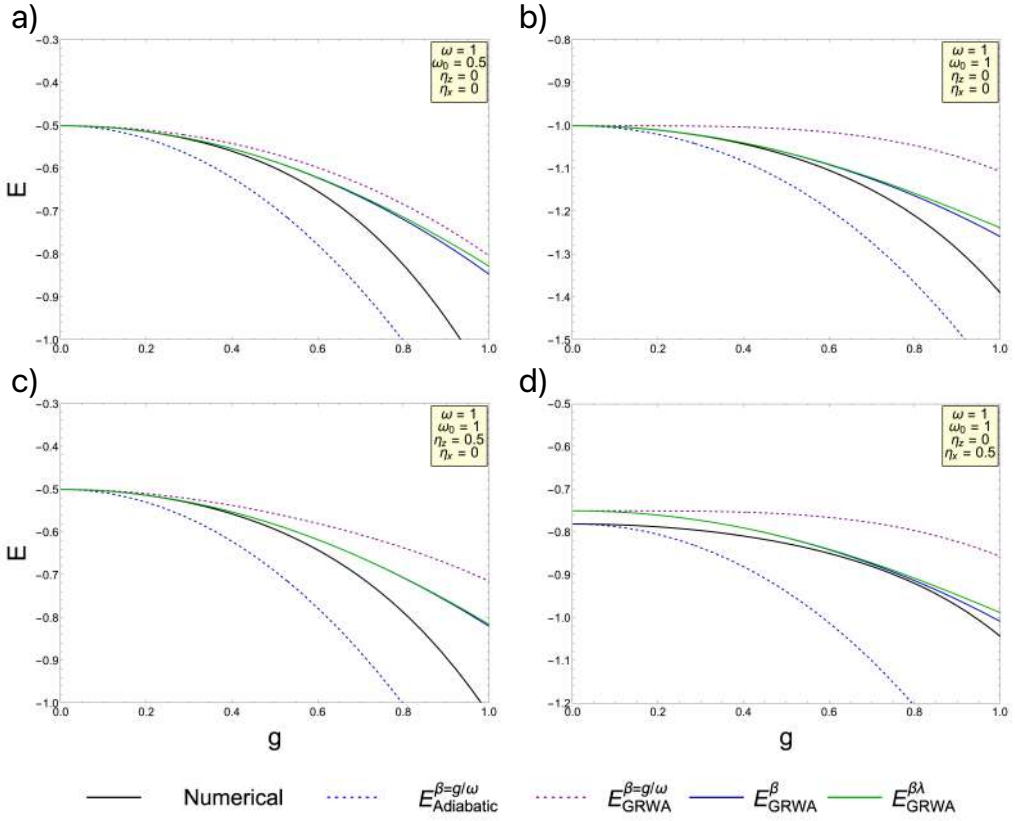

Figura 3: Energía del estado base. El tratamiento variacional con β (azul sólido) y $\beta + \lambda$ (verde sólido) muestra mejora sistemática sobre aproximaciones convencionales en todos los regímenes de acoplamiento.

Para capturar correlaciones cuánticas adicionales, implementamos una transformación (3.3) que conduce a la expresión:

$$\begin{aligned} E^{\beta,\lambda}_{\text{GRWA,GS}} &= \omega \sinh^2(2\lambda) - \omega_0 e^{-\frac{\beta^2}{2}e^{-4\lambda}} \\ &+ \frac{1}{2}\left[(\omega\beta - 2g)\beta + \eta_x + \frac{\eta_z}{2}\left(e^{-2\beta^2 e^{-4\lambda}} + 3\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.3}$$

La optimización simultánea de ambos parámetros proporciona la descripción más precisa del estado base.

Valor medio del número de fotones: El número medio de fotones, dado por $\langle n \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$, indica cuánta energía del campo electromagnético participa en la interacción con el sistema. A medida que el acoplamiento g aumenta, el campo deja de estar completamente vacío y aparecen fluctuaciones que reflejan la influencia de la materia sobre la luz. Como se muestra en la Figura 4, la aproximación GRWA reproduce correctamente cómo crece $\langle n \rangle$ con g, mostrando que el acoplamiento fuerte hace que el campo adquiera una participación más activa incluso en el estado base.

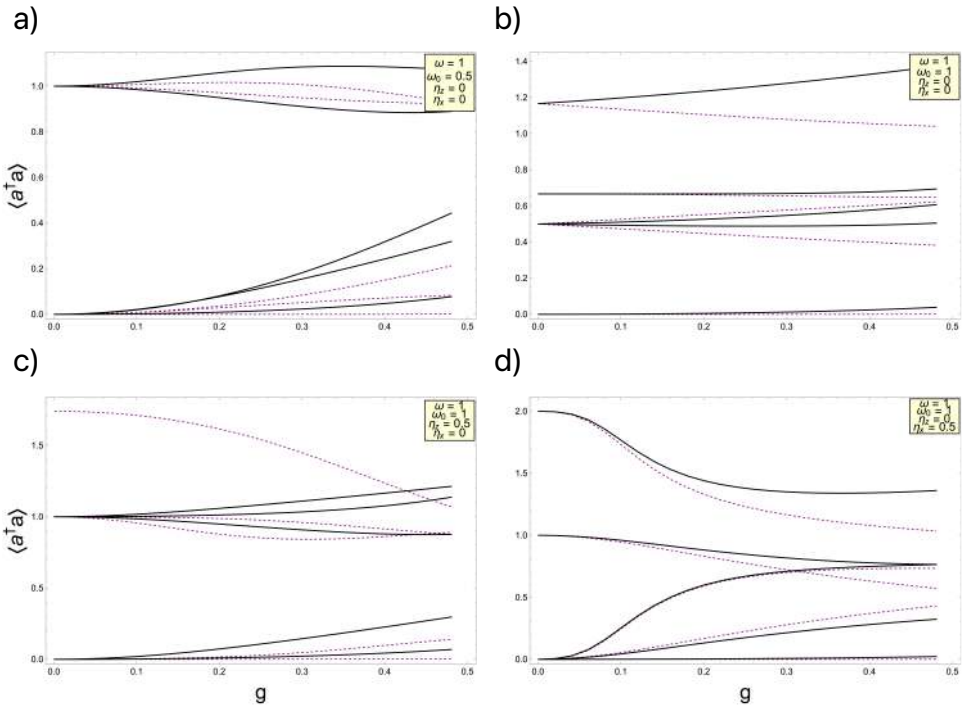

Figura 4: Número medio de fotones en el estado base. La GRWA captura el aumento de fotones virtuales inducido por el acoplamiento fuerte y la influencia diferenciada de las interacciones materiales.

Observamos que η_z, que acopla con la diferencia de población entre qubits, modifica significativamente el desplazamiento del oscilador, mientras que η_x (asociado a procesos de intercambio entre qubits) influye principalmente en la estructura del entrelazamiento y el espectro de excitaciones.

Los resultados obtenidos para el modelo de Rabi de dos qubits constituyen la base para abordar sistemas más complejos. La metodología desarrollada -que combina aproximaciones analíticas como la GRWA con tratamientos variacionales- puede extenderse directamente al modelo de Dicke multiqubit, donde esperamos observar fenómenos colectivos amplificados como la superradiancia. Posteriormente, planeamos incorporar múltiples modos bosónicos para estudiar efectos de competencia entre diferentes frecuencias del campo, y finalmente extender el análisis a sistemas abiertos donde la disipación y el bombeo externo pueden

estabilizar nuevos estados cuánticos fuera del equilibrio.

5.2. Estudio de técnicas para dinámicas no markovianas en átomos gigantes

Como parte de la preparación para abordar sistemas abiertos, he estudiado técnicas para describir dinámicas no markovianas en sistemas espín-bosón. Recordemos que la markovianidad se refiere a situaciones donde el entorno tiene "memoria", es decir, la influencia del entorno en el sistema depende de su historia previa, a diferencia de los procesos markovianos donde el entorno se olvida instantáneamente del estado del sistema.

Mi estudio se ha centrado en el formalismo desarrollado para átomos gigantes -sistemas donde un emisor cuántico se acopla a un campo en múltiples puntos espaciales [37]. Esta configuración genera efectos de interferencia y retardos temporales que hacen que la dinámica sea inherentemente no markoviana.

A través de este estudio, he reproducido cómo se forman estados ligados en estos sistemas, donde la excitación cuántica queda atrapada cerca del emisor en lugar de dispersarse en el entorno. En particular, he verificado cómo en átomos gigantes pueden emerger estados ligados dentro del continuo (BICs), donde la interferencia destructiva entre diferentes caminos de emisión suprime completamente la radiación al entorno, confinando la excitación de manera estable.

Los resultados obtenidos hasta el momento validan las aproximaciones analíticas y el manejo de las herramientas teóricas requeridas. Las siguientes etapas contemplan la extensión del análisis a configuraciones multiqubit y multimodo en sistemas abiertos, donde podremos estudiar cómo la disipación y los efectos no markovianos modifican los fenómenos colectivos en el modelo de Dicke y en arreglos de átomos gigantes, considerando además el régimen de acoplamiento ultra-fuerte en estos últimos.

6. Bibliografía

[1] A. J. Leggett, S. Chakravarty, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher, A. Garg y W. Zwerger, Dynamics of the dissipative two-state system, Rev. Mod. Phys. **59**, 1-85 (1987).

[2] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin y R. J. Schoelkopf, Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation, Phys. Rev. A **69**, 062320 (2004).

[3] R. Hanson, L. P. Kouwenhoven, J. R. Petta, S. Tarucha y L. M. K. Vandersypen, Spins in few-electron quantum dots, Rev. Mod. Phys. **79**, 1217-1265 (2007).

[4] E. Jaynes y F. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser, Proceedings of the IEEE **51**, 89-109 (1963).

[5] A. O. Caldeira y A. J. Leggett, Quantum tunnelling in a dissipative system, Annals of Physics **149**, 374-456 (1983).

[6] P. W. Anderson, Absence of Diffusion in Certain Random Lattices, Phys. Rev. **109**, 1492-1505 (1958).

[7] H. Carmichael, *An open systems approach to quantum optics* (Springer, 1993).

[8] I. I. Rabi, On the Process of Space Quantization, Phys. Rev. **49**, 324-328 (1936).

[9] B. Shore, *The theory of coherent atomic excitation* (Taylor & Francis, 1991).

[10] A Wallraff, D. I. Schuster, A Blais, L Frunzio, R. S. Huang, J Majer, S Kumar, S. M. Girvin y R. J. Schoelkopf, Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics, Nature **431**, 162-167 (2004).

[11] P. Forn-Díaz, L. Lamata, E. Rico, J. Kono y E. Solano, Ultrastrong coupling regimes of light-matter interaction, Rev. Mod. Phys. **91**, 025005 (2019).

[12] S. A. Chilingaryan y B. M. Rodríguez-Lara, The quantum Rabi model for two qubits, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **46**, 335301 (2013).

[13] J. J. Sakurai y E. D. Commins, *Modern quantum mechanics, revised edition* (American Association of Physics Teachers, 1995).

[14] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions* (Cambridge University Press, 1999).

[15] E. J. Davis, A. Periwal, E. S. Cooper, G. Bentsen, S. J. Evered, K. Van Kirk y M. H. Schleier-Smith, Protecting Spin Coherence in a Tunable Heisenberg Model, Phys. Rev. Lett. **125**, 060402 (2020).

[16] N. U. Koyluoglu, S. V. Rajagopal, G. L. Moreau, J. A. Hines, O. Marković y M. Schleier-Smith, Squeezing Towards the Heisenberg Limit with Locally Interacting Spins, (2025).

[17] D. Tolkunov y D. Solenov, Quantum phase transition in the multimode Dicke model, Phys. Rev. B **75**, 024402 (2007).

[18] P. Kirton, M. M. Roses, J. Keeling y E. G. Dalla Torre, Introduction to the Dicke Model: From Equilibrium to Nonequilibrium, and Vice Versa, Advanced Quantum Technologies **2**, 1800043 (2019).

[19] C. Emary y T. Brandes, Quantum Chaos Triggered by Precursors of a Quantum Phase Transition: The Dicke Model, Phys. Rev. Lett. **90**, 044101 (2003).

[20] R. H. Dicke, Coherence in Spontaneous Radiation Processes, Phys. Rev. **93**, 99-110 (1954).

[21] K. Hepp y E. H. Lieb, On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field: the dicke maser model, Annals of Physics **76**, 360 -404 (1973).

[22] M. A. Bastarrachea-Magnani, S Lerma-Hernández y J. G. Hirsch, Thermal and quantum phase transitions in atom-field systems: a microcanonical analysis, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment **2016**, 093105 (2016).

[23] L. D. Carr, *Understanding Quantum Phase Transitions* (CRC Press, 2010).

[24] M. Caprio, P. Cejnar y F. Iachello, Excited state quantum phase transitions in many-body systems, Annals of Physics **323**, 1106-1135 (2008).

[25] M. Gross y S. Haroche, Superradiance: An essay on the theory of collective spontaneous emission, Physics Reports **93**, 301-396 (1982).

[26] M. P. Baden, K. J. Arnold, A. L. Grimsmo, S. Parkins y M. D. Barrett, Realization of the Dicke Model Using Cavity-Assisted Raman Transitions, Phys. Rev. Lett. **113**, 020408 (2014).

[27] M. A. Bastarrachea-Magnani, S. Lerma-Hernández y J. G. Hirsch, Comparative quantum and semiclassical analysis of atom-field systems. I. Density of states and excited-state quantum phase transitions, Phys. Rev. A **89**, 032101 (2014).

[28] R. Herrera Romero, M. A. Bastarrachea-Magnani y R. Linares, Critical Phenomena in Light–Matter Systems with Collective Matter Interactions, Entropy **24** (2022).

[29] R. Herrera Romero y M. A. Bastarrachea-Magnani, Phase and Amplitude Modes in the Anisotropic Dicke Model with Matter Interactions, Entropy **26** (2024).

[30] A. Frisk Kockum, P. Delsing y G. Johansson, Designing frequency-dependent relaxation rates and Lamb shifts for a giant artificial atom, Phys. Rev. A **90**, 013837 (2014).

[31] A. Frisk Kockum, "Quantum Optics with Giant Atoms—the First Five Years", en International Symposium on Mathematics, Quantum Theory, and Cryptography (2021), págs. 125-146.

[32] J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin y R. J. Schoelkopf, Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box, Phys. Rev. A **76**, 042319 (2007).

[33] B. Kannan, M. J. Ruckriegel, D. L. Campbell, A. Frisk Kockum, J. Braumüller, D. K. Kim, M. Kjaergaard, P. Krantz, A. Melville, B. M. Niedzielski, A. Vepsäläinen, R. Winik, J. L. Yoder, F. Nori, T. P. Orlando, S. Gustavsson y W. D. Oliver, Waveguide quantum electrodynamics with superconducting artificial giant atoms, Nature **583**, 775-779 (2020).

[34] A. Blais, A. L. Grimsmo, S. M. Girvin y A. Wallraff, Circuit quantum electrodynamics, Rev. Mod. Phys. **93**, 025005 (2021).

[35] M. V. Gustafsson, T. Aref, A. F. Kockum, M. K. Ekström, G. Johansson y P. Delsing, Propagating phonons coupled to an artificial atom, Science **346**, 207-211 (2014).

[36] C. Gonzalez-Ballestero, A. Gonzalez-Tudela, F. J. Garcia-Vidal y E. Moreno, Chiral route to spontaneous entanglement generation, Phys. Rev. B **92**, 155304 (2015).

[37] C. A. González-Gutiérrez, Non-Markovian dynamics of giant emitters beyond the Weisskopf-Wigner approximation, (2025).

[38] L. M. Sieberer, M. Buchhold y S. Diehl, Keldysh field theory for driven open quantum systems, Reports on Progress in Physics **79**, 096001 (2016).

[39] H.-P. Breuer y P. F., *The theory of open quantum systems* (Oxford University Press, 2003).

[40] M.-J. Hwang, P. Rabl y M. B. Plenio, Dissipative phase transition in the open quantum Rabi model, Phys. Rev. A **97**, 013825 (2018).

[41] G. Di Bello, Dynamics of open quantum systems: From the Rabi model to coupled qubits, Nuovo Cim. C **47**, 255 (2024).

[42] D. Nagy, G. Kónya, G. Szirmai y P. Domokos, Dicke-Model Phase Transition in the Quantum Motion of a Bose-Einstein Condensate in an Optical Cavity, Phys. Rev. Lett. **104**, 130401 (2010).

[43] J. Klinder, H. Keßler, M. Wolke, L. Mathey y A. Hemmerich, Dynamical phase transition in the open Dicke model, Proceedings of the National Academy of Sciences **112**, 3290-3295 (2015).

[44] H. J. Carmichael, *Statistical methods in quantum optics 1: master equations and Fokker-Planck equations* (Springer Science & Business Media, 2013).

[45] G Lindblad, On the generators of quantum dynamical semigroups, Communications in Mathematical Physics **48**, 119-130 (1976).

[46] R. Fazio, J. Keeling, L. Mazza y M. Schirò, Many-body open quantum systems, SciPost Phys. Lect. Notes, 99 (2025).

[47] G. Lyu, K. Kottmann, M. B. Plenio y M.-J. Hwang, Multicritical dissipative phase transitions in the anisotropic open quantum Rabi model, Phys. Rev. Res. **6**, 033075 (2024).

[48] F. m. c. Damanet, A. J. Daley y J. Keeling, Atom-only descriptions of the driven-dissipative Dicke model, Phys. Rev. A **99**, 033845 (2019).

[49] P. Kirton y J. Keeling, Suppressing and Restoring the Dicke Superradiance Transition by Dephasing and Decay, Phys. Rev. Lett. **118**, 123602 (2017).

[50] T. D. Farokh Mivehvar Francesco Piazza y H. Ritsch, Cavity QED with quantum gases: new paradigms in many-body physics, Advances in Physics **70**, 1-153 (2021).

[51] B. Zhu, J. Marino, N. Y. Yao, M. D. Lukin y E. A. Demler, Dicke time crystals in driven-dissipative quantum many-body systems, New Journal of Physics **21**, 073028 (2019).

[52] K. Baumann, R. Mottl, F. Brennecke y T. Esslinger, Exploring Symmetry Breaking at the Dicke Quantum Phase Transition, Phys. Rev. Lett. **107**, 140402 (2011).

[53] E. K. Twyeffort Irish, Generalized Rotating-Wave Approximation for Arbitrarily Large Coupling, Phys. Rev. Lett. **99**, 173601 (2007).

[54] M. A. Bastarrachea-Magnani y J. G. Hirsch, Numerical solutions of the Dicke Hamiltonian, Rev. Mex. Fis. S **57**, 69 (2011).

[55] M. A. Bastarrachea-Magnani y J. G. Hirsch, Convergence in numerical solutions of the Dicke Hamiltonian, AIP Conference Proceedings **1488**, 418-421 (2012).

[56] S. Lerma-Hernández, J. Chávez-Carlos, M. A. Bastarrachea-Magnani, L. F. Santos y J. G. Hirsch, Analytical description of the survival probability of coherent states in regular regimes, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **51**, 475302 (2018).

[57] D Villaseñor, S Pilatowsky-Cameo, M. A. Bastarrachea-Magnani, S Lerma-Hernández, L. F. Santos y J. G. Hirsch, Quantum vs classical dynamics in a spin-boson system: manifestations of spectral correlations and scarring, New Journal of Physics **22**, 063036 (2020).

[58] R. J. Glauber, Coherent and Incoherent States of the Radiation Field, Phys. Rev. **131**, 2766-2788 (1963).

[59] M. A. Bastarrachea-Magnani, A Relaño, S Lerma-Hernández, B. L. del Carpio, J Chávez-Carlos y J. G. Hirsch, Adiabatic invariants for the regular region of the Dicke model, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **50**, 144002 (2017).

[60] Y.-Y. Zhang y X.-Y. Chen, Analytical solutions by squeezing to the anisotropic Rabi model in the nonperturbative deep-strong-coupling regime, Phys. Rev. A **96**, 063821 (2017).

[61] J. T. Devreese y A. S. Alexandrov, Fröhlich polaron and bipolaron: recent developments, Reports on Progress in Physics **72**, 066501 (2009).

[62] R. Silbey y R. A. Harris, Variational calculation of the dynamics of a two level system interacting with a bath, The Journal of Chemical Physics **80**, 2615-2617 (1984).

[63] Y.-Y. Zhang y Q.-H. Chen, Generalized rotating-wave approximation for the two-qubit quantum Rabi model, Phys. Rev. A **91**, 013814 (2015).

[64] S. Ashhab y F. Nori, Qubit-oscillator systems in the ultrastrong-coupling regime and their potential for preparing nonclassical states, Phys. Rev. A **81**, 042311 (2010).

[65] C. Gardiner y P. Zoller, *Quantum noise: a handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics* (Springer Science & Business Media, 2004).

[66] T. Tufarelli, F. Ciccarello y M. S. Kim, Dynamics of spontaneous emission in a single-end photonic waveguide, Phys. Rev. A **87**, 013820 (2013).

[67] C. W. Hsu, B. Zhen, A. D. Stone, J. D. Joannopoulos y M. Soljačić, Bound states in the continuum, Nature Reviews Materials **1**, 16048 (2016).

7. Calendario de actividades

Actividades /Trimestre	25-P	25-O	26-I	26-P	26-O	27-I	27-P	27-O	28-I	28-P	28-O	29-I
Revisión bibliográfica												
Cursar UEAs de Investigación												
Escritura de la tesis												
Escritura de un artículo de Investigación												
Disertación												
Caracterizar las técnicas de estudio para el Hamiltoniano generalizado y sus casos particulares: multimodo, multiqubit, cerrado y abierto.												
Estudiar el modelo de átomos gigantes acoplados a guias de onda determinando los retardos temporales y la formación de estados ligados.												
Formular el modelo de Rabi abierto y al de átomos gigantes dentro del marco de la ecuación maestra de Lindblad, identificando regímenes estacionarios y condiciones para la aparición de transiciones disipativas.												
Extender los análisis anteriores al modelo de Dicke multiqubit y multimodo abierto.												